

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ВИХРЬ И СПИРАЛЬНОСТЬ ВО ВЛАЖНОЙ АТМОСФЕРЕ

М.В. Курганский

***Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова
Российской академии наук, Пыжевский пер. д. 3,
119017 г. Москва (e-мейл: kurgansk@ifaran.ru)***

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, 21 февраля 2013 года

План доклада

- Предисловие + введение
- Вихревая динамика неоднородных по составу жидкостей: фундаментальное уравнение Гиббса; теорема о потенциальном вихре Эртеля; уравнение баланса спиральности
- Обобщенный формализм Гамильтона: скобки Намбу (см. Nambu 1973, Névir & Blender 1993, Gassmann & Herzog 2008, Névir & Sommer 2009, Salazar & Kurgansky 2010)
- Вихревая динамика ненасыщенного или насыщенного (в присутствии либо капельной влаги, либо льда в равновесии с водяным паром) воздуха
- «Спонтанное» усиление спиральности при псевдо-адиабатических процессах во влажной атмосфере
- Заключительные замечания

Ураганы (тайфуны), торнадо и пыльные дьяволы



*Hurricane Katrina near peak strength on August 28, 2005
(category 5 SSHS)*

**Tropical cyclone Catarina
(2004)**



**A tornado near Anadarko,
Oklahoma
on May 3, 1999 (VORTEX 99)**



**A dust devil in the Atacama
Desert near Huara, Chile
(January 2009)**



Предисловие + введение

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi + \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\frac{D}{Dt} \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \psi}{\rho} = \frac{1}{\rho^3} \nabla \psi \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) + \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \dot{\psi}}{\rho} + \frac{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \nabla \psi}{\rho}$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}$$

Ertel (1942)

«Сухая атмосфера»

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

Удельная
энтропия

$$s = c_p \ln \theta + const$$

Потенциальная
температура

$$s = s(p, \rho)$$

$$\Pi_\theta = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \theta \quad \frac{D\Pi_\theta}{Dt} = 0$$

Потенциальный
вихрь Эртеля

Предисловие + введение

«Изэнтропический анализ»

(θ, Π_θ) - координаты или
более общо $(\chi(\theta), \Pi_{\chi(\theta)})$
- координаты

Rossby (1937), Hoskins
et al. (1985), Обухов и
др. (1988)

«Влажная атмосфера»

$$\theta_v = T_v \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R_d/c_{pd}}$$

Виртуальная
потенциальная
температура

Эквивалентная
потенциальная
температура

$$\theta_e = \theta \exp \left(\frac{Lr_{vs}}{c_{pd}T} \right)$$

$$\nabla \theta_v \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) = 0$$

$$\frac{D\theta_e}{Dt} = 0$$

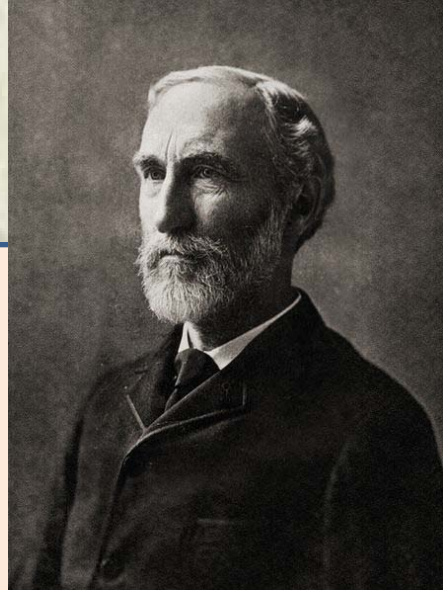
$$\frac{D\theta_v}{Dt} \neq 0$$

$$\nabla \theta_e \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) \neq 0$$

Можно ли строго определить понятие ПВ Эртеля для влажной атмосферы?

$$-\frac{1}{\rho} dp = -dh + T ds + \mu dq$$

Общая формулировка



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_a - \nabla B + T \nabla s + \mu \nabla q$$

$$B = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla s$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q$$

cf. Lin (1963), Seliger & Witham (1968)

Сохраняющиеся величины

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e + \Phi \right) \rho d\tau = \text{inv} \quad \text{энергия}$$

$$\mathcal{M} = \int \rho d\tau = \text{inv} \quad \text{масса}$$

$$S = \int s \rho d\tau = \text{inv} \quad \text{энтропия}$$

$$Q = \int q \rho d\tau = \text{inv} \quad \text{влажность}$$

Теорема Эртеля & ур-ние спиральности



Теорема Эртеля (1942) о ПВ

$$\Pi_s = (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla s) / \rho$$

$$\frac{D}{Dt} \Pi_s = \frac{1}{\rho} \nabla s \cdot (\nabla \mu \times \nabla q)$$

$$\Pi_q = (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla q) / \rho$$

$$\frac{D}{Dt} \Pi_q = \frac{1}{\rho} \nabla q \cdot (\nabla T \times \nabla s)$$

$$\rho^{-1} \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla$$

-- "производная Эртеля"

Спиральность (helicity)

См. Moffatt (1969); Hide (1989); Kurgansky (1989, 1993)

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{v} + 4\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\omega}_a + 2\boldsymbol{\Omega}$$

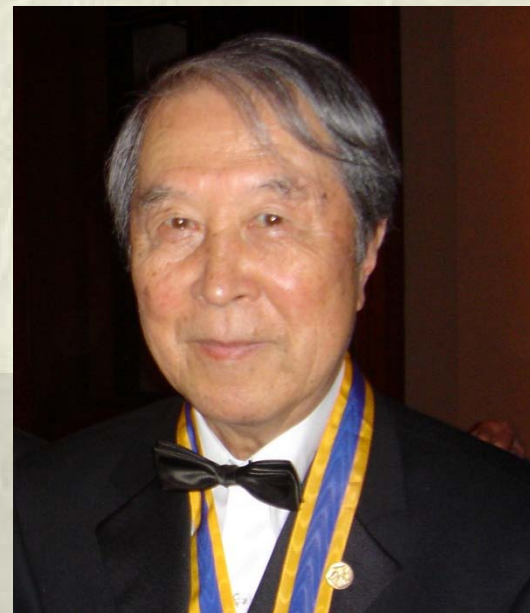
$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - h - \Phi$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mathbf{A}L + (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + T \nabla s \times \mathbf{v} + \mu \nabla q \times \mathbf{v}] + 2(T \Pi_s + \mu \Pi_q)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{v} + 4\boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{v} d\tau \left(\langle = \rangle \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{v}_a d\tau \right) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{G} = \int_{\mathcal{V}} (\Pi_s T + \Pi_q \mu) \rho d\tau$$

Обобщенная Гамильтонова динамика

Yoichiro Nambu (1973)



«Канонические уравнения» Намбу:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(y, z)} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(z, x)} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(x, y)}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla H \times \nabla G$$

Теорема Лиувилля:

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \nabla \cdot (\nabla H \times \nabla G) \equiv 0$$

Обобщенные скобки Пуассона, или скобки Намбу (NB)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial(F, H, G)}{\partial(x, y, z)} = \nabla F \cdot (\nabla H \times \nabla G) = \{F, H, G\}$$

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H, G\} \equiv 0 \quad \frac{dG}{dt} = \{G, H, G\} \equiv 0$$

Формулировка Намбу (1973) ур-ний Эйлера вращений свободного волчка

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} M_2 M_3 \quad \frac{dM_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} M_1 M_3 \quad \frac{dM_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} M_1 M_2$$

$$G = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} = \text{inv} \quad H = \mathbf{M}^2/2 \equiv (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)/2 = \text{inv}$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(M_2, M_3)} \quad \frac{dM_2}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(M_3, M_1)} \quad \frac{dM_3}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(M_1, M_2)}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \nabla H \times \nabla G$$

Двумерные ур-ния Эйлера Névir & Blender (1993)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi$$

Энергия:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\nabla \psi)^2 d\sigma = \text{inv}$$

Энстрофия:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \int \zeta^2 d\sigma = \text{inv}$$

$$-\psi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}$$

$$\zeta = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi) \equiv J(-\psi, \zeta) \equiv J\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}\right)$$

$$\mathcal{F}[\zeta] = \int \Phi(\zeta) d\sigma$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{ \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G} \}_{\zeta, \zeta, \zeta} \equiv \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \zeta} J\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}\right) d\sigma$$

Применения: якобиан Аракавы (1966) ; см. также Salmon (2005, 2007)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{3} & \left[\delta_{2\Delta x} \zeta \delta_{2\Delta y} \psi - \delta_{2\Delta y} \zeta \delta_{2\Delta x} \psi + \delta_{2\Delta x} \left(\zeta \delta_{2\Delta y} \psi \right) - \delta_{2\Delta y} \left(\zeta \delta_{2\Delta x} \psi \right) + \right. \\ & \left. + \delta_{2\Delta y} \left(\psi \delta_{2\Delta x} \zeta \right) - \delta_{2\Delta x} \left(\psi \delta_{2\Delta y} \zeta \right) \right] \end{aligned}$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\zeta, \zeta, \zeta} = \frac{1}{3} \int \left[\frac{\delta F}{\delta \zeta} J \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta} \right) + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta} J \left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}, \frac{\delta F}{\delta \zeta} \right) + \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta} J \left(\frac{\delta F}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta} \right) \right] d\sigma$$

$$F[\zeta] = \zeta = \int \zeta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$\delta F / \delta \zeta = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

INVITED ARTICLE

A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models

Rick Salmon

Scripps Institution of Oceanography, University of California, San Diego, La Jolla,
CA 92093-0213, USA

E-mail: rsalmon@ucsd.edu

Received 14 March 2005, in final form 10 May 2005

Published 6 June 2005

Online at stacks.iop.org/Non/18/R1

Recommended by K Ohkitani

Abstract

Nambu proposed a generalization of Hamiltonian dynamics in the form $dF/dt = \{F, H, Z\}$, which conserves H and Z because the Nambu bracket $\{F, H, Z\}$ is completely antisymmetric. The equations of fluid dynamics fit Nambu's form with H the energy and Z a quantity related to potential vorticity. This formulation makes it easy, in principle, to construct numerical fluid-models that conserve analogues of H and Z ; one need only discretize the Nambu bracket in such a way that the antisymmetry property is preserved. In practice, the bracket may contain apparent singularities that are cancelled by the functional derivatives of Z . Then the discretization must be carried out in such a way that the cancellation is maintained. Following this strategy, we derive numerical models of the shallow-water equations and the equations for incompressible flow in two and three dimensions. The models conserve the energy and an arbitrary moment of the potential vorticity. The conservation of potential enstrophy—the second moment of potential vorticity—is thought to be especially important because it prevents the spurious cascade of energy into high wavenumbers.

Mathematics Subject Classification: 65P10

A General Method for Conserving Energy and Potential Enstrophy in Shallow-Water Models

RICK SALMON

Scripps Institution of Oceanography, University of California, San Diego, La Jolla, California

(Manuscript received 7 September 2005, in final form 15 March 2006)

ABSTRACT

The shallow-water equations may be posed in the form $dF/dt = \{F, H, Z\}$, where H is the energy, Z is the potential enstrophy, and the Nambu bracket $\{F, H, Z\}$ is completely antisymmetric in its three arguments. This makes it very easy to construct numerical models that conserve analogs of the energy and potential enstrophy; one need only discretize the Nambu bracket in such a way that the antisymmetry property is maintained. Using this strategy, this paper derives explicit finite-difference approximations to the shallow-water equations that conserve mass, circulation, energy, and potential enstrophy on a regular square grid and on an unstructured triangular mesh. The latter includes the regular hexagonal grid as a special case.

Трёхмерные ур-ния Эйлера; Névir & Blender (1993)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \varpi \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 d\tau \equiv \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{A})^2 d\tau = \text{inv}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d\tau \equiv \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \text{inv}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\omega}}$$

Кинетическая энергия

Спиральность

$$\mathbf{v} = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\omega}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \left[\left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) \times \left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) \right]$$

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\omega}] = \int \Phi(\boldsymbol{\omega}) d\tau$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{ \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G} \}_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}} \equiv \int \left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) \cdot \left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) \times \left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right) d\tau$$

Towards a consistent numerical compressible non-hydrostatic model using generalized Hamiltonian tools

Almut Gassmann^{a*} and Hans-Joachim Herzog^b

^a *Max Planck Institute for Meteorology, Hamburg, Germany*

^b *Deutscher Wetterdienst, Potsdam, Germany*

ABSTRACT: A set of compressible non-hydrostatic equations for a turbulence-averaged model atmosphere comprising dry air and water in three phases plus precipitating fluxes is presented, in which common approximations are introduced in such a way that no inconsistencies occur in the associated budget equations for energy, mass and Ertel's potential vorticity. These conservation properties are a prerequisite for any climate simulation or NWP model.

It is shown that a Poisson bracket form for the ideal fluid part of the full-physics equation set can be found, while turbulent friction and diabatic heating are added as separate 'dissipative' terms. This Poisson bracket is represented as a sum of a two-fold antisymmetric triple bracket (a Nambu bracket represented as helicity bracket) plus two antisymmetric brackets (so-called mass and thermodynamic brackets of the Poisson type).

The advantage of this approach is that the given conservation properties and the structure of the brackets provide a good strategy for the construction of their discrete analogues. It is shown how discrete brackets are constructed to retain their antisymmetric properties throughout the spatial discretisation process, and a method is demonstrated how the time scheme can also be incorporated in this philosophy. Copyright © 2008 Royal Meteorological Society

KEY WORDS NWP; conservable quantity; Poisson bracket

Received 3 December 2007; Revised 23 June 2008; Accepted 26 June 2008

Evaluation of three spatial discretization schemes with the Galewsky *et al.* test

Seoleun Shin,^{1*} Matthias Sommer,² Sebastian Reich¹ and Peter Névir²

¹Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, D-14469 Potsdam, Germany

²Institut für Meteorologie, Freie Universität Berlin, Carl-Heinrich-Becker-Weg 6–10, D-12165 Berlin, Germany

*Correspondence to:

Seoleun Shin, Institut für
Mathematik, Universität

Potsdam, Am Neuen Palais 10,
D-14469 Potsdam, Germany.

E-mail: seshin@uni-potsdam.de

Abstract

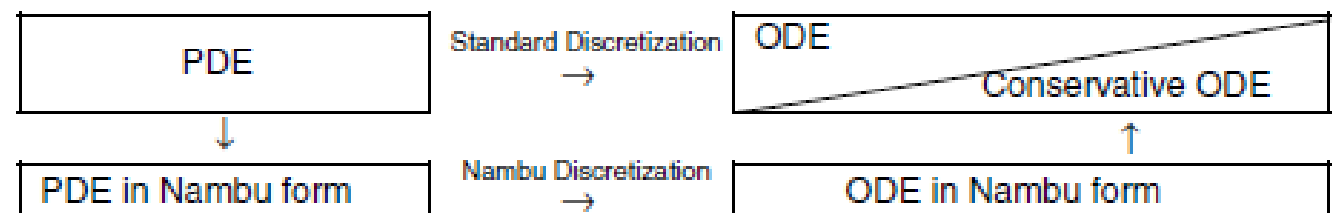
We evaluate the Hamiltonian particle methods (HPM) and the Nambu discretization applied to shallow-water equations on the sphere using the test suggested by Galewsky *et al.* (2004). Both simulations show excellent conservation of energy and are stable in long-term simulation. We repeat the test also using the ICOSWP scheme to compare with the two conservative spatial discretization schemes. The HPM simulation captures the main features of the reference solution, but wave 5 pattern is dominant in the simulations applied on the ICON grid with relatively low spatial resolutions. Nevertheless, agreement in statistics between the three schemes indicates their qualitatively similar behaviors in the long-term integration. Copyright © 2010 Royal Meteorological Society

Received: 3 December 2009

Revised: 22 February 2010

Accepted: 21 April 2010

Table I. Standard and Nambu discretization scheme.



Формализм Намбу для вращающихся сжимаемых бароклинных двухкомпонентных жидкостей

$$F[\mathbf{v}, \rho, \sigma \equiv \rho s, \chi \equiv \rho q] = \int_V F(\mathbf{v}, \rho, \sigma, \chi) d\tau$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\} d\tau =$$

$$= [F, \mathcal{H}, \mathcal{G}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{M}]_{\rho, \mathbf{v}, \rho} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{S}]_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}]_{\chi, \mathbf{v}, \chi}$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \int \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \right) d\tau$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{M}\}_{\rho, \mathbf{v}, \rho} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \right) - \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right) \right) d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{M})$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{S}\}_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{S})$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}\}_{\chi, \mathbf{v}, \chi} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) - \frac{\delta F}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{Q})$$

Формализм Намбу для вращающихся сжимаемых бароклинических однокомпонентных жидкостей

$$F[\mathbf{v}, \rho, \sigma \equiv \rho s, \chi \equiv \rho q] = \int_V F(\mathbf{v}, \rho, \sigma, \chi) d\tau$$

см. Névir & Sommer (2009)

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\} d\tau =$$

$$= [F, \mathcal{H}, \mathcal{G}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{M}]_{\rho, \mathbf{v}, \rho} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{S}]_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}]_{\chi, \mathbf{v}, \chi}$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \int \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \right) d\tau$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{M}\}_{\rho, \mathbf{v}, \rho} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \right) - \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right) \right) d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{M})$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{S}\}_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{S})$$

~~$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}\}_{\chi, \mathbf{v}, \chi} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) - \frac{\delta F}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{Q})$$~~

Формализм Намбу для вращающихся сжимаемых баротропных однокомпонентных жидкостей

$$F[\mathbf{v}, \rho, \sigma \equiv \rho s, \chi \equiv \rho q] = \int_V F(\mathbf{v}, \rho, \sigma, \chi) d\tau$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\} d\tau =$$

$$= [F, \mathcal{H}, \mathcal{G}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{M}]_{\rho, \mathbf{v}, \rho} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{S}]_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} + [F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}]_{\chi, \mathbf{v}, \chi}$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \int \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \right) d\tau$$

$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{M}\}_{\rho, \mathbf{v}, \rho} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \right) - \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right) \right) d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{M})$$

~~$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{S}\}_{\sigma, \mathbf{v}, \sigma} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{S})$$~~

~~$$\{F, \mathcal{H}, \mathcal{Q}\}_{\chi, \mathbf{v}, \chi} = \int \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) - \frac{\delta F}{\delta \chi} \nabla \cdot \left(\frac{\chi}{\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \chi} \right) \right] d\tau + \text{cyc}(F, \mathcal{H}, \mathcal{Q})$$~~

Классификация «метеорологических жидкостей»

Баротропная сжимаемая однокомпонентная жидкость

Теорема Кельвина о циркуляции скорости применима к любому замкнутому материальному (жидкому) контуру L внутри жидкости

Бароклинная сжимаемая однокомпонентная жидкость

Теорема Кельвина применима к замкнутым материальным контурам L , лежащим на изэнтропических поверхностях

Бароклинная сжимаемая двухкомпонентная жидкость

Теорема Кельвина применима лишь в исключительных случаях к замкнутым материальным контурам L , которые совпадают с линиями пересечений поверхностей $s=\text{const}$ и $q=\text{const}$.

Динамическая невозможность установившихся винтовых движений двухкомпонентных сред

$$\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_a \parallel \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \Rightarrow \Pi_s = 0$$

Но!!!

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi_s = \frac{1}{\rho} \nabla s \cdot (\nabla \mu \times \nabla q) \neq 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla q = 0 \Rightarrow \Pi_q = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi_q = \frac{1}{\rho} \nabla q \cdot (\nabla T \times \nabla s) \neq 0$$

Это доказывает высказанное утверждение

Примеры: влажный воздух (торнадо и водяные смерчи), запыленный сухой воздух (пыльные вихри), соленая морская вода («мальстрём»?)

Ненасыщенный влажный воздух (I)

$$s = (c_{pd} \ln T - R_d \ln p)(1 - q) + (c_{pv} \ln T - R_v \ln p)q + \Sigma(q)$$

$$\Sigma(q) = -R_d(1 - q) \ln \frac{\varepsilon(1 - q)}{\varepsilon(1 - q) + q} - \frac{R_d}{\varepsilon} q \ln \frac{q}{\varepsilon(1 - q) + q} \geq 0$$

-- энтропия смешения
См. напр. Olbers et al. (2012)

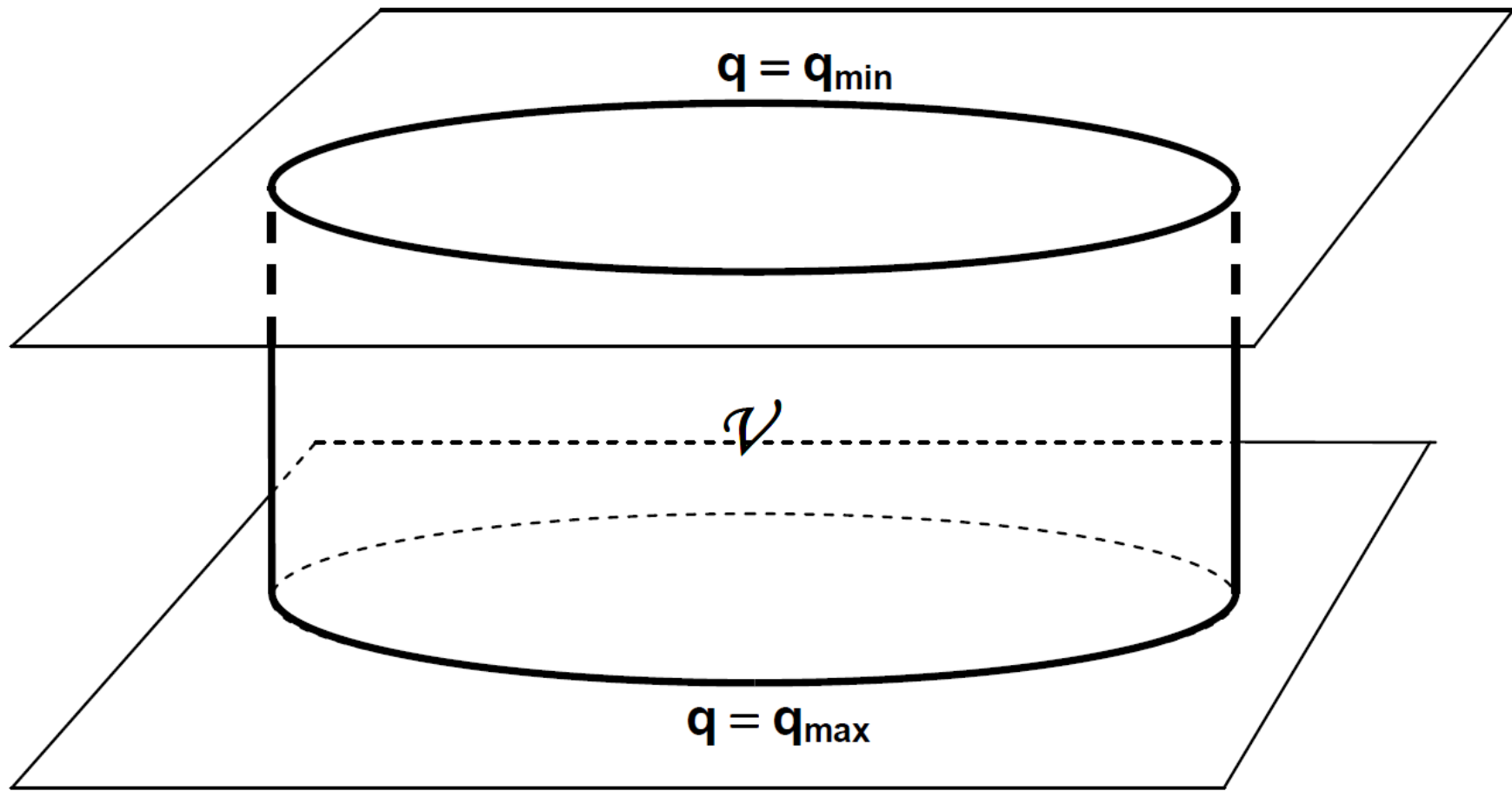
$$\mu = (R_v - R_d)T \ln p + (c_{pv} - c_{pd})(T - T \ln T) - T d\Sigma/dq$$

$$t = t_0 \quad \Pi_s = \Pi_q \equiv 0 \quad (dG/dt)|_{t=t_0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G = \int_{\mathcal{V}} \left(\Pi_s \frac{DT}{Dt} + \Pi_q \frac{D\mu}{Dt} \right) \rho d\tau + \int_{\mathcal{V}} [T \nabla s \cdot (\nabla \mu \times \nabla q) + \mu \nabla q \cdot (\nabla T \times \nabla s)] d\tau$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} G \right|_{t=t_0} = \int_{\mathcal{V}} \nabla q \cdot (\nabla p \times \nabla T) \frac{T}{p} (R_d c_{pv} - R_v c_{pd}) d\tau (= 0)$$

III. Влажная атмосфера



“Модель облака”

Ненасыщенный влажный воздух (II)

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho} \nabla f_1 \cdot (\nabla f_2 \times \nabla f_3) = \frac{1}{\rho} \nabla \dot{f}_1 \cdot (\nabla f_2 \times \nabla f_3) + \frac{1}{\rho} \nabla f_1 \cdot \left(\nabla \dot{f}_2 \times \nabla f_3 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla f_1 \cdot \left(\nabla f_2 \times \nabla \dot{f}_3 \right)$$

-- Коммутационная формула Эртеля (1960); см. также Hollmann (1964)

$$\left. \frac{d^3}{dt^3} \mathcal{G} \right|_{t=t_0} = 0$$

$$\left. \frac{d^4}{dt^4} \mathcal{G} \right|_{t=t_0} = - \int_V \left(\frac{\dot{T}}{T} \right)^2 \frac{(R_d c_{pv} - R_v c_{pd})}{pT} \nabla q \cdot (\nabla p \times \nabla T) d\tau (\neq 0)$$

Диагностические параметры и прогностические индексы

1. CAPE (convective available potential energy; LFC – lifted free convection level, EL – equilibrium level)

$$\text{CAPE} = \int_{\text{LFC}}^{\text{EL}} (\alpha_{lp} - \alpha) dp$$

2. SRH (storm relative helicity)

$$\text{SRH} = \int_0^h (\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \partial \mathbf{V} / \partial z) dz \equiv - \int_0^h \mathbf{k} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{c}) \times \partial \mathbf{V} / \partial z dz$$

3. EHI (energy-helicity index)

$$\text{EHI} = \frac{(\text{CAPE}) \times (\text{SRH})}{160000}$$

Cf. Doswell, C.A. and D.M. Schultz, 2006: On the use of indices and parameters in forecasting severe storms. E-Journal of Severe Storms Meteorology, Vol. 1, No 3.

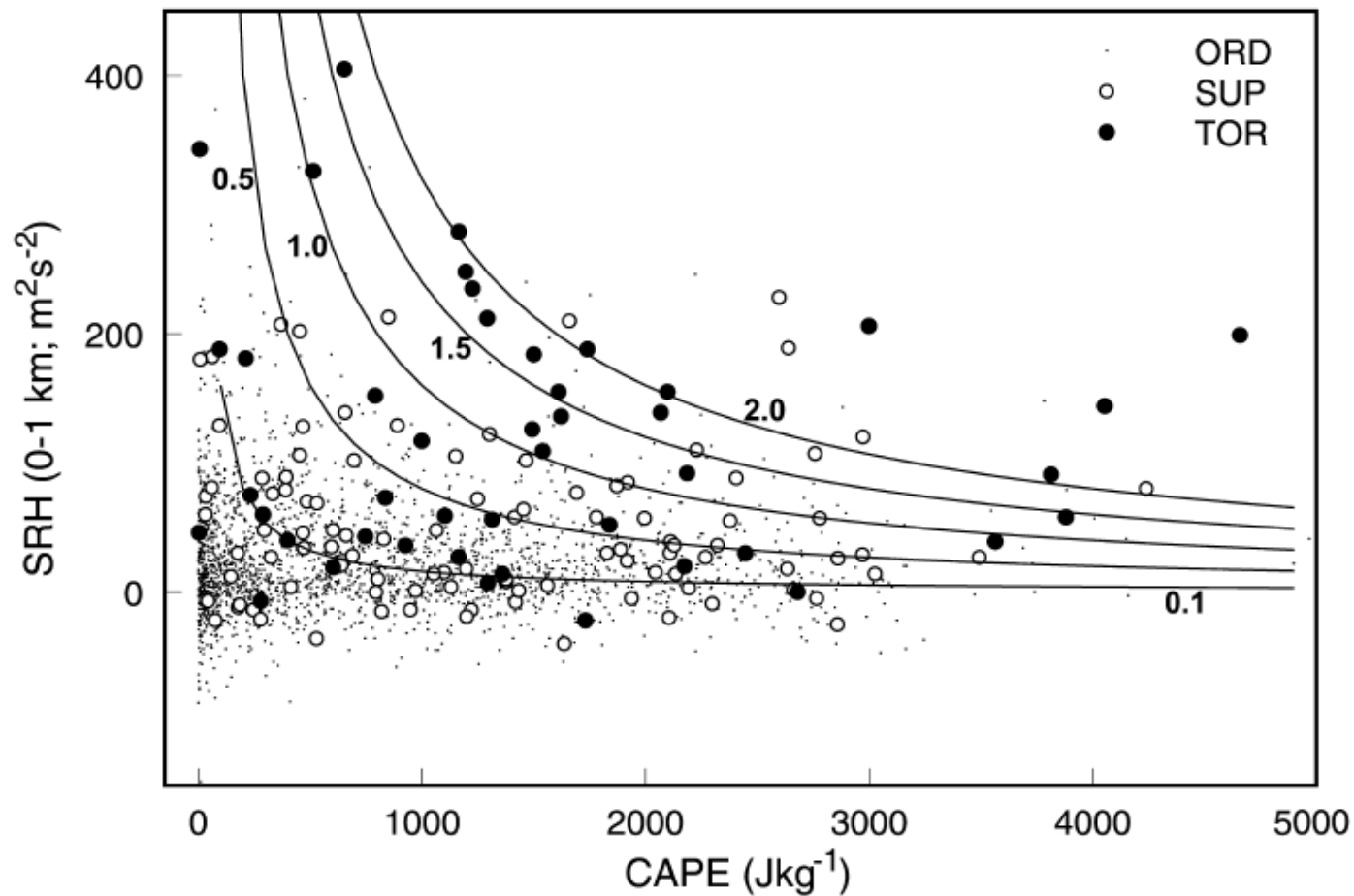


FIG. 3. As in Fig. 2, but for the CAPE vs SRH parameter space of EHI_{0-1} . Labeled curves are lines of constant EHI.

(Rasmussen, 2003) TOR –significant tornadoes of F2 or greater damage intensity, SUP – soundings with hail 5.1 cm in diameter but without significant tornadoes, ORD –non-severe thunderstorms.

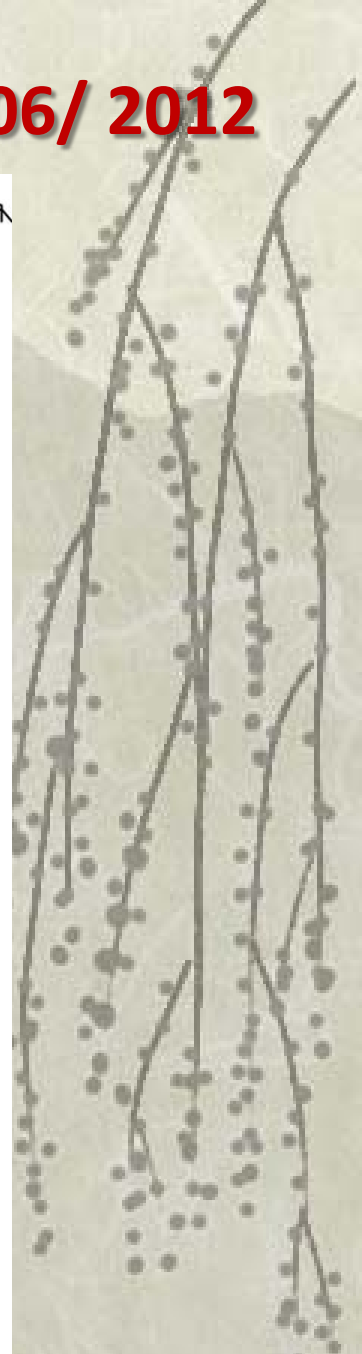
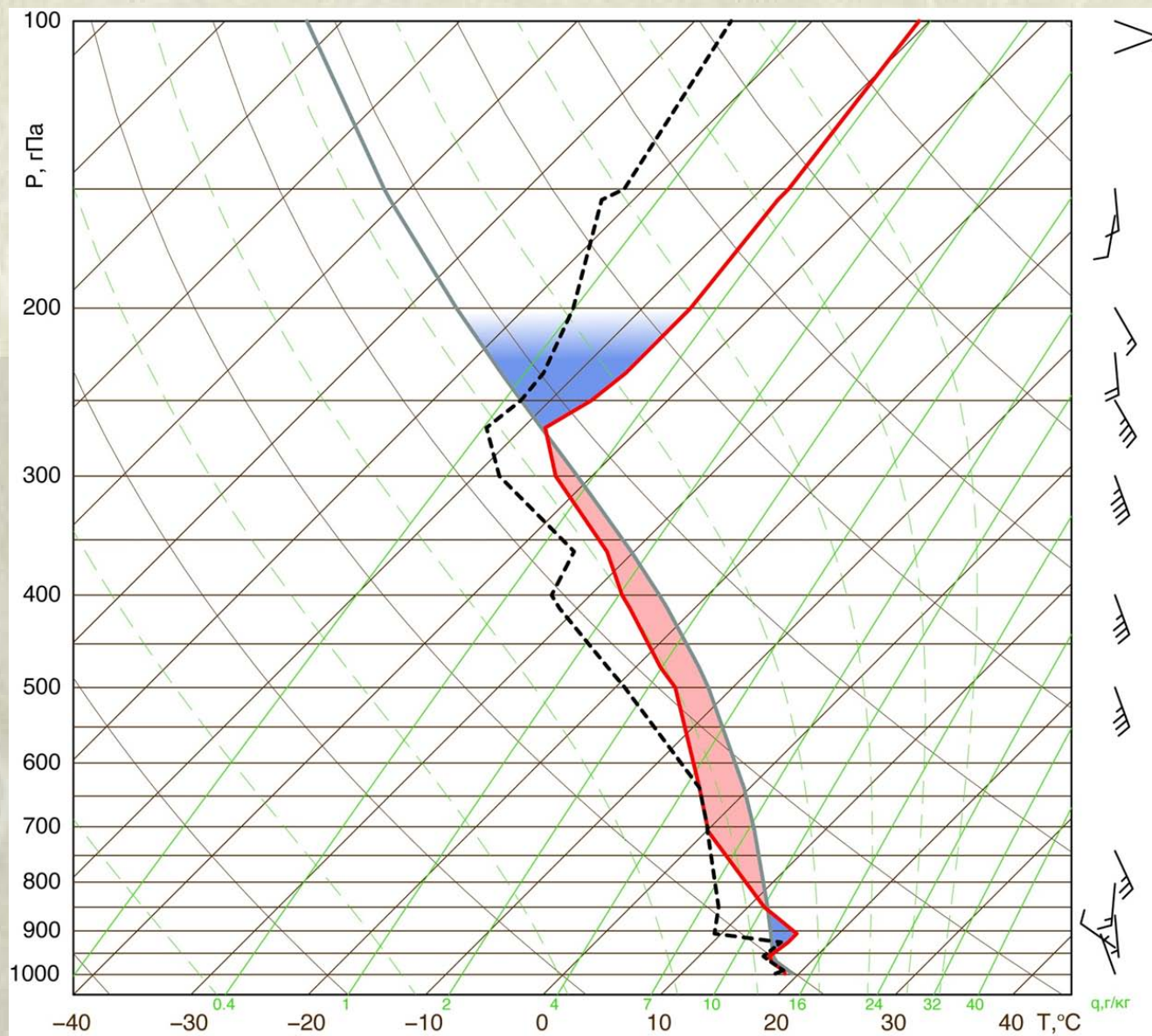
Смерч вблизи Ханты-Мансийска (З. Сибирь, 61° с)



CAPE (m^2s^{-2})	886
SRH (m^2s^{-2})	144
EHI	0,797

См., Курганский, Чернокульский, Мохов (2013)

Аэрологическая диаграмма за 12:00 UTC 12/06/ 2012



Кривые стратификации, состояния и т-ры точки росы

Диагностические расчеты спиральности

Гор-ный вклад в спиральность:

$$\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \equiv \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \varepsilon$$

helix \Leftrightarrow έλιξ

Сухая атмосфера:

$$f^2 \varepsilon = -g(\nabla T \times \nabla s) \cdot \mathbf{k} \equiv gR_d(\nabla T \times \nabla \ln p) \cdot \mathbf{k} \quad f \varepsilon = -g\mathbf{v}_g \cdot \nabla \ln T$$

Влажная атмосфера:

$$f^2 \varepsilon = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 \rho g(\nabla T \times \nabla p) \cdot \mathbf{k} - T \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial \mu}{\partial p} \rho g(\nabla q \times \nabla p) \cdot \mathbf{k}$$

$$\cong gR_d(\nabla T \times \nabla \ln p) \cdot \mathbf{k} - g(R_v - R_d)T(\nabla q \times \nabla \ln p) \cdot \mathbf{k}$$

$$f \varepsilon \cong -g\mathbf{v}_g \cdot \nabla \ln T - g \frac{R_v - R_d}{R_d} \mathbf{v}_g \cdot \nabla q \approx -g\mathbf{v}_g \cdot \nabla \ln T_v$$

Виртуальная температура:

$$T_v = \left(1 + \frac{R_v - R_d}{R_d} q \right) T$$

Насыщенный влажный воздух (I)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \times 2\boldsymbol{\Omega} - \nabla h + T\nabla s + \mu\nabla q - \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

$$\frac{Dq}{Dt} = 0$$

Dufour & Van Mieghem (1975)

$$q = (m_v + m_l)/m$$

$$s = (1 - q)s_d + qs_l + Lq_{vs}/T$$

$$s_d = c_{pd} \ln T - R_d \ln p_d \quad s_l = c \ln T$$

$$h = (1 - q)c_{pd}T + qcT + Lq_{sv}$$

$$\mu = \zeta_l - \zeta_d = (c - c_{pd})(T - T \ln T) - R_d \ln p_d$$

см. Bannon (2003)
Gassmann & Herzog (2008)
Ambaum (2010)

Закон Дальтона

$$p = p_d + E(T)$$

Ур-ние Клаузиуса–Клапейрона

$$dE = (L/R_v T^2) dT$$

Ненасыщенный/насыщенный влажный воздух (II)

$$\left. \frac{d^4}{dt^4} \mathcal{G} \right|_{t=t_0} = - \int_V \left(\frac{\dot{T}}{T} \right)^2 \frac{R_d R_v}{2pT} \nabla q \cdot (\nabla p \times \nabla T) d\tau$$

versus

$$\left. \frac{d^4}{dt^4} \mathcal{G} \right|_{t=t_0} \approx - \int_V \left(\frac{\dot{T}}{T} \right)^2 \frac{0.622 R_d L E}{p^2} \frac{6804.10}{T} \nabla q \cdot (\nabla p \times \nabla T) d\tau$$

В облачной атмосфере этот механизм примерно в 50 раз более эффективен

Диабатические (необратимые) эффекты

(1) Выпадение сконденсированной влаги (псевдо-адиабатический процесс)

$$T \frac{Ds}{Dt} = -L_v \frac{Dq_l}{Dt} \geq 0$$

$$L_v = h_v - h_l$$

(2) Т/д неравновесность в системе «водяной пар-капельная влага»

(а) различие температур

(б) упругость пара e меньше насыщающей $E(T)$; различие в значениях удельных потенциалов Гиббса водяного пара и капельной влаги; ненулевая «афинность испарения» (“affinity of vaporization”)

$$A_v = \zeta_l - \zeta_v$$

$$\zeta_v = const + R_v T \ln e$$

$$T \frac{Ds}{Dt} = A_v \frac{Dq_v}{Dt} \geq 0$$

$$A_v = R_v T \ln \frac{E(T)}{e} \equiv -R_v T \ln f$$

Псевдоадиабатический псевдообратимый процесс

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - \nabla\Phi \quad q = q_{sv} \approx r = r_{sv}$$

$$s \approx c_{pd} \ln T - R_d \ln p$$

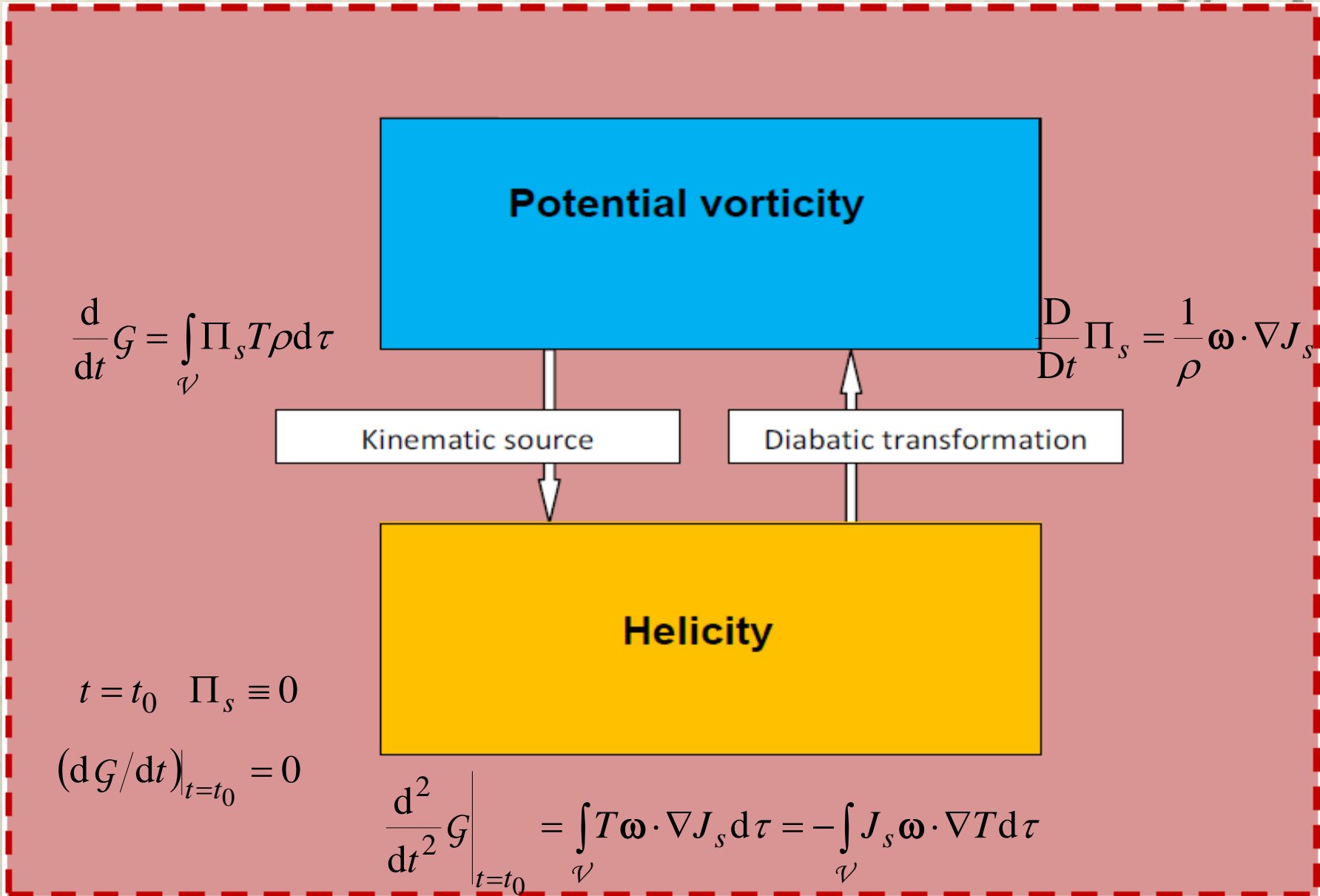
$$h \approx c_{pd} T$$

von Bezold (1888) см. также
Dufour & Van Mieghem (1975)
Ambaum (2010)

$$\frac{Ds}{Dt} \equiv J_s \approx -\frac{L}{T} \frac{Dq_l}{Dt} = -\frac{L}{T} \frac{Dq_{sv}}{Dt}$$

$$q_{sv}(T, p) \cong \frac{0.622E}{p}$$

«Спонтанное» усиление спиральности (I)



«Спонтанное» усиление спиральности (II)

Если $\mathbf{v} \cdot \nabla T < 0$

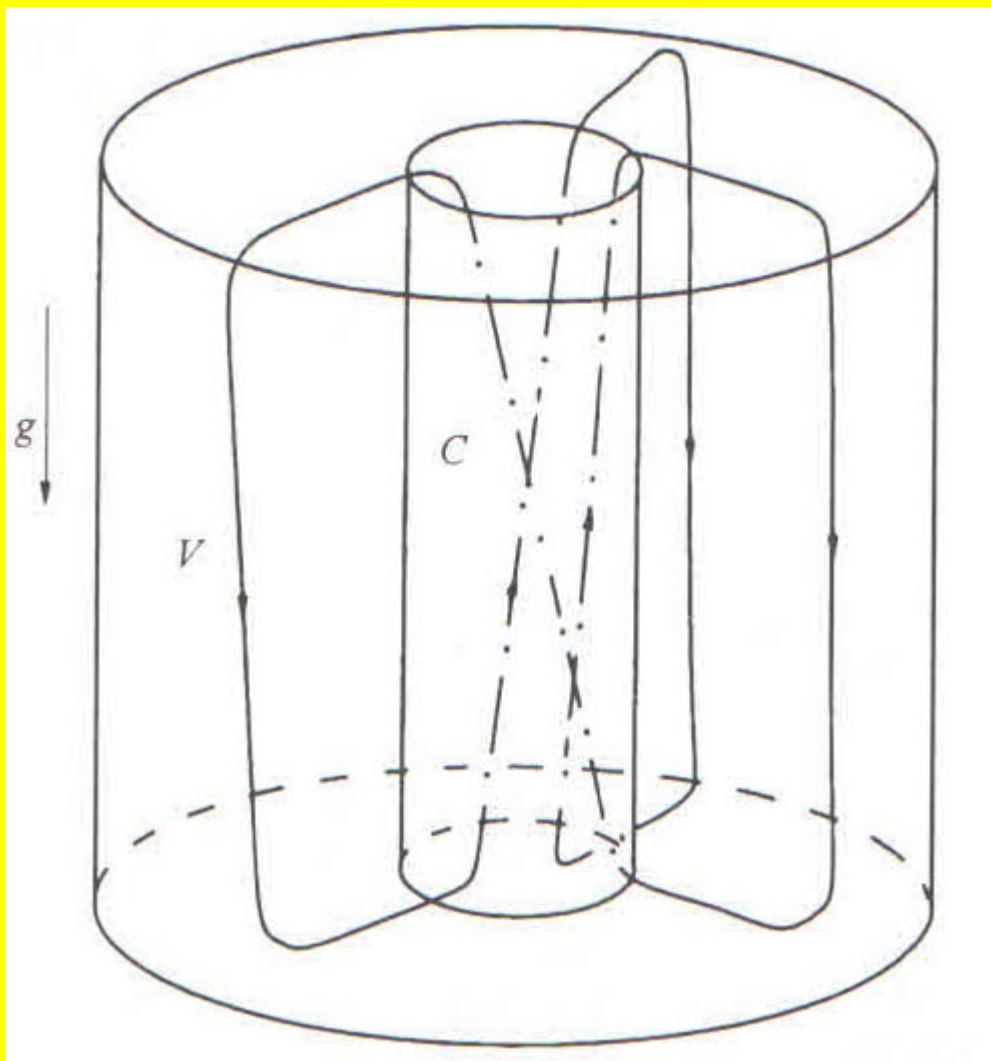
$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{G} \right|_{t=t_0} = \int_V \frac{L}{T} \frac{0.622}{p} \frac{dE}{dT} (\mathbf{v} \cdot \nabla T) (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla T) d\tau = \int_V \frac{1}{6} \frac{L}{T} \frac{0.622}{p} \frac{dE}{dT} (\nabla T)^2 \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle d\tau$$

Dufour & Van Mieghem (1975):

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dT} = \frac{1}{T} \left(\frac{6804.10}{T} - 5.07026 \right)$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathcal{G} \rangle \right|_{t=t_0} \approx \frac{1}{\tau^2} \langle \mathcal{G} \rangle \Big|_{t=t_0} \quad \tau \approx 1.1 \text{ min}$$

«Спонтанное» усиление спиральности (III)



Пример начальной (в момент времени $t=t_0$) конвективной ячейки в объеме V , которая состоит из вихревых нитей, намотанных на тор. Водяной пара конденсируется в объеме C , лежащем внутри V . Направление силы тяжести указано стрелкой (см. Курганский 1993)

«Спонтанное» усиление спиральности (IV)

$$\langle G \rangle|_{t=t_0} > 0 \quad \frac{d}{dt} \langle G \rangle|_{t=t_0} = 0 \quad \frac{d^2}{dt^2} \langle G \rangle|_{t=t_0} > 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle G \rangle|_{t=t_0} \geq G > 0 \quad \langle G \rangle_t \geq \langle G \rangle|_{t=t_0} + (1/2)G(t-t_0)^2$$

$$t - t_0 \geq \sqrt{\frac{2\varepsilon \langle G \rangle|_{t=t_0}}{G}}, \quad \varepsilon > 0$$

Ср. Обращение теорем Лагранжа и Ляпунова Н.Г. Четаевым (в честь Четаева назван астероид, пересекающий орбиту Марса). См. также Charney J.G. (1951)

$$\langle G \rangle_t \cong \langle G \rangle|_{t=t_0} \left[1 + \frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2} \right] \approx \langle G \rangle|_{t=t_0} \left[1 + 2.2 \times 10^{-4} (t-t_0)^2 \right]$$

Заключительные замечания

Для обратимых адиабатических движений ненасыщенного и/или насыщенного влажного воздуха получены два результата, принципиально отличающиеся от того, что имеет место для сухой атмосферы:

- Установившееся винтовое движение со всюду коллинеарными векторами скорости и завихренности динамически невозможно.
- «Спонтанное» усиление спиральности благодаря бароклинности и структурной неоднородности динамически и термодинамически возможно.
 - Начиная с малых начальных значений спиральность растет пропорционально четвертой степени времени. Ненулевое значение коэффициента пропорциональности объясняется различием в значениях показателя Пуассона для сухого воздуха и водяного пара, соответственно.
 - Этот механизм равно применим к влажной насыщенной (облачной) атмосфере, где за тот же промежуток времени спиральность вырастает примерно в 50 сильнее нежели в ненасыщенном влажном воздухе.

«Спонтанное» усиление спиральности наиболее эффективно при необратимых термодинамических процессах во влажной атмосфере, сопровождающихся выпадением осадков. Возникает положительная обратная связь, когда начальные значения спиральности способствуют адиабатической трансформации поля ПВ Эртеля; в свою очередь ПВ служит источником спиральности.

REFERENCES (A):

- Ambaum MHP 2010 Thermal Physics of the Atmosphere Wiley-Blackwell 239 p**
- Arakawa A 1966 Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. Two-dimensional incompressible flow. Part I J Comp Phys 1: 119-143**
- Bannon PR 2002 Theoretical foundations for models of moist convection J Atmos Sci 59: 1967-1982**
- Bannon PR 2003 Hamiltonian description of idealized binary geophysical fluids J Atmos Sci 60: 2809-2819**
- Charney JG 1951 On baroclinic instability and the maintenance of the kinetic energy of westerlies Union Geodesique et Geophysique International Neuvieme assemblee generale Bruxelles Extrait de la Publication AIM 9: 47-63**
- Dufour L, Van Mieghem J 1975 Thermodynamique de L'Atmosphere Institut Royal Meteorologique de Belgique 278 p**
- Ertel H 1942 Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz Meteorol Z. 59: 277-281**
- Ertel H 1960 Relación entre la derivada individual y una cierta divergencia espacial en Hidrodinámica Gerlands Beitr. z Geophysik 72(5): 312-314**
- [Schubert W et al English translations of twenty-one of Ertel' papers on geophysical fluid dynamics Meteorol. Z 2004]**
- Gassmann A Herzog H-J 2008 Towards a consistent numerical compressible non-hydrostatic model using generalized Hamiltonian tools Q J Roy Meteor Soc 134: 1597-1613**

REFERENCES (B):

Gibbon JD and Holm DD 2010 The dynamics of the gradient of potential vorticity
J Phys A: Math Theor 43: 172001 (8p)

Hide R 1989 Superhelicity, helicity and potential vorticity Geophys Astrophys
Fluid Dyn 48: 69-79

Hollmann GH 1964 Ein vollständiges System hydrodynamischer Erhaltungssätze
Archiv Meteorol Geophys Bioklimatol Ser A 14: 1-13

Kurgansky MV 1985 On one adiabatic atmospheric motion integral Izv Atmos
Ocean Phys 21: 994-96 (Engl Transl)

Kurgansky MV 1989 Relationship between helicity and potential vorticity in a
compressible rotating fluid Izv Atmos Ocean Phys 25: 979-81 (Engl Transl)

Kurgansky MV 1993 Generation of helicity in a moist atmosphere Izv Atmos
Ocean Phys 29: 444-48 (Engl Transl)

Kurgansky MV 2002 Adiabatic Invariants in Large-scale Atmospheric Dynamics
(London: Taylor and Francis) 222 p

Kurgansky MV, Budillon G, and Salusti E 2002 Tracers and potential vorticities in
ocean dynamics J Phys Oceanogr 32: 3562-77

Kurgansky MV 2006 Helicity production and maintenance in a baroclinic
atmosphere Meteorol Z 15: 409-16

Kurgansky MV 2013 On helical vortical motions of a moist air Izv Atmos Ocean
Phys (submitted)

REFERENCES (C):

Moffatt HK 1969 The degree of knottedness of tangled vortex lines J Fluid Mech 35: 117-29

Nambu Y 1973 Generalized Hamiltonian dynamics Phys Rev D 7: 2405-12

Névir P and Blender R 1993 A Nambu representation of incompressible hydrodynamics using helicity and enstrophy J Phys A: Math Gen 26: L1189-93

Névir P and Sommer M 2009 Energy-vorticity theory of ideal fluid mechanics J Atmos Sci 66: 2073-84

Olbers D, Willebrand J, Eden C 2012 Ocean Dynamics Springer 704 p

Schubert WH, Hausman SA, Garcia M, Ooyama KV, and Kuo HC 2001 Potential vorticity in a moist atmosphere J Atmos Sci 58: 3148–3157

Salazar R and Kurgansky MV 2010 Nambu brackets in fluid mechanics and magnetohydrodynamics J Phys A: Math Theor 43: 305501 (8 p)

Salmon R 2005 A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models Nonlinearity 18: R1-16

Salmon R 2007 A general method for conserving energy and potential enstrophy in shallow-water models J Atmos Sci 64: 515-30

Woltjer L 1958 On hydromagnetic equilibrium Proc Nat Acad Sci USA 44: 833-41

Спасибо!