# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЬДА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

**Мортиков Е.В.**[1,2]

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова

[2] Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

22 ноября 2012 г. Математическое моделирование геофизических процессов: прямые и обратные задачи

# Цели работы

- Определение влияния стратификации на силу сопротивления при движении льда сложной формы в стратифицированной жидкости
  - Выявление зависимости силы сопротивления от параметров стратификации
  - Оценка применимости аналитических моделей для расчета силы сопротивления при наличии стратификации
- Разработка комплекса программ для численного моделирования движения льда в стратифицированной жидкости
  - Численное моделирование течений в областях сложной конфигурации при явном воспроизведении движения погруженных в жидкость тел
  - Возможность проведения расчетов с высоким пространственным разрешением
  - Эффективная реализация модели на современных параллельных вычислительных системах

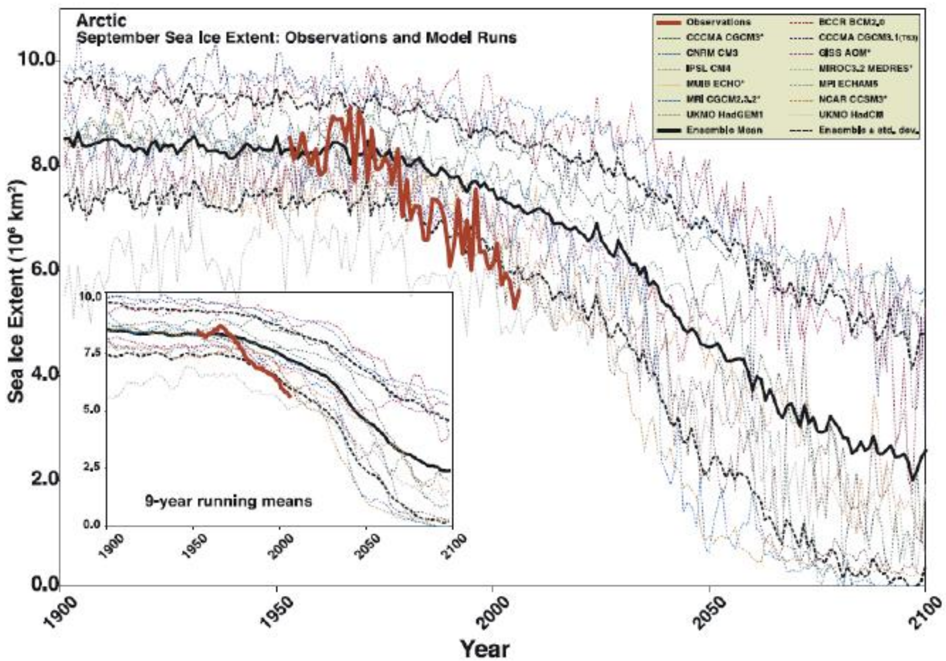
# Структура работы

- Введение
- Численная модель
  - Метод погруженной границы
- Программная реализация на параллельных системах
- Вычислительные эксперименты с численной моделью
- Численное моделирование движения ледяного киля
  - Постановка задачи
  - Аналитические модели
  - Расчет силы сопротивления в однородной и двухслойной жидкости
  - Воспроизведение волнового возмущения в двухслойной жидкости
- Заключение

# I. Введение

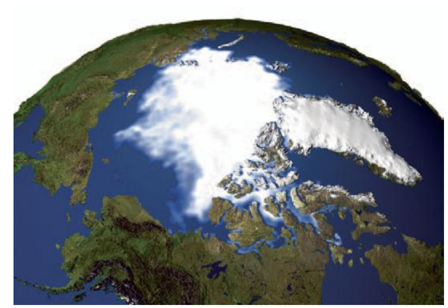
## Актуальность работы

- Параметризация динамики морского льда с учетом стратификации и сложной формы поверхности
- Повышение точности прогнозирования движения морского льда




*Stroeve et al., 2007.* Arctic sea ice decline: faster than forecast

**1979** мин. сентябрь

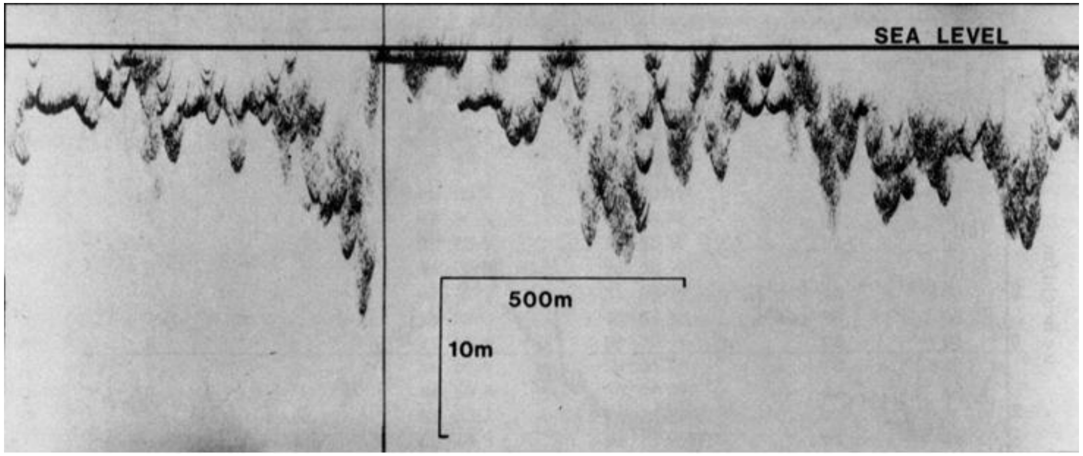


**2003** мин. сентябрь

© NASA (ACIA, 2004)

# I. Введение
## Характеристика ледовой поверхности

- Сложная структура подводной поверхности льда
  - Недостаток данных наблюдений
- Характерная черта ледовой поверхности – наличие ледяных килей
  - Средняя высота $\boldsymbol{h_k}$ ≈ **10** метров *[Wadhams, 1988]*
    - Сравнима с глубиной перемешанного слоя
  - Средняя частота $\boldsymbol{f_k}$ ≈ **3-7** килей на км *[Wadhams, 1988; Bourke et al., 1992]*




*Wadhams, 1981.* Sea ice topography of the Arctic ocean.

# I. Введение
## Динамика морского льда

- Генерация внутренних волн при движении морского льда при наличии стратификации *[McPhee, 1989]*
  - Влияние на динамику морского льда
  - Влияние на процессы вертикального перемешивания и перенос тепла
- Коэффициент сопротивления лед-океан

$$C_D = \frac{\left|u^*\right|^2}{\left|U_i\right|^2}$$

$u^*$ – скорость трения
$U_i$ – относительная скорость льда на глубине в несколько метров

  - Форма подводной поверхности
  - Условия стратификации
  - Динамика пограничного слоя

# I. Введение
## Динамика морского льда

- Современные параметризации коэффициента сопротивления, как правило, не учитывают эффекты стратификации и наличия ледяных килей
  - Постоянные эмпирические значения коэффициента сопротивления ($C_D \approx$ **0.0055**) на основе данных измерений в определенных районах Арктики *[McPhee, 2008]*
  - Простые модели сезонного изменения коэффициента сопротивления
- Чувствительность климатических моделей Северного Ледовитого океана к значению коэффициента сопротивления *[Яковлев, 2007]*
- Данные наблюдений вблизи ледяного киля глубиной около **10** метров показывают изменение коэффициента сопротивления от **0.002** до **0.08** в зависимости от условий стратификации *[Schmidt, 2012]*

# II. Численная модель

- Трехмерная численная модель стратифицированной жидкости
  - Возможность представления особенностей формы поверхности морского льда в численных расчетах
  - Воспроизведение движения морского льда со сложной формой поверхности
  - Воспроизведение внутренних волн при движении морского льда в стратифицированной жидкости
  - Высокое пространственное разрешение
  - Эффективная параллельная реализация численных методов для расчета течений с разрешением порядка $10^8$ точек

# II. Численная модель
## Система уравнений

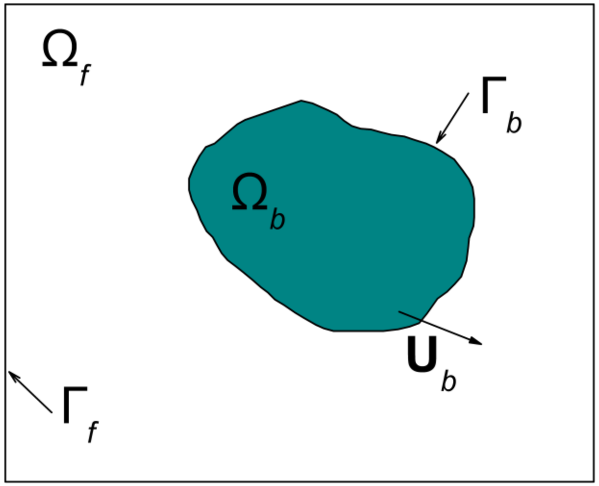
- Вязкая несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nu\nabla^2\mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{\rho'}{\rho_0} g\mathbf{e}_\mathbf{z} + \mathbf{f}_U$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho' = \kappa\nabla^2\rho' + f_\rho$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\big|_{\Gamma_b} = \mathbf{U}_b(t)$$




$\mathbf{u} = (u,v,w)$ – вектор скорости; $p$ – давление

$\rho'$ – отклонение плотности от средней величины $\rho_0$

$\nu = \mu/\rho_0$ – кинематическая вязкость

$\kappa$ – коэффициент диффузии

$g$ – ускорение свободного падения

# II. Численная модель

## Дискретизация по времени

- Метод дробных шагов для интегрирования системы по времени
  - Определение промежуточного поля скорости

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}+\left[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}=\nu[\nabla^2\mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{\rho_0}\nabla p^n-\frac{\rho^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_0}g\mathbf{e_z}+\mathbf{f}_U^{n+1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1}=0$$

  - Явная схема Адамса-Башфорта 3-го порядка по времени
  - Уравнение Пуассона для поправки к давлению $\nabla\cdot\nabla\phi^{n+1}=\frac{\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t}$

$$\mathbf{u}^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}-\Delta t\cdot\nabla\phi^{n+1}$$

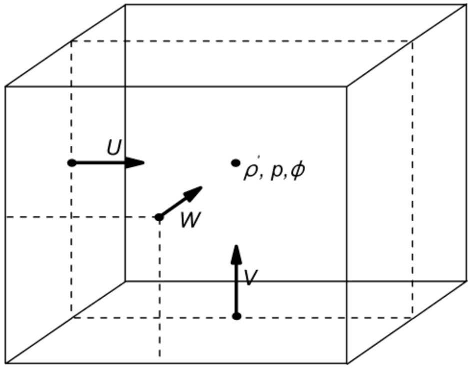
$$p^{n+1}=p^n+\rho_0\phi^{n+1}$$

  - Явная схема Рунге-Кутты 2-го порядка для отклонения плотности

$$\tilde{\rho}=\rho^n+\Delta t L(\rho^n)$$

$$\rho^{n+1}=\rho^n+\frac{\Delta t}{2}\left[L(\rho^n)+L(\tilde{\rho})\right]$$

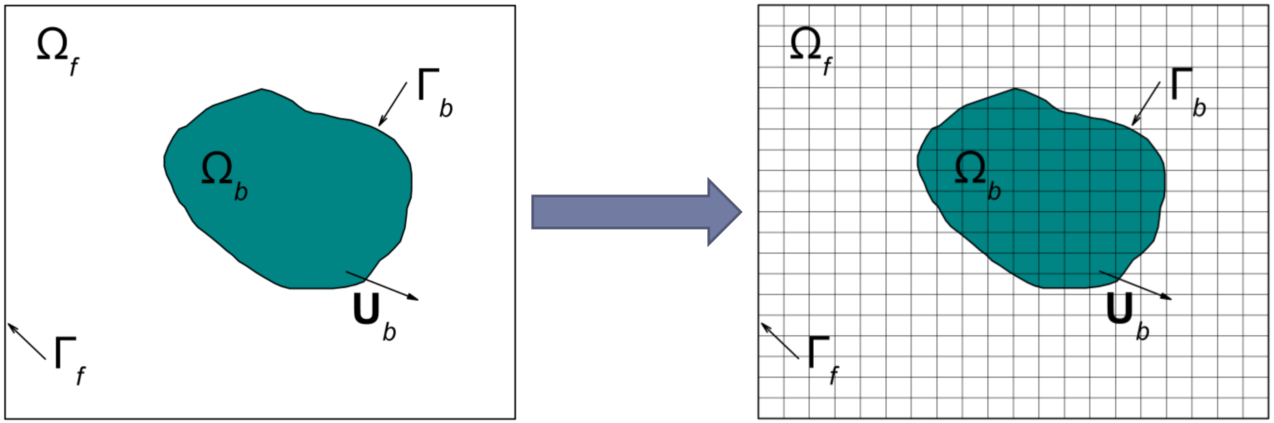
# II. Численная модель
## Дискретизация по пространству




- Прямоугольная сетка с неравномерным шагом
  - Разнесенная сетка
  - Схема центральных разностей для аппроксимации линейных слагаемых
  - Консервативная схема второго порядка для кососимметрической формы записи адвекции
  - Схема WENO 5-го порядка для аппроксимации переноса скаляра
- Итерационный метод решения уравнения Пуассона
  - Стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGstab) для решения уравнения Пуассона
  - Предобусловливатель – геометрический многосеточный метод

# II. Численная модель
## Метод погруженной границы

- Моделирование течений в областях сложной конфигурации на простых прямоугольных сетках
  - Нет необходимости перестраивать сетку на каждом шаге по времени для задач с подвижными границами
  - Простота реализации на параллельных архитектурах
  - Необходимы специальные способы аппроксимации краевых условий на криволинейных границах при дискретизации на прямоугольных сетках – **метод погруженной границы**



# II. Численная модель
## Метод погруженной границы

- Аппроксимация краевых условий на криволинейных границах за счет добавления специальных функций в уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\rho'}{\rho_0} g \mathbf{e_z} + \mathbf{f}_U$$

- Определяются операторы интерполяции и проектирования для точек прямоугольной сетки и точек криволинейной границы

$$\mathbf{F} = L\mathbf{f}, F_s = \sum_{m \in \Omega_h} f_m d(\mathbf{x}_m - \mathbf{X}_s) \Delta V, 1 \le s \le P_b$$

$$\mathbf{f} = L^* \mathbf{F}, f_m = \sum_{s=1}^{P_b} F_s d\left(\mathbf{x}_m - \mathbf{X}_s\right) \Delta s, m \in \Omega_h$$

$d(\mathbf{r})$ – конечно-разностная аппроксимация точечных источников на сетке

- Преобразование операторов
  - Смещение интерполяции вблизи границы области
  - Повышение гладкости операторов при воспроизведении движения границ

# II. Численная модель

## Метод погруженной границы

- Вычисление промежуточного поля скорости разделяется на несколько шагов

$$\frac{\widehat{\mathbf{u}}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}+\left[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}=\nu[\nabla^2\mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{\rho_0}\nabla p^n-\frac{\rho^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_0}g\mathbf{e}_\mathbf{z}$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t}=\mathbf{f}_U^{n+1}(\mathbf{x},t^{n+1})\equiv L^*\mathbf{F}_U^{n+1}(\mathbf{X}_b,t^{n+1})$$

- Система уравнений для $\mathbf{F}_U^{n+1}$ в точках криволинейной границы

$$\frac{L\tilde{\mathbf{u}}-L\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t}=L\mathbf{f}_U^{n+1}\equiv LL^*\mathbf{F}_U^{n+1}\equiv A_b\mathbf{F}_U^{n+1}$$

$$\frac{\mathbf{U}_b^{n+1}-L\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t}=A_b\mathbf{F}_U^{n+1}(\mathbf{X}_b,t_{n+1}),\,L\tilde{\mathbf{u}}\approx\mathbf{U}_b^{n+1}$$

  - $A_b$ – разряженная симметричная блочно-диагональная матрица
  - Требуется пересчет матрицы $A_b$ системы при движении границы

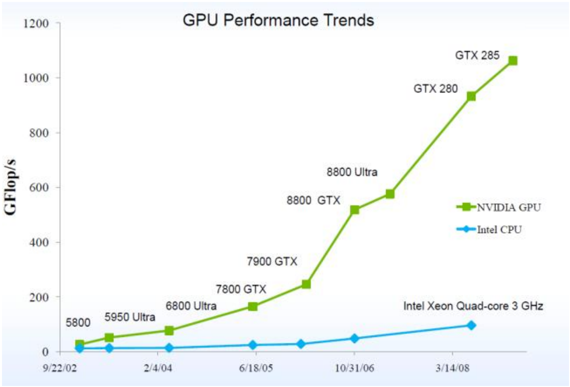
# III. Программная реализация

- Параллельная реализация на традиционной вычислительной архитектуре
  - Пространственная декомпозиция области по вычислительным процессам
  - C/C++, OpenMP, MPI
  - Суперкомпьютер МГУ СКИФ «Чебышёв» , Intel Xeon
    - **5000** ядер, Пиковая производительность – **60** Tflop/s (произв. на ядро: **0.012** Tflop/s)
- Параллельная реализация на графических процессорах
  - Пространственная декомпозиция на графические карты
  - Внутренний параллелизм на ядры графического процессора
  - C/C++, CUDA, MPI
  - Суперкомпьютер МГУ «Графит!/GraphIT!», Nvidia Tesla
    - **48** графических процессоров – **24** Tflop/s (произв. на ГПУ: **0.5** Tflop/s)

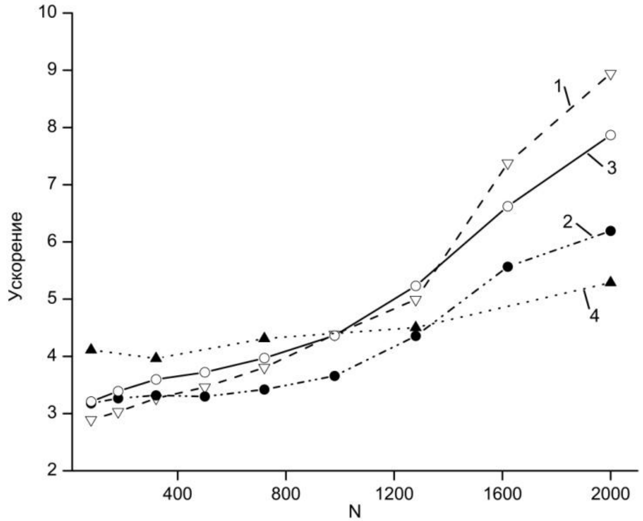
# III. Программная реализация

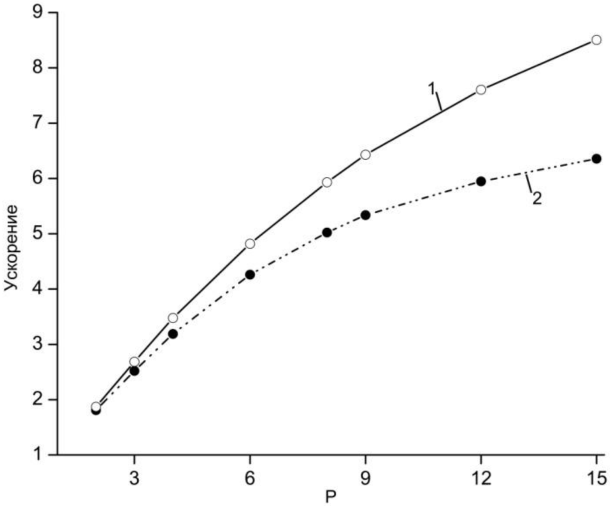
## Параллельная реализация на графических процессорах

- Актуальная современная вычислительная технология
  - Достоинства
    - Низкая стоимость
    - Энергоэффективность
    - Высокая производительность графических процессоров
  - Усложняется программная реализация
  - Модификация численных методов



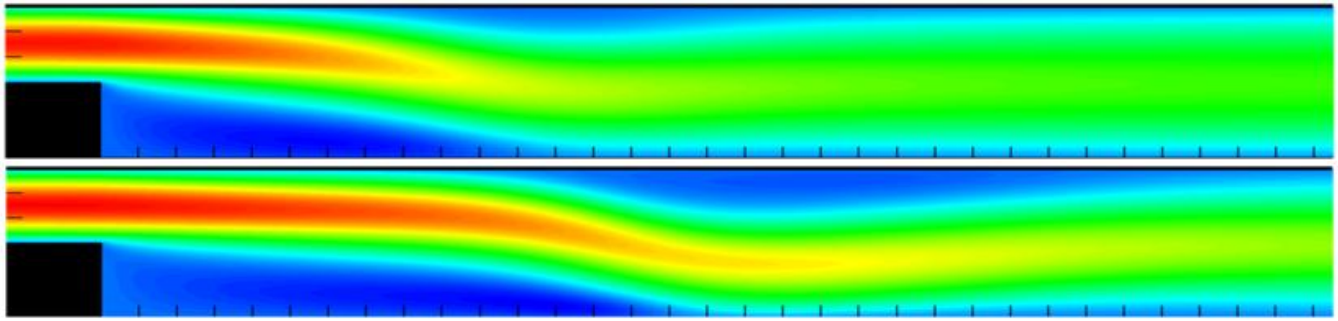

©Nvidia



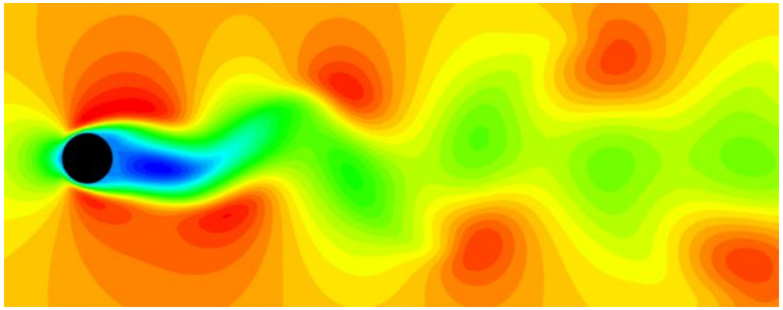



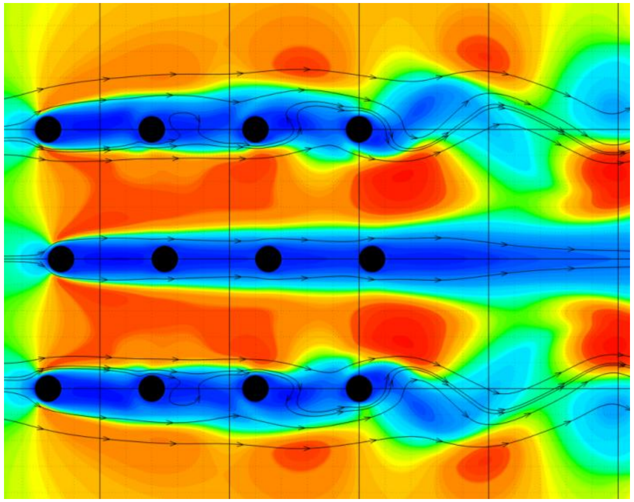
# IV. Вычислительные эксперименты

- Течение поверх ступеньки



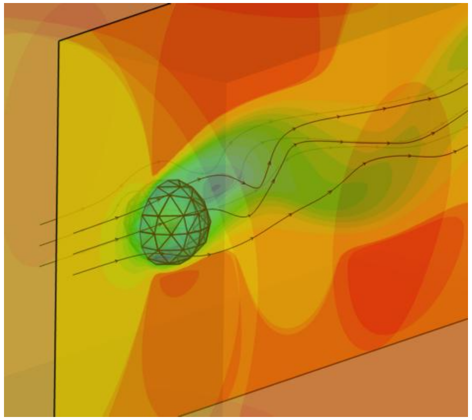
- Течение вокруг кругового цилиндра и группы круговых цилиндров



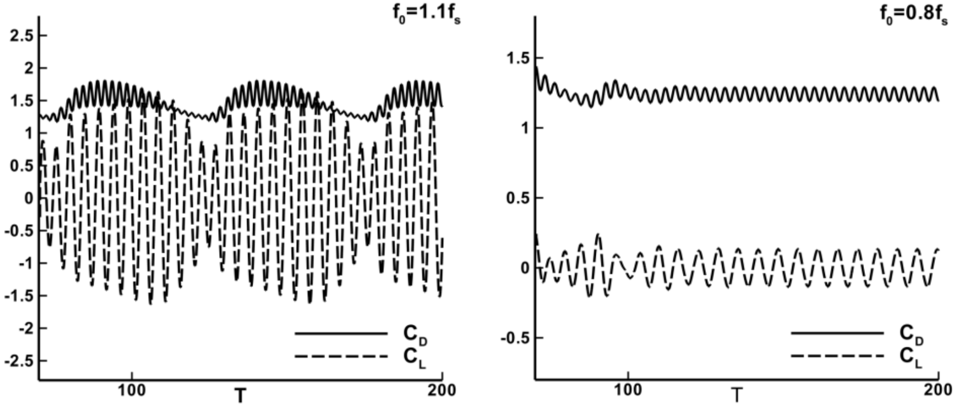


# IV. Вычислительные эксперименты

- Возмущение среды при периодическом движении сферы



- Расчеты силы сопротивления при различных параметрах движения кругового цилиндра



# V. Численное моделирование движения ледяного киля

## Постановка задачи

- Движение ледяного киля в двухслойной жидкости
  - Параметры среды согласованы с лабораторными экспериментами *[Pite et al., 1995]* и данными наблюдений в море Бофорта *[Topham et al., 1987]*
  - Число Фруда

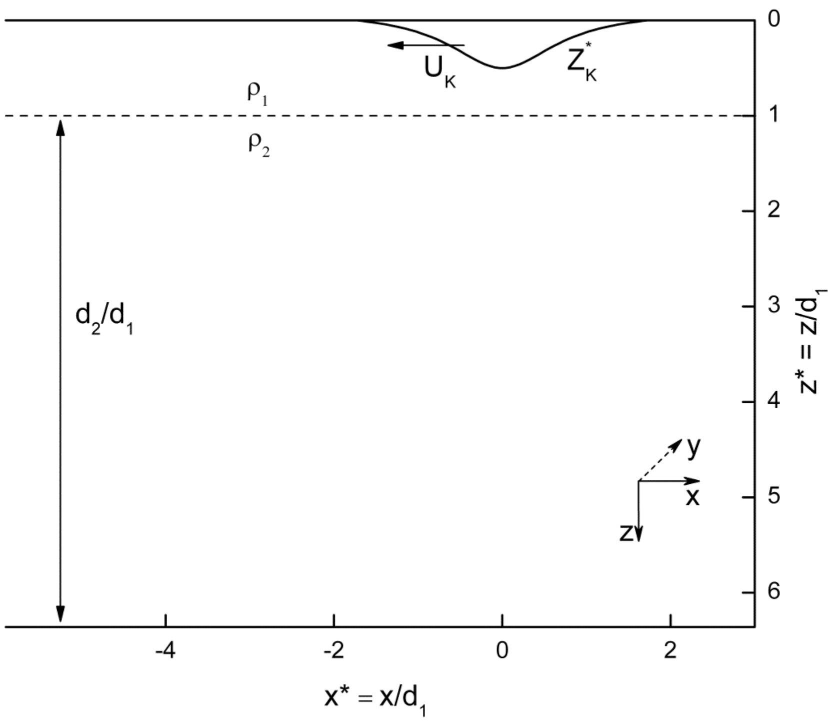
$$F_0 = \frac{U_K}{c_0},\ 0.1 \le F_0 \le 1.7$$

  - Скорость движения киля: $U_K$
  - Фазовая скорость внутренних волн:

$$c_0 = \sqrt{g' h_0}$$

$$h_0 = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$g' = g\left(\rho_2 - \rho_1\right) / \rho_0 \approx 0.021g$$

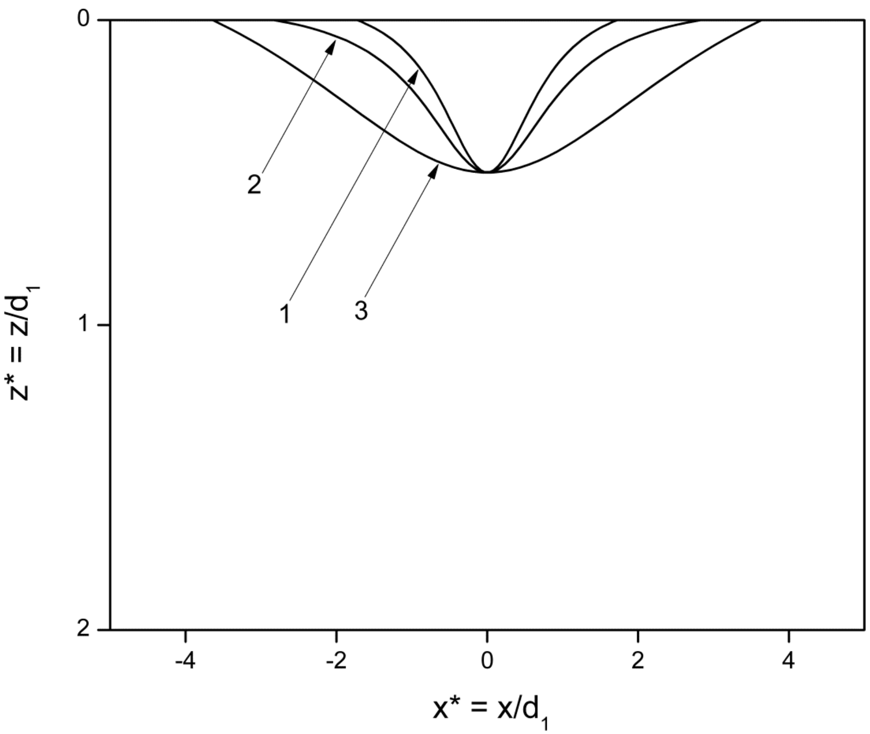


# V. Численное моделирование движения ледяного киля

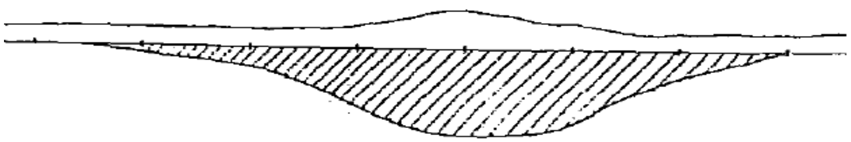
## Постановка задачи

- Профили моделей килей

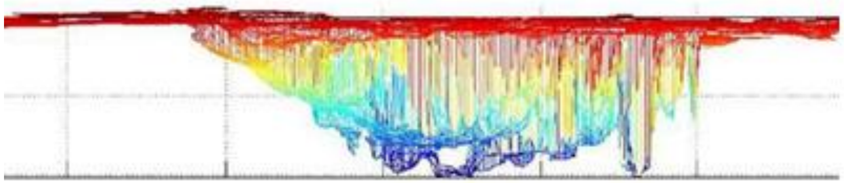
$$Z(x) = \frac{HB^2}{B + x^2} - C$$




- Данные наблюдений



*Topham et al., 1988.* Field observations of flow patterns generated by an ice keel in stratified flow.



*Schmidt, 2012.* Observations of hydraulic roughness and form drag in the wake of a deep ice keel in the Arctic Ocean

# V. Численное моделирование движения ледяного киля

## Аналитические модели

- Модель на основе уравнений Кортвега-де Фриза ($F_0 \approx 1.0$) *[Melville and Helfrich, 1987]*
  - Основные характеристики течения
    - Вектор состояния среды $\Psi = (\rho_1, \rho_2, d_1, d_2, F_0)$
    - Нелинейность $\alpha = a / h_0, a = a(\Psi)$
    - Дисперсия $\beta = \left(h_0 / l\right)^2$
    - Характеристика орографии $\gamma = Z_0 / h_0$
- Вычисление силы сопротивления по форме интерфейса:

$$F^* = \frac{1}{2}\rho_1^* \int_{-l/2}^{l/2} \left(2U^* \tilde{u}_1^* + \tilde{u}_1^{*2}\right) Z_x^* dx^*$$

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(\eta, \alpha, \beta, \gamma, Z, \Psi)$$

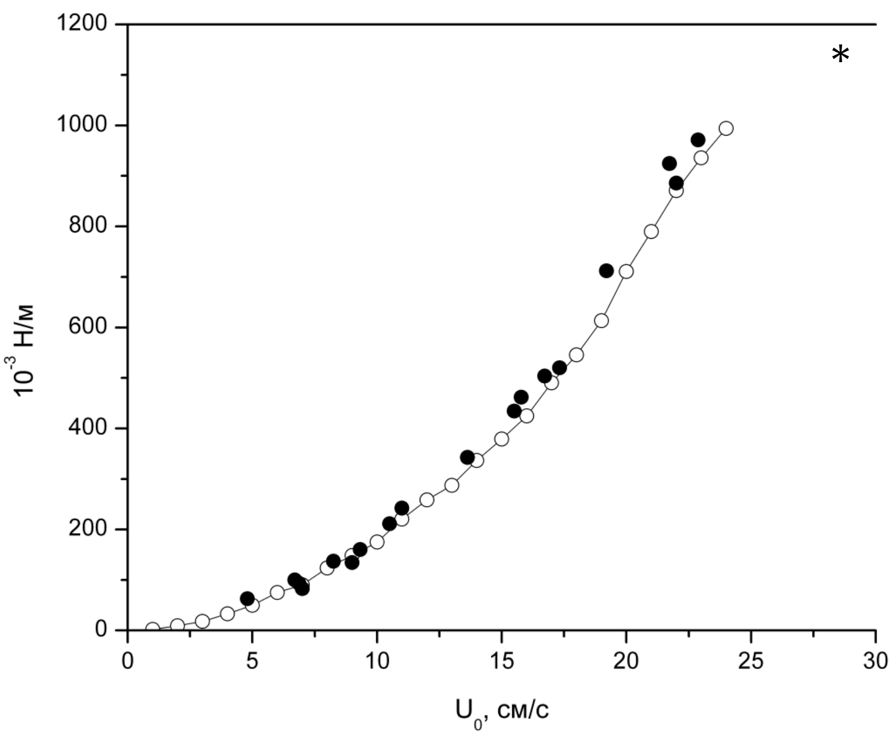
$$\eta_t + (F_0 - 1)\eta_x - \beta p \eta_{xxx} + \alpha r \eta \eta_x + \alpha^2 s \eta^2 \eta_x = -\beta q Z_x$$

- Конечно-разностный метод решения *[Vleigenhart, 1971]*

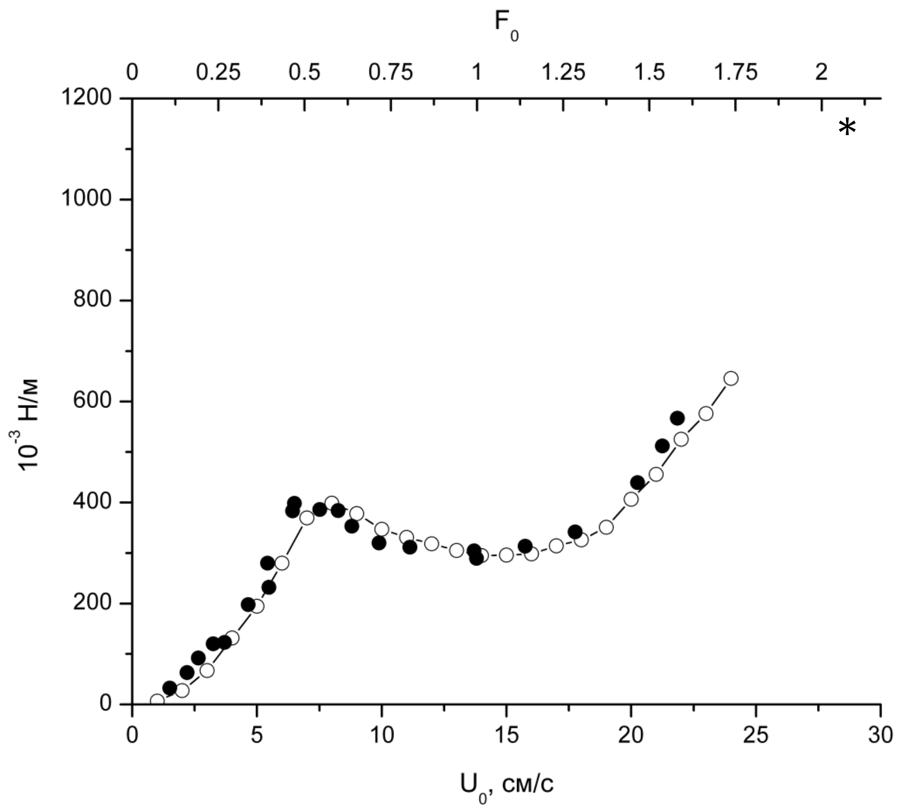
# V. Численное моделирование движения ледяного киля

## Результаты расчета силы сопротивления - Киль №1

- Однородная жидкость




- Двухслойная жидкость

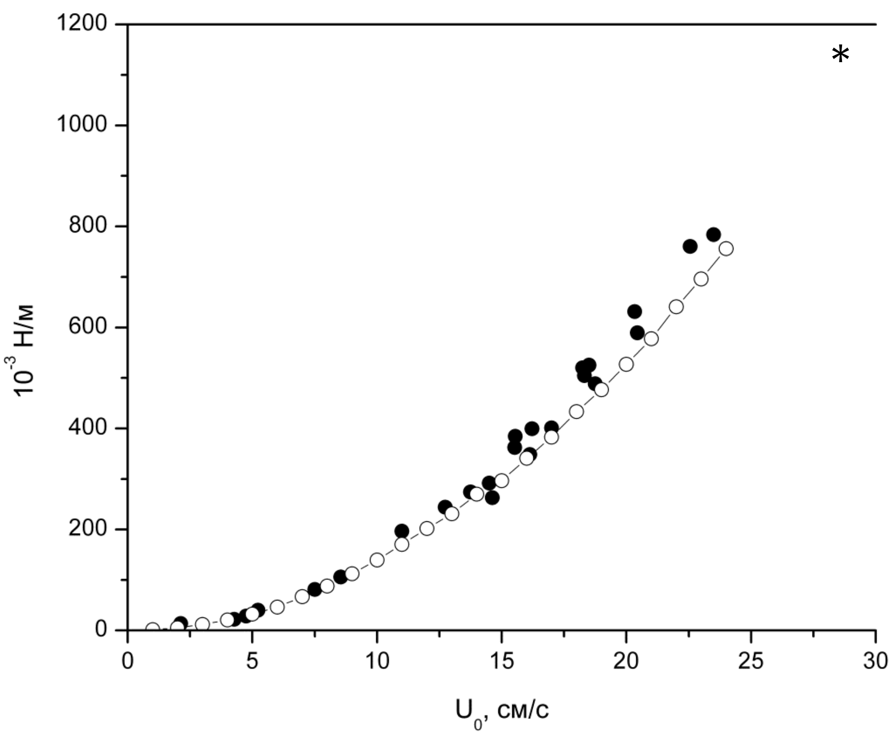



* данные лабораторных экспериментов *[Pite et al., 1995]*

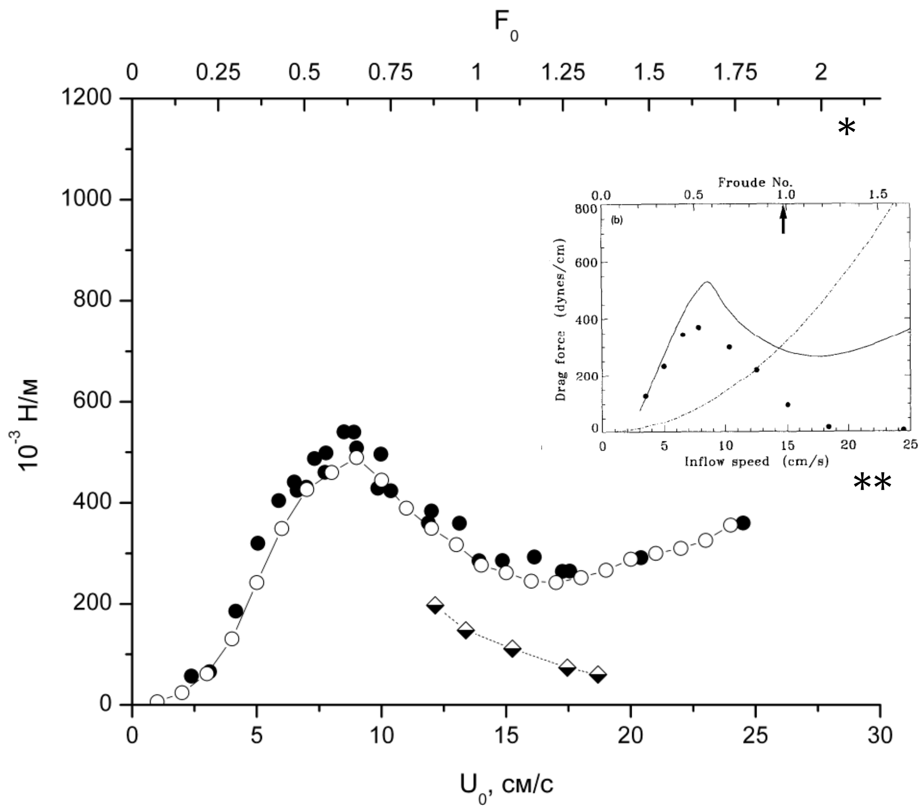
# V. Численное моделирование движения ледяного киля

## Результаты расчета силы сопротивления - Киль №2

- Однородная жидкость




- Двухслойная жидкость



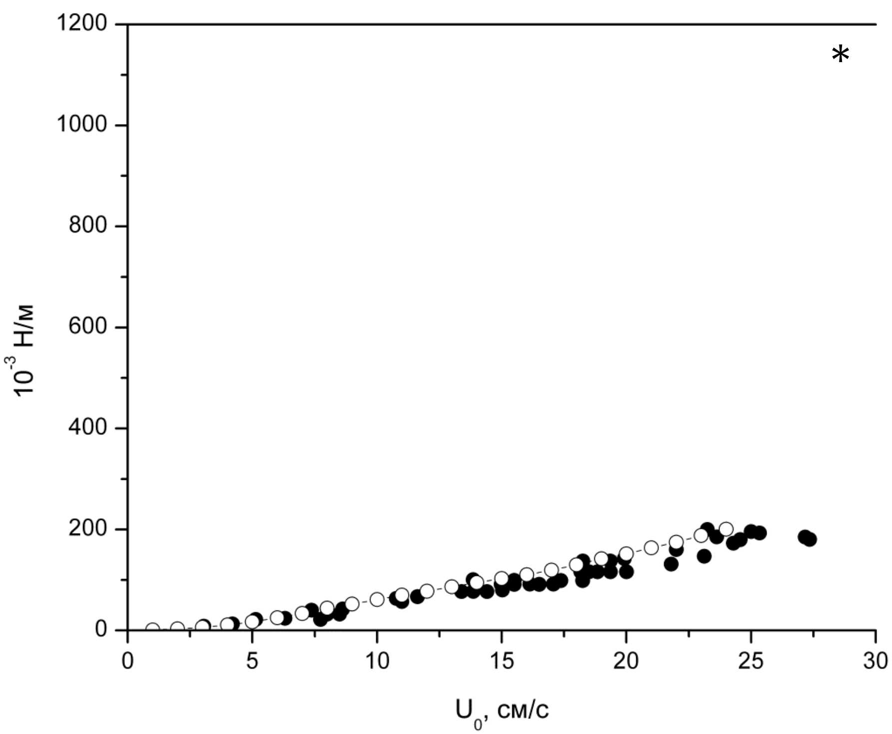

* данные лабораторных экспериментов *[Pite et al., 1995]*

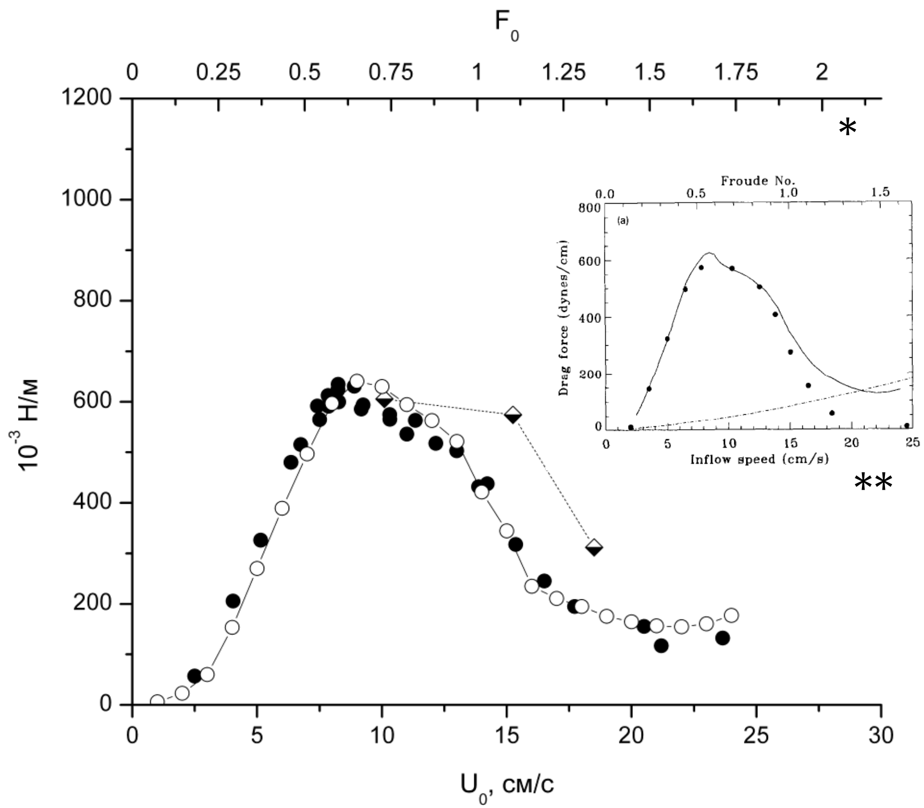
* * численная модель *[Cummins et al., 1994]*

# V. Численное моделирование движения ледяного киля

## Результаты расчета силы сопротивления - Киль №3

- Однородная жидкость
- Двухслойная жидкость



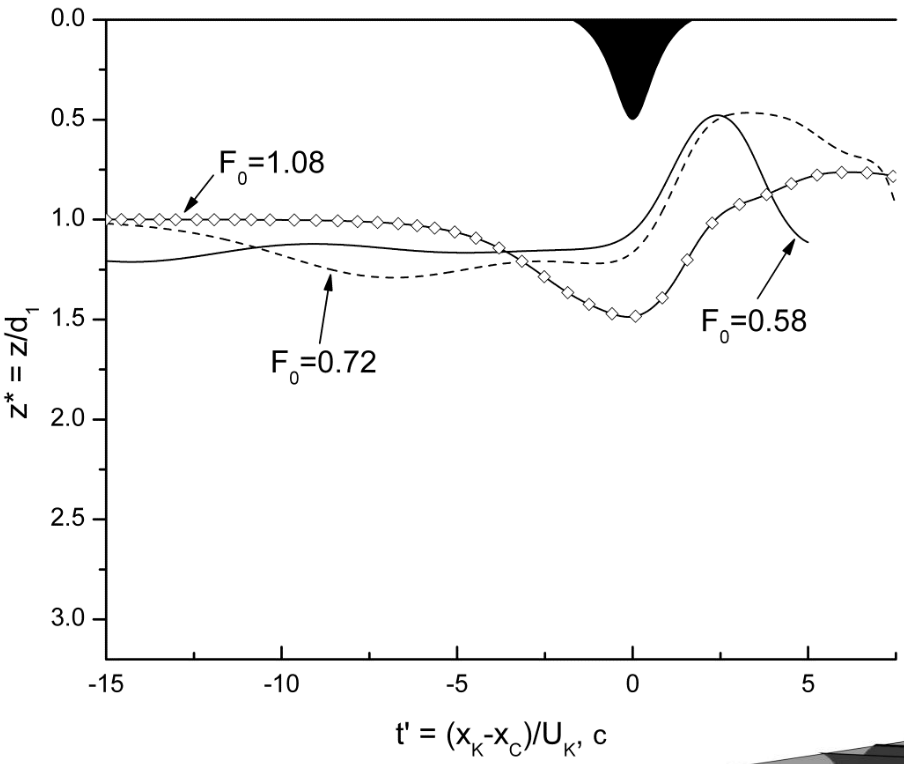

* данные лабораторных экспериментов *[Pite et al., 1995]*

* * численная модель *[Cummins et al., 1994]*

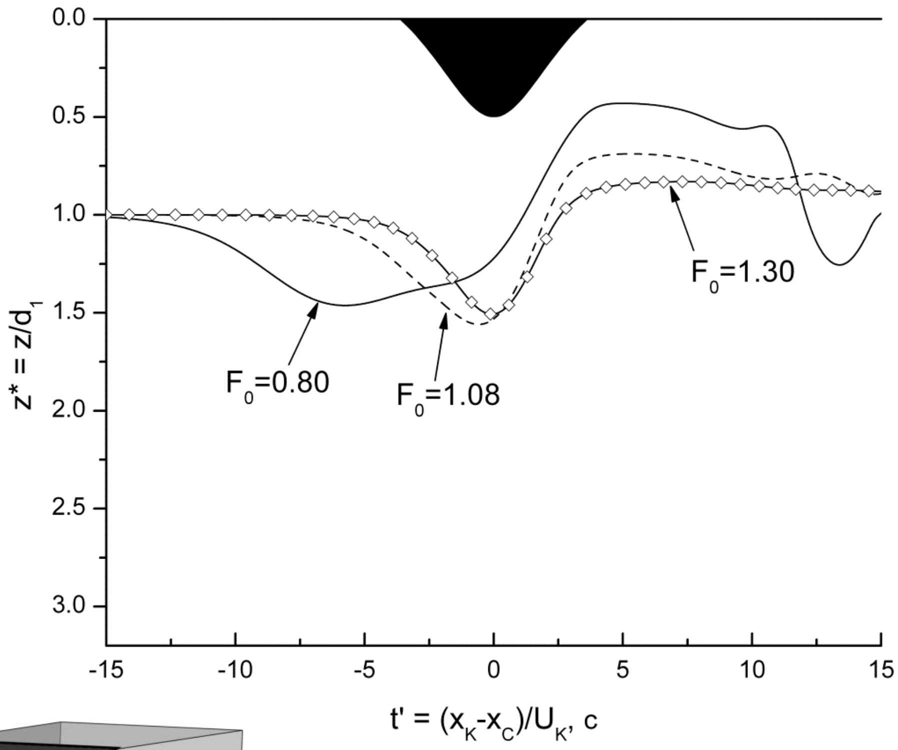
# V. Численное моделирование движения ледяного киля

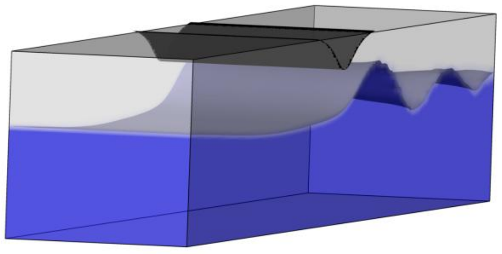
## Воспроизведение волнового возмущения

- Киль №1




- Киль №3



# VI. Заключение

- Разработана численная модель для воспроизведения стратифицированных течений в областях сложной конфигурации с подвижными границами
- Программная реализация модели позволяет рассчитывать течения при высоком пространственном разрешении и допускает возможность масштабирования задач на различных параллельных архитектурах
- Численные расчеты показывают существенное влияние стратификации на силу сопротивления при движении льда
  - Сила сопротивления нелинейно зависит от числа Фруда при наличии локальных экстремумов
  - Сила сопротивления увеличивается для более пологих моделей килей
  - Аналитические модели не позволяют достоверно воспроизводить зависимость силы сопротивления от числа Фруда

# Список публикаций

- **Мортиков Е.В.** Применение метода погруженной границы для решения системы уравнений Навье-Стокса в областях сложной конфигурации // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии.* 2010. Т. 11, № 1. С. 32-42.
- **Мортиков Е.В.** Применение графических процессоров для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной конфигурации методом погруженной границы // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии.* 2012. Т. 13, № 1. С. 177-191.

# Список публикаций

- **Мортиков Е.В.** Численное моделирование влияния стратификации на силу сопротивления при движении ледяного киля в двухслойной жидкости // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2012. Т. 17, № 3. С. 12-22.
- **Мортиков Е.В.** Численное моделирование движения ледяного киля в стратифицированной жидкости // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана* (в печати).

# Список публикаций

- Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В., **Мортиков Е.В.**, Степаненко В.М. Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы. *Изд-во Московского Университета.* 408 С.
- Боресков А.В., Харамов А.А., Марковский Н.Д., Микушин Д.Н., **Мортиков Е.В.**, Мыльцев А.А., Сахарных Н.А., Фролов В.А. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. *Изд-во Московского Университета.* 338 С.