

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительной математики Российской академии наук  
(ИВМ РАН)

На правах рукописи

Клюшнев Никита Викторович

**Численное исследование устойчивости поперечно-периодических  
течений жидкости и газа**

01.01.07 — «Вычислительная математика»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Нечепуренко Юрий Михайлович

Москва – 2016

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
0.1 Актуальность . . . . .	5
0.2 Цель . . . . .	8
0.3 Научная новизна . . . . .	9
0.4 Теоретическая ценность работы . . . . .	9
0.5 Практическая ценность работы . . . . .	10
0.6 Основные положения, выносимые на защиту . . . . .	11
0.7 Апробация работы . . . . .	11
0.8 Публикации . . . . .	12
0.9 Личный вклад . . . . .	12
0.10 Объем и структура работы . . . . .	13
<b>1 Постановка задачи</b> . . . . .	<b>14</b>
1.1 Основное течение и допустимые возмущения . . . . .	15
1.2 Характеристики устойчивости . . . . .	18
1.3 Определение характеристик устойчивости через элементарные возмущения . . . . .	25
1.4 Обоснование элементарных возмущений . . . . .	29
1.5 Течение в плоском канале . . . . .	35
1.6 Волны Толлмина–Шлихтинга и Сквайра . . . . .	38
1.7 Расширенная проблема Орра–Зоммерфельда . . . . .	42
1.8 Выводы . . . . .	45

<b>2</b>	<b>Методы расчета характеристик устойчивости . . . . .</b>	<b>47</b>
2.1	Слабые постановки . . . . .	47
2.2	Аппроксимация и редукция . . . . .	51
2.3	Расчет энергетического критического числа Рейнольдса . . . . .	59
2.4	Расчет линейного критического числа Рейнольдса . . . . .	61
2.5	Расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии . . . . .	64
2.6	Реализация технологии исследования устойчивости течений для вычислительных кластеров . . . . .	67
2.6.1	Тестирование реализации для кластеров . . . . .	70
2.7	Канал с гребенчатым оребрением . . . . .	73
2.8	Выводы . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Зависимость характеристик устойчивости от параметров оребрения . . . . .</b>	<b>77</b>
3.1	Параметры оребрения и профиль основного течения . . . . .	77
3.2	Гипотеза об оптимальном и критических возмущениях . . . . .	79
3.3	Зависимость критических чисел Рейнольдса от параметров оребрения . . . . .	87
3.3.1	Энергетическое критическое число Рейнольдса . . . . .	91
3.3.2	Линейное критическое число Рейнольдса . . . . .	100
3.4	Максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии . . . . .	109
3.5	Сходимость по шагу сетки . . . . .	116
3.6	Выводы . . . . .	119
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>126</b>

<b>Список таблиц</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>128</b>

# Введение

## 0.1 Актуальность

С увеличением числа Рейнольдса при превышении им критического значения, определяющего границу устойчивости к бесконечно малым возмущениям и называемого линейным критическим числом Рейнольдса, ламинарное течение заведомо теряет устойчивость, что обычно приводит к его турбулизации. Такой ламинарно-турбулентный переход называют естественным. При этом основную роль играют отдельные, усиливающиеся во времени (временная неустойчивость) либо пространстве (пространственная неустойчивость) моды или пакеты таких мод. Для сдвиговых течений в каналах и пограничных слоях эти моды проявляют себя в экспериментах в виде особых волн завихренности, обычно называемых волнами Толлмина–Шлихтинга, которые впервые были предсказаны Людвигом Прандтлем и детально изучены теоретически его учениками Вальтером Толлминым и Германом Шлихтингом.

Однако на практике ламинарно-турбулентный переход часто происходит при докритических числах Рейнольдса. Одним из основных вызывающих это факторов является возможность существенного роста кинетической энергии возмущений на конечных временных (пространственных) интервалах при докритических числах Рейнольдса [1, 2]. Нижнюю границу чисел Рейнольдса, при которых возможен рост энергии возмущений, называют энергетическим критическим числом Рейнольдса. При числе Рейнольдса, большем энергетического критического числа Рейнольдса, но меньшем линейного, максимальную

амплификацию (рост по отношению к начальному моменту времени либо начальному положению в пространстве) энергии возмущений обеспечивают так называемые оптимальные возмущения, представляющие собой суперпозиции большого числа существенно неортогональных затухающих мод. Развитие малых оптимальных возмущений приводит в результате их роста и последующего нелинейного взаимодействия к переходу основного течения в квазистационарное линейно неустойчивое состояние (полосчатая структура, см., например, [3]), в котором начинает развиваться вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу.

Одним из известных способов воспрепятствовать образованию полосчатых структур является нанесение продольных бороздок (оребрения) на обтекаемую поверхность, что обычно приводит к увеличению энергетического критического числа Рейнольдса. Однако, как считалось до недавнего времени, увеличивая энергетическое критическое число Рейнольдса и отдаляя тем самым докритический ламинарно-турбулентный переход, оребрение одновременно уменьшает линейное критическое число Рейнольдса и приближает естественный ламинарно-турбулентный переход [4, 5], что делает целесообразным использование оребрения лишь в существенно докритической (линейно устойчивой) области развития потока. Некоторые результаты подтверждающих это экспериментов с плоской пластиной и пластиной с нанесенным на нее продольным оребрением, выполненных в малотурбулентных аэродинамических трубах, приведены в таблице 0.1, где  $Tu$  означает степень турбулентности набегающего потока в процентах, а  $\varepsilon$  — отношение высоты ребер к толщине пограничного слоя. Аналогичные результаты были получены и для других конфигураций [3]: тела вращения под различными углами атаки, скользящего крыла, волнистого крыла и т.п.

В качестве пояснения заметим, что в случае высокой степени турбулентности набегающего потока ( $Tu = 0.6-3.0$ ) в случайных возмущениях пограничного слоя доминируют продольные вихри, характерные для докритического

Таблица 0.1: Экспериментальные данные о влиянии оребрения на переход к турбулентности и возмущения в пограничном слое на плоской пластине.

Источник	$Tu$	$\varepsilon$	Структура возмущений	Влияние
[6]	0.3	0.05–0.36	случайные возмущения	ускорение перехода
[7]	0.6–3.0	$\geq 0.55$	случайные возмущения	замедление перехода
[8, 9]	$< 0.04$	0.63–1.25	продольные вихри	подавление вихрей
[10]	$< 0.04$	1.15–1.35	волны Т–Ш	усиление волн

перехода, а при меньшей степени турбулентности набегающего потока — волны Толлмина–Шлихтинга. В экспериментах с контролируемым возмущением продольные вихри создают специальными методами и при малой степени турбулентности. В целом в таблице обращает на себя внимание тот факт, что оребрение замедляет развитие продольных вихрей (докритический переход) и ускоряет развитие волн Толлмина–Шлихтинга (естественный переход к турбулентности в пограничном слое).

Эксперименты по ламинарно-турбулентному переходу в малотурбулентных аэродинамических трубах чрезвычайно дорогие и трудоемкие, и их удастся выполнять лишь для небольшого набора параметров оребрения. Поэтому для более полного понимания физических механизмов и разработки новых подходов к выбору параметров оребрения (например, для решения указанной выше задачи воспрепятствовать образованию полосчатых структур) естественно обратиться к параметрическим численным исследованиям, позволяющим рассмотреть существенно более широкий диапазон параметров. Однако проведению таких исследований препятствует их огромная вычислительная сложность, если характеристики устойчивости рассчитывать традиционными методами. Поэтому до недавнего времени эти исследования также были проведены лишь для довольно ограниченного набора параметров оребрения.

За рубежом расчеты устойчивости такого типа течений активно выполняет два последних десятилетия В. Теофилис с соавторами [11, 12]. Однако, в этих исследованиях используются стандартные алгоритмы и программы, что приводит к значительным вычислительным затратам и не позволяет выполнять в полном объеме все представляющие интерес параметрические расчеты.

В 2010 году А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко была предложена новая технология численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений на базе оригинальных быстрых численных методов анализа и редукции больших дифференциально-алгебраических систем, существенно более эффективная, чем ранее известные подходы. Ее описанию и обоснование посвящены работы [13–22]. Однако первоначально эта технология была реализована лишь для персональных компьютеров, мощности которых оказалось недостаточно для проведения всех представляющих интерес параметрических расчетов, и имелись некоторые пробелы в ее обосновании. Таким образом, актуальной являлась реализация этой технологии для вычислительных кластеров, которая позволила бы вычислять характеристики устойчивости с использованием суперкомпьютеров, и ее обоснование.

Актуальным также являлось проведение на примере какого-либо течения подробного исследования зависимостей характеристик устойчивости от параметров оребрения обтекаемой поверхности в широких диапазонах этих параметров.

## **0.2 Цель**

Целью диссертационной работы является развитие и обоснование технологии численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений, предложенной А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко. Суперкомпьютерный расчет зависимостей характеристик устойчивости от параметров оребрения в широ-



ком диапазоне этих параметров на примере течения Пуазейля. Объяснение полученных зависимостей.

### **0.3 Научная новизна**

Для пространственной аппроксимации в задачах анализа устойчивости течений в каналах с волнистым оребрением впервые применен метод Галеркина-коллокаций. Обосновано применение представления Флоке для вычисления характеристик устойчивости. Рассмотрена возможность распространения технологии на случай гребенчатого оребрения.

Выполнена реализация технологии для вычислительных кластеров, позволяющая проводить суперкомпьютерные расчеты характеристик устойчивости течений в оребренных каналах в широком диапазоне параметров оребрения.

Впервые показано, что

- в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом;

- линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала, устойчивая в плоском канале при любом числе Рейнольдса;

- параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся как энергетическое, так и линейное критические числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений.

### **0.4 Теоретическая ценность работы**

До недавнего времени считалось, что оребрение, увеличивая энергетическое критическое число Рейнольдса, обязательно уменьшает линейное критическое число Рейнольдса. Полученные в работе результаты показывают, что

параметры оребрения можно выбрать так, чтобы увеличились оба критических числа Рейнольдса, и, кроме того, что возможны другие комбинации увеличения или уменьшения критических чисел Рейнольдса. Показано, что при большом периоде оребрения становится неустойчивой мода, соответствующая волне Сквайра плоского канала. Для оребренного канала численно установлена справедливость аналога теоремы Сквайра (наиболее неустойчивые моды имеют нулевое поперечное волновое число). Также показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.

## **0.5 Практическая ценность работы**

В работе установлено, что продольное оребрение может увеличивать или уменьшать оба критических числа Рейнольдса независимо друг от друга. В том числе, можно увеличить энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса, отдалив тем самым как докритический, так и естественный ламинарно-турбулентные переходы. Это, в частности, позволит прокачивать больше жидкости при сохранении ламинарности течения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Созданная реализация технологии исследования устойчивости течений для вычислительных кластеров, примененная в данной диссертационной работе к исследованию устойчивости течения Пуазейля, может быть использована для суперкомпьютерного анализа влияния оребрения на устойчивость многих других течений, таких как течение Куэтта и течение в пограничном слое.

## **0.6 Основные положения, выносимые на защиту**

1. Развита и обоснована оригинальная технология вычисления характеристик устойчивости для течений в оребренных каналах (энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации энергии возмущений). Предложена и реализована версия этой технологии для вычислительных кластеров. Выполнены параметрические расчеты характеристик устойчивости в широком диапазоне параметров оребрения для течения Пуазейля в оребренном канале.
2. Численно показана справедливость аналога теоремы Сквайра для оребренного канала. Кроме того, численно показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.
3. Получена и объяснена зависимость линейного критического числа Рейнольдса от периода оребрения, высоты и заостренности ребер. Показано, что линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала.
4. Показано, что параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся оба критических числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений.

## **0.7 Апробация работы**

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах Института вычислительной математики РАН, Национального исследовательского университета МЭИ, Института проблем меха-

ники им. А.Ю. Ишлинского РАН и на следующих конференциях: 55-я, 56-я и 57-я научные конференции МФТИ (Москва, 2012-2014); 13-я международная школа-семинар «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2013); XX Всероссийская конференция и Молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко (Новороссийск, пос. Абраудюрсо, 2014); XVII Международная конференция по методам аэрофизических исследований (Новосибирск, 2014).

## **0.8 Публикации**

Основные результаты диссертации изложены в 12 печатных работах [14, 23–33], из них 3 – в журналах, рекомендованных ВАК [23, 24, 26].

## **0.9 Личный вклад**

Диссертационное исследование является самостоятельным законченным трудом автора. Лично автором были выполнены: реализация технологии исследования устойчивости для вычислительных кластеров и параметрические расчеты характеристик устойчивости в широком диапазоне параметров оробрения. Развитие и обоснование технологии исследования устойчивости, анализ и объяснение зависимостей характеристик устойчивости течения Пуазейля от параметров оробрения были выполнены автором совместно с А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко. Случай гребенчатого оробрения был рассмотрен автором совместно с О.А. Григорьевым.

## **0.10 Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **135** страниц с **28** рисунками и **7** таблицами. Список литературы содержит **66** наименований.

# Глава 1

## Постановка задачи

В данной главе вводится основная терминология, в том числе определяются энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса и максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений, и обосновывается сведение анализа устойчивости течения Пуазейля в трехмерном канале, бесконечном в продольном и поперечном направлениях с продольным поперечно-периодическим оребрением стенок, к анализу его устойчивости к элементарным возмущениям с двумерной амплитудой, периодической в поперечном направлении с периодом, равным периоду оребрения, и расстройкой Флоке. Это позволяет существенно упростить задачи вычисления характеристик устойчивости. Кратко напоминаются известные результаты по устойчивости течения Пуазейля в плоском канале, которые мы будем использовать в дальнейшем. В том числе обсуждается теорема Сквайра и вводятся в рассмотрение волны Толлмина–Шлихтинга и Сквайра.

# 1.1 Основное течение и допустимые возмущения

Рассмотрим в декартовых координатах  $x$ ,  $y$  и  $z$  течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном по  $x$  канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -\zeta_1(z) < y < \zeta_2(z), -\infty < z < \infty\}, \quad (1.1.1)$$

постоянного сечения

$$\{(y, z) : -\zeta_1(z) < y < \zeta_2(z), -\infty < z < \infty\}, \quad (1.1.2)$$

бесконечного и периодического в направлении  $z$ , где  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — некоторые положительные периодические достаточно гладкие функции с полупериодом  $a > 0$ , задающие *оробрение* верхней и нижней стенок канала. Направления вдоль  $x$ ,  $y$  и  $z$  будем называть *продольным*, *вертикальным* и *поперечным* соответственно. Обозначим через  $\mathbf{v} = (u, v, w)^\top$  вектор скорости течения с компонентами вдоль  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а через  $p$ ,  $\nu$  и  $\rho$  — давление, коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости соответственно.

Движение жидкости определяется следующими трехмерными уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1.3)$$

с условием прилипания для  $\mathbf{v}$  на верхней и нижней стенках канала (1.1.1), где

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^\top, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одним из решений уравнений (1.1.3) является стационарное течение

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = -\tau x,$$

с заданным постоянным  $\tau > 0$ , называемое течением Пуазейля, где  $U = U(y, z)$  — профиль течения, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\tau}{\nu \rho}$$

с нулевыми граничными условиями на верхней и нижней границах сечения (1.1.2) и  $2a$ -периодичностью по  $z$ . Это течение мы далее будем называть *основным*. Нас будет интересовать влияние оребрения на устойчивость основного течения к малым возмущениям полей скорости и давления при сохранении расхода жидкости.

Для этого в качестве нормировки длины выберем среднюю полувысоту канала  $h = S/(4a)$ , где  $S$  — площадь области

$$\mathfrak{S} = \{(y, z) : -\zeta_1(z) < y < \zeta_2(z), -a < z < a\},$$

то есть одного периода сечения исходного канала (1.1.1), в качестве нормировки скорости — среднюю скорость основного течения:

$$U_{\text{ref}} = \frac{1}{S} \int_{\mathfrak{S}} U(y, z) dy dz.$$

Число Рейнольдса определим как

$$\text{Re} = \frac{U_{\text{ref}} h}{\nu}.$$

При такой нормировке в каналах с одинаковыми числами Рейнольдса через среднюю площадь сечения, приходящуюся на единицу длины по  $z$ , за единицу времени будет протекать одно и то же количество жидкости.

Нормируем скорость  $\mathbf{v}$  и профиль течения Пуазейля  $U$  на  $U_{\text{ref}}$ , пространственные координаты  $x, y, z$  на  $h$ , время  $t$  на  $h/U_{\text{ref}}$ , давление  $p$  на  $\rho U_{\text{ref}}^2$  и  $\tau$  на  $\rho U_{\text{ref}}^2/h$ . Введем также параметр  $l = a/h$  — половину безразмерного периода оребрения. В нормированных переменных, за которыми мы сохраним старые обозначения, уравнения (1.1.3) примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1.4)$$

и будут описывать движение в канале

$$\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, \\ -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -\infty < z < \infty\}, \quad (1.1.5)$$



где  $\eta_j(z) = \zeta_j(hz)/h$  — периодические функции с полупериодом  $l > 0$ . Соответствующий нормированный профиль течения Пуазейля не будет зависеть от числа Рейнольдса, и для его вычисления достаточно решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -1 \quad (1.1.6)$$

в области

$$\Sigma = \{(y, z) : -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -l < z < l\} \quad (1.1.7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} U(-\eta_1(z), z) &= U(\eta_2(z), z) = 0, \\ U(y, -l) &= U(y, l), \quad \frac{\partial U}{\partial z}(y, -l) = \frac{\partial U}{\partial z}(y, l), \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

и нормировать полученное решение на его среднее значение.

В качестве начальных возмущений основного течения мы будем рассматривать бездивергентные достаточно гладкие возмущения, удовлетворяющие условию прилипания на верхней и нижней стенках канала, периодические по  $x$  с произвольным полупериодом  $X > 0$  и периодические по  $z$  с полупериодом  $Z > 0$ , кратным полупериоду  $l$  основного течения. Такие начальные возмущения мы будем называть *допустимыми*.

Для вывода *уравнений эволюции возмущений* запишем произвольное решение системы (1.1.4), близкое к течению Пуазейля, в виде

$$\mathbf{v} = (U, 0, 0)^\top + \mathbf{v}', \quad p = -\tau x + p', \quad (1.1.9)$$

где  $\mathbf{v}' = (u', v', w')^\top$ . Подставляя (1.1.9) в (1.1.4) и учитывая, что в нормированных переменных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\tau \text{Re},$$

после несложных упрощений получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + J \mathbf{v}' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}' - \nabla p', \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (1.1.10)$$

где

$$J = - \begin{bmatrix} U\partial/\partial x & \partial U/\partial y & \partial U/\partial z \\ 0 & U\partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & U\partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Наряду с (1.1.10) мы будем использовать *линеаризованные уравнения эволюции возмущений*

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = J\mathbf{v}' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta \mathbf{v}' - \nabla p', \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (1.1.11)$$

полученные из (1.1.10) отбрасыванием нелинейного члена.

Уравнения (1.1.10) и (1.1.11) достаточно рассматривать на одном периоде начального возмущения, то есть в области

$$\begin{aligned} \Omega' = \{ & (x, y, z) : -X < x < X, \\ & -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -Z < z < Z\}, \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

где  $Z = \kappa l$ , а  $X$  и  $\kappa$  — заданные положительное и положительное целое числа, с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, -\eta_1(z), z, t) &= \mathbf{v}'(x, \eta_2(z), z, t) = 0, \\ \mathbf{v}'(-X, y, z, t) &= \mathbf{v}'(X, y, z, t), \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x}(-X, y, z, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x}(X, y, z, t), \\ \mathbf{v}'(x, y, -Z, t) &= \mathbf{v}'(x, y, Z, t), \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z}(x, y, -Z, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z}(x, y, Z, t). \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

## 1.2 Характеристики устойчивости

Обозначим через

$$\langle f \rangle = \lim_{X \rightarrow \infty} \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{8XZ} \int_{-Z}^Z \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \int_{-X}^X f(x, y, z) dx dy dz$$

среднее значение функции  $f$ , заданной в области (1.1.5) (средняя полувысота этой области равна единице). Величину

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle$$

будем называть *средней плотностью кинетической энергии* возмущения  $\mathbf{v}'$ . Для возмущения, периодического по  $x$  и  $z$  с полупериодами соответственно  $X > 0$  и  $Z > 0$  имеем

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{16XZ} \int_{-Z}^Z \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \int_{-X}^X \mathbf{v}'(x, y, z) \cdot \mathbf{v}'(x, y, z) dx dy dz.$$

Средняя плотность кинетической энергии такого возмущения, удовлетворяющего уравнениям (1.1.10) либо (1.1.11) в области (1.1.12) и граничным условиям (1.1.13), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{v}')}{\partial t} = \langle J\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle + \frac{1}{\text{Re}} \langle \Delta \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle, \quad (1.2.1)$$

называемому *уравнением Рейнольдса–Орра* [1].

Уравнение Рейнольдса–Орра для полных уравнений эволюции возмущений (1.1.10) можно вывести, умножив (в смысле внутреннего произведения векторов) первое уравнение на  $\mathbf{v}'$ , осреднив полученное равенство по области (1.1.12) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям с учетом граничных условий (1.1.13) и вторым уравнением в (1.1.10) (уравнением неразрывности). Действительно, после умножения первого уравнения в (1.1.10) на  $\mathbf{v}'$  и осреднения по области (1.1.12) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \cdot \mathbf{v}' \right\rangle &= -\langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle + \langle J\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \langle \Delta \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle - \langle \nabla p' \cdot \mathbf{v}' \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Левая часть этого равенства совпадает с левой частью уравнения Рейнольдса–Орра:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \cdot \mathbf{v}' \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{v}')}{\partial t}.$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий первое и последнее слагаемые правой части этого равенства, нетрудно убедиться, что каждое из них равно нулю в силу уравнения неразрывности:

$$-\langle \nabla p' \cdot \mathbf{v}' \rangle = \langle p' \nabla \cdot \mathbf{v}' \rangle = 0,$$

$$-\langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle = -\frac{1}{2} \langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}') \rangle = -\frac{1}{2} \langle (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}') (\nabla \cdot \mathbf{v}') \rangle = 0.$$

То есть правая часть равенства (1.2.2) совпадает с правой частью уравнения Рейнольдса–Орра. Тот же результат очевидно получим и для линеаризованных уравнений эволюции возмущений (1.1.11).

Говорят, что основное течение *монотонно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого допустимого при  $t = 0$  возмущения монотонно убывает при  $t \rightarrow \infty$ , и *линейно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого достаточно малого допустимого при  $t = 0$  возмущения стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Монотонная устойчивость предполагает линейную. При малых числах Рейнольдса в правой части уравнения Рейнольдса–Орра доминирует второе слагаемое, которое в силу отрицательной определенности оператора Лапласа обеспечивает монотонную устойчивость. С увеличением числа Рейнольдса основное течение сначала теряет монотонную устойчивость, затем, как правило, линейную. Точные нижние грани чисел Рейнольдса, при которых основное течение не является монотонно устойчивым и линейно устойчивым, называют *энергетическими* и *линейными критическими числами Рейнольдса* соответственно. Мы далее будем обозначать их через  $Re_E$  и  $Re_L$  соответственно. Интерес также представляют возмущения, на которых достигаются критические числа Рейнольдса. Конструктивные определения таких возмущений, называемых *критическими*, мы дадим в следующем разделе.

Следует отметить, что некоторые сдвиговые течения, например, плоское течение Куэтта и течение Пуазейля в круглой трубе, не теряют линейную устойчивость при любом числе Рейнольдса, то есть для них  $Re_L = \infty$ . При

этом монотонную устойчивость такие течения сохраняют лишь до некоторого сравнительно небольшого числа Рейнольдса. Например, для упомянутых выше течений  $Re_E = 20.7$  [34] и  $81.49$  [35] соответственно в нормировках, используемых в цитируемых работах. Для рассматриваемого течения Пуазейля в оребренном канале  $Re_L < \infty$  и  $Re_E \ll Re_L$  при всех рассматриваемых оребрениях.

Поскольку величина  $\partial\mathcal{E}/\partial t$  в соответствии с уравнением Рейнольдса–Орра (1.2.1) не зависит от нелинейной части уравнений эволюции возмущений, энергетические критические числа Рейнольдса для полных (1.1.10) и линеаризованных (1.1.11) уравнений эволюции возмущений совпадают. Линейные критические числа Рейнольдса для полных и линеаризованных уравнений эволюции возмущений также совпадают, что можно показать по аналогии с доказательством, предложенным в [36] для ограниченной области с условием прилипания на всей границе.

В силу уравнения (1.2.1) энергетическое критическое число Рейнольдса

$$Re_E = \inf_{X,Z} Re_E(X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2.3)$$

где  $Re_E(X, Z)$  — это точная нижняя грань таких значений  $Re$ , при которых величина

$$\langle J\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{Re} \langle \Delta\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle$$

положительная при каком-либо ненулевом допустимом возмущении  $\tilde{\mathbf{v}}$  с полу-периодами  $X$  и  $Z$ . Учитывая, что оператор  $\Delta$  в области (1.1.12) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x, -\eta_1(z), z) &= \tilde{\mathbf{v}}(x, \eta_2(z), z) = 0, \\ \tilde{\mathbf{v}}(-X, y, z) &= \tilde{\mathbf{v}}(X, y, Z), \quad \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial x}(-X, y, z) = \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial x}(X, y, z), \\ \tilde{\mathbf{v}}(x, y, -Z) &= \tilde{\mathbf{v}}(x, y, Z), \quad \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial z}(x, y, -Z) = \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial z}(x, y, Z), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

является отрицательно определенным, можно показать, что

$$\frac{1}{Re_E(X, Z)} = \sup \frac{\langle J\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{-\langle \Delta\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle}, \quad (1.2.5)$$

где супремум берется по всем ненулевым допустимым возмущениям  $\tilde{\mathbf{v}}$  с полупериодами  $X$  и  $Z$ . Отметим, что правая часть в (1.2.5) заведомо неотрицательная, поскольку  $J\tilde{\mathbf{v}} = 0$ , например, при  $\tilde{\mathbf{v}} = (U, 0, 0)^\top$ , являющемся допустимым возмущением.

Уравнениями Эйлера для задачи максимизации (1.2.5) является (см. [37]) следующая эрмитова проблема собственных значений

$$\frac{1}{2}(J + J^*)\tilde{\mathbf{v}} + \mu\Delta\tilde{\mathbf{v}} - \nabla\tilde{p} = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.2.6)$$

рассматриваемая в области (1.1.12) с граничными условиями (1.2.4), где  $\tilde{p}$  — множитель Лагранжа, связанный с ограничением  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$ , а  $J^*$  означает оператор, сопряженный оператору  $J$ :  $\langle J\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle \equiv \langle \mathbf{a} \cdot J^*\mathbf{b} \rangle$ . Таким образом,  $\text{Re}_E(X, Z)$  является величиной, обратной максимальному собственному значению проблемы (1.2.6).

Величину линейного критического числа Рейнольдса можно найти как

$$\text{Re}_L = \inf_{X, Z} \text{Re}_L(X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2.7)$$

где  $\text{Re}_L(X, Z)$  — это такое минимальное положительное значение  $\text{Re}$ , при котором спектр проблемы собственных значений

$$\lambda\tilde{\mathbf{v}} = J\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\tilde{\mathbf{v}} - \nabla\tilde{p}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.2.8)$$

рассматриваемой в области (1.1.12) с граничными условиями (1.2.4), имеет непустое пересечение с мнимой осью.

Среди решений системы (1.1.11) выделяют решения вида

$$\mathbf{v}'(t) = \tilde{\mathbf{v}} \exp\{\lambda t\}, \quad p'(t) = \tilde{p} \exp\{\lambda t\}, \quad (1.2.9)$$

где  $\lambda$  — собственное значение проблемы (1.2.8),  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})^\top$  — отвечающая ему собственная функция. Эти решения называют *модами* системы (1.1.11). Спектр проблемы (1.2.8) состоит из вещественных собственных значений и взаимно сопряженных пар комплексных собственных значений. В случае, когда  $\lambda$

является комплексным числом, физический смысл имеют не сами моды, а их действительные и мнимые части, которые очевидно также удовлетворяют системе уравнений (1.1.11). Следует отметить, что в механике вместо собственного значения  $\lambda$  чаще используют комплексную частоту  $\omega = i\lambda$ . Если величина  $\text{Real}(\lambda) = \text{Imag}(\omega)$  меньше нуля, равна нулю либо больше нуля, то говорят, что мода (1.2.9) соответственно устойчивая, нейтрально устойчивая либо неустойчивая. Средняя плотность кинетической энергии вещественной (мнимой) части устойчивой моды экспоненциально убывает, нейтрально устойчивой — остается ограниченной, а неустойчивой — экспоненциально возрастает при  $t \rightarrow \infty$ . При  $\text{Re} < \text{Re}_L(X, Z)$  все моды устойчивые. При  $\text{Re} = \text{Re}_L(X, Z)$  существует хотя бы одна нейтрально устойчивая мода. При  $\text{Re} > \text{Re}_L(X, Z)$  могут существовать нейтрально устойчивые и неустойчивые моды, но не обязательно. Может оказаться, что при некотором достаточно большом числе Рейнольдса все моды опять станут устойчивыми.

С увеличением числа Рейнольдса при превышении им критического значения  $\text{Re}_L$ , определяющего границу устойчивости к бесконечно малым возмущениям, ламинарное течение заведомо теряет устойчивость, что, как правило, приводит к его турбулизации. При этом основную роль играют неустойчивые моды. Однако из-за наличия в реальных течениях малых конечных возмущений ламинарно-турбулентный переход на практике часто происходит при докритических числах Рейнольдса (докритические сценарии перехода). Одним из основных факторов, вызывающих докритический ламинарно-турбулентный переход, является возможность существенного роста энергии возмущения на конечных временных интервалах. Этот рост обеспечивают возмущения, представляющие собой суперпозиции большого числа существенно неортогональных устойчивых мод. Развитие такого малого возмущения может привести к переходу основного течения в квазистационарное линейно неустойчивое состояние, в котором начинает развиваться вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу.

Максимально возможный при данном числе Рейнольдса  $Re < Re_L$  «подскок»

$$\Gamma_{\max}(Re) = \sup \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(t))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(0))} \quad (1.2.10)$$

средней плотности кинетической энергии возмущения, где супремум берется по всем допустимым ненулевым начальным возмущениям и всем  $t > 0$ , называют *максимальной амплификацией средней плотности кинетической энергии возмущений*. Начальное возмущение  $\mathbf{v}'(0)$ , при котором достигается  $\Gamma_{\max}(Re)$ , называют *оптимальным возмущением*.

Задача определения максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений в рамках полных уравнений эволюции возмущений представляет значительную сложность, и в настоящее время не известно каких-либо алгоритмов ее решения. Однако для моделирования и анализа докритических сценариев ламинарно-турбулентного перехода достаточно рассматривать возмущения, оптимальные в рамках линеаризованных уравнений [38, 39]. Поэтому мы ограничимся вычислением максимальной амплификации и соответствующих оптимальных возмущений для линеаризованных уравнений. Поскольку для линеаризованных уравнений максимальная амплификация не зависит от величины первоначального возмущения, мы будем в (1.2.10) для определенности полагать  $\mathcal{E}(\mathbf{v}'(0)) = 1$ .

Таким образом, далее,

$$\Gamma_{\max}(Re) = \sup_{X,Z} \Gamma_{\max}(Re; X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2.11)$$

где  $\Gamma_{\max}(Re; X, Z)$  — это максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений для уравнений (1.1.11), рассматриваемых в области (1.1.12) с граничными условиями (1.1.13). Поскольку  $\Gamma_{\max}(Re) = 1$  при  $Re \leq Re_E$ , максимальную амплификацию имеет смысл вычислять при  $Re_E < Re < Re_L$ .



## 1.3 Определение характеристик устойчивости через элементарные возмущения

Рассмотрим решение системы (1.1.11) вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \mathbf{v}''(y, z, t) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z)\}, \\ p'(x, y, z, t) &= p''(y, z, t) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z)\}, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр (продольное волновое число),  $\mathbf{v}''(y, z, t)$ ,  $p''(y, z, t)$  — функции, периодические по  $z$  с полупериодом  $l$ , а  $\beta \in [0, \pi/l)$  — параметр расстройки Флоке. Такие решения мы далее будем называть *элементарными возмущениями*. Величину

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{v}'} \rangle = \frac{1}{8l} \int_{\Sigma} \mathbf{v}''(y, z) \cdot \overline{\mathbf{v}''(y, z)} dy dz = \mathcal{E}(\mathbf{v}''), \quad (1.3.2)$$

где  $\Sigma$  означает область (1.1.7), будем называть средней плотностью кинетической энергии элементарного возмущения (1.3.1) и амплитуды его скорости  $\mathbf{v}''$ .

Отметим, что элементарные возмущения вида (1.3.1) являются, вообще говоря, комплексными и самостоятельный физический смысл имеют их действительные и мнимые части, которые, очевидно, также удовлетворяют системе (1.1.11). Рассмотрим, например, действительную часть возмущения (1.3.1). Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{Real } u' &= |u''| \cos(\varphi_u + \alpha x + \beta z), \\ \text{Real } v' &= |v''| \cos(\varphi_v + \alpha x + \beta z), \\ \text{Real } w' &= |w''| \cos(\varphi_w + \alpha x + \beta z), \\ \text{Real } p' &= |p''| \cos(\varphi_p + \alpha x + \beta z), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где  $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w$  и  $\varphi_p$  — фазы компонент  $u'', v'', w''$  вектора  $\mathbf{v}''$  и фаза  $p''$  соответственно, то есть вещественные функции  $y, z$  и  $t$ , такие, что  $f'' = |f''| \exp\{\mathbf{i}\varphi_f\}$ . Фазы определены неоднозначно, и их выбирают из соображений удобства физической интерпретации. Представление (1.3.3) показывает, что компоненты

скорости и давление действительной части элементарного возмущения вида (1.3.1) в общем случае являются волнами, испытывающими при фиксированном  $t$  гармонические колебания по  $x$  с, вообще говоря, различными амплитудами и фазами в различных точках сечения канала. Применяя лемму 1.4.3 (см. раздел 1.4), несложно показать, что средняя плотность кинетической энергии  $\mathcal{E}(\text{Real}\mathbf{v}')$  действительной части  $\text{Real}\mathbf{v}' = (\mathbf{v}' + \overline{\mathbf{v}'})/2$  возмущения (1.3.1) равна  $\mathcal{E}(\mathbf{v}'')/2$ , если  $\alpha \neq 0$  либо  $\alpha = 0$ , но  $\beta \neq 0$  и  $\pi/(2l)$ . В остальных случаях она равна  $\mathcal{E}(\mathbf{v}'' + \overline{\mathbf{v}''}e)/4$ , где  $e = 1$ , если  $\alpha = \beta = 0$ , и  $e = \exp(i\pi z/l)$ , если  $\alpha = 0$  и  $\beta = \pi/(2l)$ .

Подставляя (1.3.1) в (1.1.11), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} = J_\alpha \mathbf{v}'' + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' + G_{\alpha\beta} p'', \quad F_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' = 0, \quad (1.3.4)$$

где

$$J_\alpha = - \begin{bmatrix} i\alpha U & \partial U / \partial y & \partial U / \partial z \\ 0 & i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha U \end{bmatrix}, \quad G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -\partial / \partial y \\ -\partial / \partial z - i\beta \end{bmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta} = [i\alpha, \partial / \partial y, \partial / \partial z + i\beta], \quad L_{\alpha\beta} = -\alpha^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 + 2i\beta \partial / \partial z - \beta^2.$$

Уравнения (1.3.4), которые мы далее будем называть (*линеаризованными*) *уравнениями эволюции элементарных возмущений*, рассматриваются в области  $\Sigma$ , определенной в (1.1.7), с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}''(-\eta_1(z), z, t) = \mathbf{v}''(\eta_2(z), z, t) = 0, \\ \mathbf{v}''(y, -l, t) = \mathbf{v}''(y, l, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial z}(y, -l, t) = \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial z}(y, l, t). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Определим критические числа Рейнольдса  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  и  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  соответственно как точные нижние грани таких положительных  $\text{Re}$ , при которых существуют решения системы уравнений (1.3.4) в области  $\Sigma$  с граничными условиями (1.3.5), средняя плотность кинетической энергии (1.3.2) которых не стремится к нулю строго монотонно и просто не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Через  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re})$  обозначим максимальную амплификацию средней плотности кинетической

энергии решений этой системы. Нетрудно показать по аналогии с определением характеристик устойчивости системы (1.1.11) через проблемы собственных значений (1.2.6) и (1.2.8), что  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  — это величина, обратная максимальному собственному значению эрмитовой проблемы собственных значений

$$\frac{1}{2}(J_\alpha + J_\alpha^*)\tilde{\mathbf{v}} + \mu L_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{v}} + G_{\alpha\beta}\tilde{p} = 0, \quad F_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.3.6)$$

рассматриваемой в области (1.1.7) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(-\eta_1(z), z) = \tilde{\mathbf{v}}(\eta_2(z), z) = 0, \\ \tilde{\mathbf{v}}(y, -l) = \tilde{\mathbf{v}}(y, l), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial z}(y, -l) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial z}(y, l), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

где  $J^*$  означает оператор, сопряженный  $J$ :  $\langle J\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}} \rangle \equiv \langle \mathbf{a} \cdot \overline{J^*\mathbf{b}} \rangle$ , а  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  означает такое минимальное  $\text{Re}$ , при котором спектр проблемы собственных значений

$$\lambda\tilde{\mathbf{v}} = J_\alpha\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\text{Re}}L_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{v}} + G_{\alpha\beta}\tilde{p}, \quad F_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.3.8)$$

рассматриваемой в области (1.1.7) с граничными условиями (1.3.7), имеет непустое пересечение с мнимой осью.

Нижеследующая теорема, доказательство которой будет дано в разделе 1.4, утверждает, что глобальные характеристики устойчивости, определенные в предыдущем разделе, достигаются на элементарных возмущениях.

**Теорема 1.3.1.** *Для глобальных характеристик устойчивости (1.2.3), (1.2.7) и (1.2.11) справедливы следующие равенства:*

$$\text{Re}_E = \inf_{\alpha, \beta} \text{Re}_E^{\alpha\beta}, \quad \text{Re}_L = \inf_{\alpha, \beta} \text{Re}_L^{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\max}(\text{Re}) = \sup_{\alpha, \beta} \Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re}), \quad (1.3.9)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\beta \in [0, \pi/l)$ . Более того, в общем случае достаточно ограничиться неотрицательными  $\alpha$  и указанными значениями  $\beta$ , а если орбитание и, следовательно, профиль основного течения являются четными функциями по  $z$ , то достаточно ограничиться  $\alpha \geq 0$  и  $\beta \in [0, \pi/(2l)]$ .

Наряду с самими глобальными характеристиками устойчивости  $\text{Re}_E$ ,  $\text{Re}_L$  и  $\Gamma_{\max}(\text{Re})$ , интерес также представляют значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых они достигаются. Эти пары параметров мы далее будем обозначать соответственно через  $\alpha_E$ ,  $\beta_E$ ,  $\alpha_L$ ,  $\beta_L$  и  $\alpha_{\max}$ ,  $\beta_{\max}$ .

Интерес также представляют элементарные возмущения, на которых достигаются глобальные характеристики устойчивости. Возмущение вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z) &= \tilde{\mathbf{v}}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z)\}, \\ p'(x, y, z) &= \tilde{p}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z)\}, \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

амплитуда которого является собственным вектором проблемы (1.3.6) с  $\alpha = \alpha_E$  и  $\beta = \beta_E$ , отвечающим ее максимальному собственному значению, либо собственным вектором проблемы (1.3.8) с  $\alpha = \alpha_L$ ,  $\beta = \beta_L$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L$ , отвечающим ее собственному значению с максимальной вещественной частью, будем называть *критическим*. В последнем случае критическое возмущение является значением при  $t = 0$  нейтрально устойчивой моды вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{v}}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z) + \lambda t\}, \\ p'(x, y, z, t) &= \tilde{p}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z) + \lambda t\}, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

исходной системы (1.1.11).

Возмущение вида (1.3.10), на котором достигается  $\Gamma_{\max}(\text{Re})$ , будем называть оптимальным. На амплитуде оптимального возмущения достигается максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии решений системы (1.3.4) с  $\alpha = \alpha_{\max}$  и  $\beta = \beta_{\max}$ .

Отметим, что система (1.3.4) допускает существенное упрощение в случае  $\beta = 0$  и четного по  $z$  орбрения, то есть когда функции  $\eta_1(z)$  и  $\eta_2(z)$  являются четными. Учитывая, что в этом случае профиль основного течения  $U$  также является четной функцией, можно показать, что если пара  $\mathbf{v}'' = (u'', v'', w'')$ ,  $p''$  является решением системы (1.3.4), то пары

$$\mathbf{v}'' = (u''_+, v''_+, w''_-), p'' = p''_+ \quad \text{и} \quad \mathbf{v}'' = (u''_-, v''_-, w''_+), p'' = p''_-,$$

где  $f_{\pm}(y, z, t) = (f(y, z, t) \pm f(y, -z, t))/2$ , также будут являться решениями этой системы. Поэтому решение системы (1.3.4) можно сводить к отдельному поиску решений, обладающих указанными выше симметриями, которые мы будем в дальнейшем обозначать  $I$  и  $II$  соответственно.

## 1.4 Обоснование элементарных возмущений

Докажем теорему 1.3.1, обосновывающую выбор (1.3.1) в качестве элементарных возмущений. Для этого нам потребуется следующий результат.

**Лемма 1.4.1.** Пусть достаточно гладкая функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $\Omega$  — область (1.1.5), является  $2X$ -периодической по  $x$  и  $2Z$ -периодической по  $z$ , где  $X > 0$ ,  $Z = \varkappa l$ , а  $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда существуют и единственны такие  $2l$ -периодические по  $z$  функции

$$f_{jk} : \{(y, z) : -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -\infty < z < \infty\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (1.4.1)$$

что

$$f(x, y, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_{jk}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\}, \quad (1.4.2)$$

где  $\alpha_j = \pi j/X$ ,  $\beta_k = \pi k/Z$ . Причем,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4XZ} \int_{-Z}^Z \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \int_{-X}^X |f(x, y, z)|^2 dx dy dz = \\ & = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \left( \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} |f_{jk}(y, z)|^2 dy dz \right). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

**Доказательство.** Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f\left(x, \frac{\eta_2(z) - \eta_1(z) + r(\eta_1(z) + \eta_2(z))}{2}, z\right) = \\ &= g(x, r, z), \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

где

$$r = \frac{2y + \eta_1(z) - \eta_2(z)}{\eta_1(z) + \eta_2(z)},$$

и рассмотрим функцию  $g(x, r, z)$ . Эта функция задана в области

$$\{(x, r, z) : -\infty < x < \infty, -1 < r < 1, -\infty < z < \infty\},$$

является  $2X$ -периодической по  $x$ ,  $2Z$ -периодической по  $z$ , и ее сужение на период принадлежит пространству интегрируемых с квадратом комплекснозначных функций. Следовательно, она представима в виде ряда Фурье:

$$g(x, r, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{jm}(r) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_m z)\}.$$

Этот ряд можно записать в виде

$$\begin{aligned} g(x, r, z) &= \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \left( \sum_{k' \in \mathbb{Z}} g_{j, k+\varkappa k'}(r) \exp\{\mathbf{i}\beta_{\varkappa k'} z\} \right) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\} = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_{jk}(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\}, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

где

$$f_{jk}(y, z) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} g_{j, k+\varkappa k'} \left( \frac{2y + \eta_1(z) - \eta_2(z)}{\eta_1(z) + \eta_2(z)} \right) \exp\{\mathbf{i}\beta_{\varkappa k'} z\}$$

являются  $2l$ -периодическими функциями по  $z$ . Из (1.4.4) и (1.4.5) получаем (1.4.2).

Для доказательства единственности функций (1.4.1), дающих разложение (1.4.2), достаточно показать, что если функция  $f$  нулевая, то и все функции (1.4.1) также нулевые. Это непосредственно следует из равенства (1.4.3). Докажем это равенство.

Очевидно, достаточно показать, что интеграл

$$\int_{-Z}^Z \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \int_{-X}^X f_{jk}(y, z) \overline{f_{j'k'}(y, z)} \exp\{\mathbf{i}(\alpha_{j-j'} x + \beta_{k-k'} z)\} dx dy dz \quad (1.4.6)$$

равен нулю, если  $0 < |k - k'| \leq \varkappa - 1$  или  $j \neq j'$ . В этом нетрудно убедиться, записав этот интеграл в виде

$$\int_{-Z}^Z \int_{-X}^X h(z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_{j-j'}x + \beta_{k-k'}z)\} dx dz, \quad (1.4.7)$$

где

$$h(z) = \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} f_{jk}(y, z) \overline{f_{j'k'}(y, z)} dy,$$

и подставив в (1.4.7) вместо  $2l$ -периодической по  $z$  функции  $h(z)$  ее разложение в ряд Фурье по  $z$ .  $\square$

Разложение (1.4.2) называют *представлением Флоке* функции  $f$ . В силу леммы 1.4.1 для достаточно гладких решений системы (1.1.11) в области (1.1.12), где  $Z = \varkappa l$  и  $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ , с граничными условиями (1.1.13) справедливо и однозначно представление Флоке

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \begin{pmatrix} \mathbf{v}''_{jk}(y, z, t) \\ p''_{jk}(y, z, t) \end{pmatrix} \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\}, \quad (1.4.8)$$

где  $\alpha_j = \pi j / X$ ,  $\beta_k = \pi k / Z$ , а  $\mathbf{v}''_{jk}$  и  $p''_{jk}$  — функции, удовлетворяющие уравнениям (1.3.4) с  $\alpha = \alpha_j$ ,  $\beta = \beta_k$  в области  $\Sigma$  с граничными условиями (1.3.5).

При этом

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}'_{jk}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}''_{jk}), \quad (1.4.9)$$

где  $\mathbf{v}'_{jk}(x, y, z, t) = \mathbf{v}''_{jk}(y, z, t) \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\}$  — скоростные части элементарных возмущений, входящих в разложение (1.4.8).

Из леммы 1.4.1 также следует, что если  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})^\top$  — собственная функция проблемы (1.2.8), отвечающая ее собственному значению  $\lambda_*$ , и

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) \\ \tilde{p}(x, y, z) \end{pmatrix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{jk}(y, z) \\ \tilde{p}_{jk}(y, z) \end{pmatrix} \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\}$$

является ее представлением Флоке, то  $(\tilde{\mathbf{v}}_{jk}, \tilde{p}_{jk})^\top$  — собственная функция проблемы (1.3.8) с  $\alpha = \alpha_j$  и  $\beta = \beta_k$ , отвечающая ее собственному значению  $\lambda_*$ . Учитывая, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{jk}(y, z) \\ \tilde{p}_{jk}(y, z) \end{pmatrix} \exp\{\mathbf{i}(\alpha_j x + \beta_k z)\},$$

где  $(\tilde{\mathbf{v}}_{jk}, \tilde{p}_{jk})^\top$  — собственная функция проблемы (1.3.8), является собственной функцией проблемы (1.2.8), отвечающей тому же собственному значению, можно заключить, что множество собственных значений проблемы (1.2.8) является объединением множеств собственных значений проблем (1.3.8) с

$$\alpha \in \{\pi j/X : j \in \mathbb{Z}\}, \quad \beta \in \{\pi k/Z : k = 0, \dots, \varkappa - 1\}. \quad (1.4.10)$$

Точно так же, проблема (1.2.6) сводится к проблемам (1.3.6) с  $\alpha$  и  $\beta$ , определенными в (1.4.10).

**Лемма 1.4.2.** *При любых  $X > 0$  и  $Z = \varkappa l$ , где  $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ , справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_E(X, Z) &= \inf_{\alpha, \beta} \operatorname{Re}_E^{\alpha\beta}, & \operatorname{Re}_L(X, Z) &= \inf_{\alpha, \beta} \operatorname{Re}_L^{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\max}(\operatorname{Re}; X, Z) &= \sup_{\alpha, \beta} \Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\operatorname{Re}) \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

с  $\alpha$  и  $\beta$ , определенными в (1.4.10).

*Доказательство.* Два первых равенства в (1.4.11) следуют из эквивалентности проблем (1.2.6) и (1.2.8) соответственно проблемам (1.3.6) и (1.3.8) с  $\alpha$  и  $\beta$ , определенными в (1.4.10). Третье равенство следует из (1.4.9) и неравенства

$$\left( \sum_j b_j \right)^{-1} \sum_j a_j \leq \max_j \frac{a_j}{b_j}, \quad (1.4.12)$$

справедливого, в силу неравенства Гельдера, для любого конечного либо счетного набора пар  $(a_j, b_j)$  положительных чисел, и того факта, что равенство в (1.4.12) достигается лишь в случае, когда все величины  $a_j/b_j$  одинаковые.



Действительно, покажем прежде всего, что переход к комплексным решениям не меняет  $\Gamma_{\max}(\text{Re}; X, Z)$ , а действительные и мнимые части комплексного оптимального возмущения сами являются оптимальными возмущениями. Пусть  $\mathbf{v}'(0)$  является комплексным оптимальным возмущением, то есть начальным значением, при котором достигается максимальная амплификация  $\Gamma_{\max}(\text{Re}; X, Z)$  средней плотности кинетической энергии  $\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \langle \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{v}'} \rangle / 2$  комплексных решений уравнений (1.1.11), рассматриваемых в области (1.1.12) с граничными условиями (1.1.13), и  $\mathbf{v}'(t)$  — соответствующее решение этой системы, а  $t_{\text{opt}}$  — время достижения максимума. Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(0))} &= \frac{\mathcal{E}(\text{Realv}'(t_{\text{opt}})) + \mathcal{E}(\text{Imagv}'(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\text{Realv}'(0)) + \mathcal{E}(\text{Imagv}'(0))} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{\mathcal{E}(\text{Realv}'(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\text{Realv}'(0))}, \frac{\mathcal{E}(\text{Imagv}'(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\text{Imagv}'(0))} \right\}, \end{aligned}$$

максимальная амплификация для комплексных решений не превосходит максимальную амплификацию для вещественных решений. Но она не может быть меньше нее, поскольку множество комплексных решений включает в себя и вещественные решения. Таким образом, максимальные амплификации для комплексных и вещественных решений совпадают.

Обозначим через  $\mathbf{v}'_{jk}(x, y, z, t)$  скоростные части элементарных возмущений, входящих в разложение  $\mathbf{v}'(t)$  в ряд (1.4.8) по элементарным возмущениям. Тогда, в силу равенства (1.4.9) и неравенства (1.4.12), имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\max}(\text{Re}; X, Z) &= \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(0))} = \\ &= \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}'_{jk}(0)) \right)^{-1} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}'_{jk}(t_{\text{opt}})) \right) = \\ &= \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}''_{jk}(0)) \right)^{-1} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \mathcal{E}(\mathbf{v}''_{jk}(t_{\text{opt}})) \right) \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}''_{jk}(t_{\text{opt}}))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}''_{jk}(0))} : j, k \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq \varkappa - 1 \right\} \leq \sup_{\alpha, \beta} \Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re}) \end{aligned}$$

с  $\alpha$  и  $\beta$ , определенными в (1.4.10). Таким образом, максимальная амплификация для решений уравнений (1.1.11), рассматриваемых в области (1.1.12) с граничными условиями (1.1.13), не превосходит максимальную амплификацию для элементарных возмущений с  $\alpha$  и  $\beta$ , определенными в (1.4.10). Но она не может быть меньше нее, поскольку множество таких решений включает в себя и эти элементарные возмущения. Третье равенство в (1.4.11) доказано.  $\square$

Из леммы 1.4.2 непосредственно следует, что для глобальных характеристик устойчивости (1.2.3), (1.2.7) и (1.2.11) справедливы равенства (1.3.9), где  $\alpha \in \mathbb{R}$ , а  $\beta \in [0, \pi/l)$  и  $\beta l/\pi$  — рациональное число. Причем, поскольку  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$ ,  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  и  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re})$  при  $\beta \neq 0$  непрерывно зависят от  $\beta$ , требование рациональности  $\beta l/\pi$  можно снять.

Решения систем (1.3.4) с  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$  и  $\alpha = -\alpha_0$ ,  $\beta = -\beta_0$  взаимно сопряженные. Кроме того, если пара  $\mathbf{v}'' = \mathbf{v}$ ,  $p'' = p$  является решением системы (1.3.4) с  $\beta = \beta_0$ , то пара  $\mathbf{v}'' = \mathbf{v}\bar{e}$ ,  $p'' = p\bar{e}$ , где  $e = \exp(i\pi z/l)$ , является решением этой системы с тем же  $\alpha$  и  $\beta = \beta_0 + \pi/l$ . Поскольку комплексное сопряжение и умножение на  $\bar{e}$  не меняют среднюю плотность кинетической энергии (1.3.2), достаточно ограничить область значений параметров неотрицательными  $\alpha$  и  $\beta \in [0, \pi/l)$ .

Более того, если оребрение и, следовательно, профиль основного течения являются четными функциями по  $z$  и пара  $\mathbf{v}'' = (u, v, w)$ ,  $p'' = p$  является решением системы (1.3.4) с  $\beta = \beta_0$ , то

$$\mathbf{v}''(y, z, t) = (u(y, -z, t), v(y, -z, t), -w(y, -z, t))^T, \quad p'' = p(y, -z, t),$$

является решением этой системы с  $\beta = -\beta_0$ . Это преобразование также не меняет среднюю плотность кинетической энергии. Следовательно, в случае четного по  $z$  оребрения достаточно рассматривать только неотрицательные значения  $\alpha$  и  $\beta \in [0, \pi/(2l)]$ .

Теорема 1.3.1 доказана.

В заключение отметим следующее полезное утверждение, которое несложно доказать тем же способом, что и равенство нулю интеграла (1.4.6).

**Лемма 1.4.3.** Пусть  $f(x, y, z) = g(y, z) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \beta z)\}$ , где функция

$$g : \{(y, z) : -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -\infty < z < \infty\} \rightarrow \mathbb{C}$$

является достаточно гладкой и  $2l$ -периодической по  $z$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные числа, такие, что  $0 < |\beta| < \pi/l$  или  $\alpha \neq 0$ . Тогда  $\langle f \rangle = 0$ .

## 1.5 Течение в плоском канале

Если канал плоский, то есть  $\eta_1(z) = \eta_2(z) = 1$ , то профиль основного течения не зависит от  $z$  и в качестве допустимых возмущений обычно выбирают возмущения периодические по  $x$  и  $z$  с произвольными периодами. Соответствующие глобальные характеристики устойчивости

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Re}}_E &= \inf_{X,Z} \text{Re}_E(X, Z), \quad \widetilde{\text{Re}}_L = \inf_{X,Z} \text{Re}_L(X, Z), \\ \widetilde{\Gamma}_{\max}(\text{Re}) &= \sup_{X,Z} \Gamma_{\max}(\text{Re}; X, Z), \quad X > 0, \quad Z > 0, \end{aligned}$$

можно найти, рассматривая в качестве элементарных возмущения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \mathbf{v}'''(y, t) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z)\}, \\ p'(x, y, z, t) &= p'''(y, t) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z)\}, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

с амплитудами скорости  $\mathbf{v}'''$  и давления  $p'''$ , не зависящими от  $z$  и удовлетворяющими системе

$$\frac{\partial \mathbf{v}'''}{\partial t} = J_\alpha \mathbf{v}''' + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\gamma} \mathbf{v}''' + G_{\alpha\gamma} p''', \quad F_{\alpha\gamma} \mathbf{v}''' = 0, \tag{1.5.2}$$

с граничными условиями  $\mathbf{v}'''(\pm 1, t) = 0$ , где

$$J_\alpha = - \begin{bmatrix} \mathbf{i}\alpha U & \partial U / \partial y & 0 \\ 0 & \mathbf{i}\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i}\alpha U \end{bmatrix}, \quad G_{\alpha\gamma} = \begin{bmatrix} -\mathbf{i}\alpha \\ -\partial / \partial y \\ -\mathbf{i}\gamma \end{bmatrix},$$

$$F_{\alpha\gamma} = [\mathbf{i}\alpha, \partial/\partial y, \mathbf{i}\gamma], \quad L_{\alpha\gamma} = -\alpha^2 + \partial^2/\partial y^2 - \gamma^2,$$

а  $\alpha$  и  $\gamma$  — вещественные параметры (продольное и поперечное волновые числа соответственно). При этом, в силу тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 1.3.1, очевидно достаточно ограничиться неотрицательными  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Если в качестве допустимых возмущений для плоского течения Пуазейля выбрать возмущения, периодические по  $x$  с произвольными периодами и периодические по  $z$  с полупериодами, кратными фиксированному  $l > 0$ , то соответствующие глобальные характеристики устойчивости  $\text{Re}_E$ ,  $\text{Re}_L$  и  $\Gamma_{\max}(\text{Re})$  в силу теоремы 1.3.1 можно найти, рассматривая в качестве элементарных возмущения вида (1.3.1) с  $2l$ -периодическими амплитудами. При этом, в силу четности по  $z$  «плоского оребрения», достаточно ограничиться неотрицательными  $\alpha$  и  $\beta \in [0, \pi/(2l)]$ . Поскольку этот класс допустимых возмущений очевидно уже, чем класс возмущений, периодических по  $x$  и  $z$  с произвольными периодами, то

$$\widetilde{\text{Re}}_E \leq \text{Re}_E, \quad \widetilde{\text{Re}}_L \leq \text{Re}_L, \quad \widetilde{\Gamma}_{\max}(\text{Re}) \geq \Gamma_{\max}(\text{Re}).$$

С другой стороны, каждое возмущение вида (1.5.1) представимо в виде (1.3.1) с  $2l$ -периодическими по  $z$  амплитудами

$$\mathbf{v}''(y, z, t) = \mathbf{v}'''(y, t) \exp\left\{\frac{\mathbf{i}\pi j}{l}z\right\}, \quad p''(y, z, t) = p'''(y, t) \exp\left\{\frac{\mathbf{i}\pi j}{l}z\right\}$$

и

$$\beta = \gamma - \frac{\pi j}{l},$$

где  $j$  — произвольное целое число, и, следовательно, если какая-нибудь из трех глобальных характеристик устойчивости достигается на возмущении вида (1.5.1), то она достигается и на возмущении вида (1.3.1), где

$$\beta = \frac{\pi}{l} \times \begin{cases} \delta, & 0 \leq \delta \leq 1/2, \\ 1 - \delta, & 1/2 \leq \delta < 1, \end{cases} \quad (1.5.3)$$

а  $\delta$  означает дробную часть числа  $\gamma l/\pi$ . Таким образом,

$$\widetilde{\text{Re}}_E = \text{Re}_E, \quad \widetilde{\text{Re}}_L = \text{Re}_L, \quad \widetilde{\Gamma}_{\max}(\text{Re}) = \Gamma_{\max}(\text{Re}).$$

Отметим, что характеристики устойчивости плоского течения Пуазуиля, найденные при фиксированных значениях параметров для возмущений вида (1.3.1) и (1.5.1), связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Re}_E^{\alpha\beta} = \inf_{\gamma} \widetilde{\text{Re}}_E^{\alpha\gamma}, \quad \text{Re}_L^{\alpha\beta} = \inf_{\gamma} \widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma}, \quad \Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re}) = \sup_{\gamma} \widetilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re}), \\ \gamma = \beta + \pi j/l, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Критическое возмущение, отвечающее глобальному энергетическому критическому числу Рейнольдса, в случае плоского канала имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z) &= \tilde{\mathbf{v}}'(y) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z)\}, \\ p'(x, y, z) &= \tilde{p}'(y) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z)\}, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

где амплитуда является собственным вектором, отвечающим максимальному собственному значению эрмитовой проблемы, аналогичной проблеме (1.3.6), но сформулированной для системы (1.5.2) вместо (1.3.4), с критическими значениями волновых чисел  $\alpha = \alpha_E$  и  $\gamma = \gamma_E$ , на которых достигается минимум  $\widetilde{\text{Re}}_E^{\alpha\gamma}$ . Критическое возмущение, отвечающее глобальному линейному критическому числу Рейнольдса, имеет вид (1.5.5), где амплитуда является собственным вектором, отвечающим собственному значению с максимальной вещественной частью проблемы, аналогичной проблеме (1.3.8), но сформулированной для системы (1.5.2) вместо (1.3.4), с  $\text{Re} = \widetilde{\text{Re}}_L$  и критическими значениями волновых чисел  $\alpha = \alpha_L$  и  $\gamma = \gamma_L$ , на которых достигается минимум  $\widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma}$ . Наконец, оптимальное возмущение для плоского канала имеет вид (1.5.5) с амплитудой, на которой достигается максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии решений системы (1.5.2) с волновыми числами  $\alpha = \alpha_{\max}$  и  $\gamma = \gamma_{\max}$ , на которых, в свою очередь, достигается максимум  $\widetilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re})$ .

## 1.6 Волны Толлмина–Шлихтинга и Сквайра

Вычисление линейного критического числа Рейнольдса для плоского течения Пуазейля на основе элементарных возмущений (1.5.1) приводит к проблеме собственных значений, аналогичной проблеме (1.3.8), но сформулированной для системы (1.5.2) вместо (1.3.4). Эта проблема собственных значений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \lambda \tilde{u}' &= -\mathbf{i}\alpha U \tilde{u}' - \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{v}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \gamma^2 \right) \tilde{u}' - \mathbf{i}\alpha \tilde{p}', \\
 \lambda \tilde{v}' &= -\mathbf{i}\alpha U \tilde{v}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \gamma^2 \right) \tilde{v}' - \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial y}, \\
 \lambda \tilde{w}' &= -\mathbf{i}\alpha U \tilde{w}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \gamma^2 \right) \tilde{w}' - \mathbf{i}\gamma \tilde{p}', \\
 &\quad \mathbf{i}\alpha \tilde{u}' + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial y} + \mathbf{i}\gamma \tilde{w}' = 0,
 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}'(\pm 1) = \tilde{v}'(\pm 1) = \tilde{w}'(\pm 1) = 0. \tag{1.6.2}$$

Решения системы (1.6.1) имеют вид (1.5.5) и дают для системы (1.1.11) моды вида

$$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}'(y) \\ \tilde{v}'(y) \\ \tilde{w}'(y) \end{bmatrix} \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z) + \lambda t\}, \tag{1.6.3}$$

$$p'(x, y, z, t) = \tilde{p}'(y) \exp\{\mathbf{i}(\alpha x + \gamma z) + \lambda t\}.$$

Вводя обозначения  $\hat{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ ,  $\hat{\text{Re}} = \alpha \text{Re} / \hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda} = \hat{\alpha} \lambda / \alpha$  и дополнительные переменные  $\hat{u} = (\alpha \tilde{u}' + \gamma \tilde{w}') / \hat{\alpha}$  и  $\hat{p} = \hat{\alpha} \tilde{p}' / \alpha$ , проблему собственных значений (1.6.1) можно записать в виде системы следующих семи уравнений:

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda} \hat{u} &= -\mathbf{i}\hat{\alpha} U \hat{u} - \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{v}' + \frac{1}{\hat{\text{Re}}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2 \right) \hat{u} - \mathbf{i}\hat{\alpha} \hat{p}, \\
 \hat{\lambda} \tilde{v}' &= -\mathbf{i}\hat{\alpha} U \tilde{v}' + \frac{1}{\hat{\text{Re}}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2 \right) \tilde{v}' - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}, \\
 &\quad \mathbf{i}\hat{\alpha} \hat{u} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial y} = 0,
 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}\tilde{w}' &= -\mathbf{i}\hat{\alpha}U\tilde{w}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2 \right) \tilde{w}' - \mathbf{i}\gamma\hat{p}, \\ \tilde{u}' &= (\hat{\alpha}\hat{u} - \gamma\tilde{w}')/\alpha, \quad \tilde{p}' = \alpha\hat{p}/\hat{\alpha}, \quad \lambda = \alpha\hat{\lambda}/\hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Уравнения (1.6.4) представляют собой проблему собственных значений, независимую от уравнений (1.6.5). Поэтому множество решений системы (1.6.4), (1.6.5) и, следовательно, системы (1.6.1) можно разбить на два непересекающихся подмножества. Каждое решение из первого подмножества соответствует собственному значению  $\hat{\lambda}$  и собственной функции  $(\hat{u}, \tilde{v}', \hat{p})^\top \neq 0$  проблемы (1.6.4). Найдя такое решение проблемы (1.6.4), из первого уравнения в (1.6.5) можно найти  $\tilde{w}'$ , а из второго, третьего и четвертого уравнений —  $\tilde{u}'$ ,  $\tilde{p}'$  и  $\lambda$ . Полученные таким образом решения системы (1.6.1) дают для системы (1.1.11) решения вида (1.6.3), которые мы будем называть волнами Толлмина–Шлихтинга.

Каждое решение из второго подмножества соответствует тривиальному решению  $\hat{u} = \tilde{v}' = \hat{p} = 0$  проблемы (1.6.4). При этом  $\tilde{p}' = 0$ ,  $\tilde{u}' = -\gamma\tilde{w}'/\alpha$ , а  $\lambda$  и  $\tilde{w}'$  являются соответственно собственным значением и собственной функцией проблемы собственных значений

$$\lambda\tilde{w}' = -\mathbf{i}\alpha U\tilde{w}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \gamma^2 \right) \tilde{w}'. \quad (1.6.6)$$

Соответствующие решения вида (1.6.3) системы (1.1.11) мы будем называть волнами Сквайра.

Учитывая, что собственные значения проблемы (1.6.6) при любых  $\alpha$ ,  $\gamma$  и конечном числе Рейнольдса лежат строго в левой полуплоскости, линейная устойчивость плоского течения Пуазейля при заданном числе Рейнольдса зависит от устойчивости волн Толлмина–Шлихтинга, которая, в свою очередь, зависит от максимальной вещественной части собственных значений проблемы (1.6.4).

При  $\gamma = 0$  проблема собственных значений (1.6.4) имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda \tilde{u}' &= -\mathbf{i}\alpha U \tilde{u}' - \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{v}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \tilde{u}' - \mathbf{i}\alpha \tilde{p}', \\ \lambda \tilde{v}' &= -\mathbf{i}\alpha U \tilde{v}' + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v}' - \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial y}, \\ \mathbf{i}\alpha \tilde{u}' + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (1.6.7)$$

и называется проблемой Орра–Зоммерфельда. Обозначим через  $\text{Re}^{\text{OS}}(\alpha)$  линейное критическое число Рейнольдса проблемы Орра–Зоммерфельда, то есть такое минимальное положительное  $\text{Re}$ , при котором множество собственных значений этой проблемы имеет непустое пересечение с мнимой осью. Через  $\widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma}$ , как и раньше, будем обозначать линейное критическое число Рейнольдса плоского течения Пуазейля при фиксированных  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Сравнивая проблемы собственных значений (1.6.4) и (1.6.7), нетрудно видеть, что

$$\widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\alpha} \text{Re}^{\text{OS}}(\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}) \quad (1.6.8)$$

и, следовательно, во-первых,

$$\inf_{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0} \widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma} \leq \inf_{\alpha \geq 0} \widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha 0} = \inf_{\alpha \geq 0} \text{Re}^{\text{OS}}(\alpha),$$

во-вторых,

$$\inf_{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0} \widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma} \geq \inf_{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0} \text{Re}^{\text{OS}}(\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}) = \inf_{\alpha \geq 0} \text{Re}^{\text{OS}}(\alpha).$$

Таким образом, для плоского течения Пуазейля глобальное линейное критическое число Рейнольдса

$$\text{Re}_L = \inf_{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0} \widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma}$$

достигается при  $\gamma = 0$  и равно минимальному критическому числу Рейнольдса

$$\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{OS}} = \inf_{\alpha \geq 0} \text{Re}^{\text{OS}}(\alpha)$$



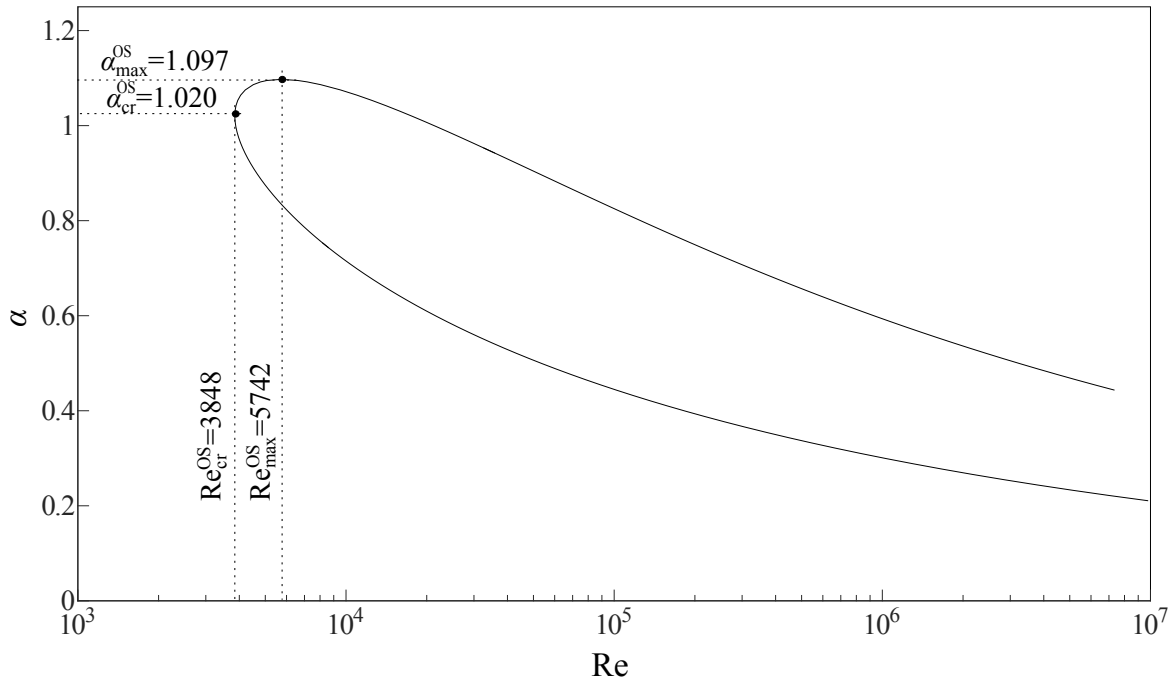


Рисунок 1.1: Нейтральная кривая проблемы Орра–Зоммерфельда.

проблемы Орра–Зоммерфельда. Это утверждение называют *теоремой Сквайра* [34].

Проблема Орра–Зоммерфельда (1.6.7) в настоящее время тщательно изучена теоретически и численно (см., например, [1, 34, 40]). В частности, рассчитана с очень высокой точностью нейтральная кривая, изображенная на рис. 1.1. Область внутри нейтральной кривой — это область неустойчивости, то есть для каждой точки  $(\text{Re}_0, \alpha_0)$  из этой области при числе Рейнольдса  $\text{Re}_0$  существует неустойчивая мода вида (1.6.3) с  $\alpha = \alpha_0$  и  $\gamma = 0$ . Левая ветвь нейтральной кривой — это множество точек

$$\{(\text{Re}^{\text{OS}}(\alpha), \alpha) : 0 < \alpha \leq \alpha_{\text{max}}^{\text{OS}}\}.$$

Область неустойчивости проблемы Орра–Зоммерфельда ограничена сверху значением  $\alpha = \alpha_{\text{max}}^{\text{OS}}$ . Это означает, что  $\text{Re}^{\text{OS}}(\alpha) = \infty$  при  $\alpha > \alpha_{\text{max}}^{\text{OS}}$  и, следовательно, в силу (1.6.8),

$$\widetilde{\text{Re}}_L^{\alpha\gamma} = \infty, \quad \gamma > \alpha_{\text{max}}^{\text{OS}}, \quad (1.6.9)$$

то есть моды вида (1.6.3) с  $\gamma > \alpha_{\max}^{\text{OS}}$  являются устойчивыми при любом числе Рейнольдса.

Проблему Орра–Зоммерфельда (1.6.7) можно свести к одному уравнению 4-й степени, удобному для теоретического исследования и называемому уравнением Орра–Зоммерфельда:

$$E(y)\varphi = 0, \quad (1.6.10)$$

где

$$E(y) = \left[ \frac{\mathbf{i}}{\alpha \text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) + U - c \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

с граничными условиями  $\varphi(\pm 1) = \partial\varphi/\partial y(\pm 1) = 0$ , где  $c = \mathbf{i}\lambda/\alpha$ . При этом  $\tilde{u}' = \partial\varphi/\partial y$  и  $\tilde{v}' = -\mathbf{i}\alpha\varphi$ .

## 1.7 Расширенная проблема Орра–Зоммерфельда

В разделе 3.2 будет показано, что для течения Пуазейля в оребренном канале справедливо утверждение, аналогичное теореме Сквайра, а именно: линейное критическое число Рейнольдса достигается при  $\beta = 0$ .

Вычисление линейного критического числа Рейнольдса при  $\beta = 0$  сводится к проблеме собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda\tilde{u} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{u} - \frac{\partial U}{\partial y}\tilde{v} - \frac{\partial U}{\partial z}\tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{u} - \mathbf{i}\alpha\tilde{p}, \\ \lambda\tilde{v} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{v} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v} - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}, \\ \lambda\tilde{w} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{w} - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}, \\ &\quad \mathbf{i}\alpha\tilde{u} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

рассматриваемой в области (1.1.7) с граничными условиями (1.3.7). Эту проблему мы будем называть расширенной проблемой Орра–Зоммерфельда. Каж-

дое ее нетривиальное решение дает моду вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{v}}(y, z) \exp\{\mathbf{i}\alpha x + \lambda t\}, \\ p'(x, y, z, t) &= \tilde{p}(y, z) \exp\{\mathbf{i}\alpha x + \lambda t\}, \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

системы (1.1.11).

В случае плоского канала ( $\eta_1(z) = \eta_2(z) = 1$ ) решение проблемы собственных значений (1.7.1) можно искать в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(y, z) \\ \tilde{v}(y, z) \\ \tilde{w}(y, z) \\ \tilde{p}(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}'(y) \\ \tilde{v}'(y) \\ \tilde{w}'(y) \\ \tilde{p}'(y) \end{bmatrix} \exp(\mathbf{i}\gamma z), \quad (1.7.3)$$

где в силу условия периодичности  $\gamma = \pi j/l$ , а  $j$  — неотрицательное целое. Подставляя (1.7.3) в (1.7.1), для  $\lambda$  и независящих от  $z$  амплитуд мы получим проблему собственных значений (1.6.1) с граничными условиями (1.6.2).

Учитывая непрерывную зависимость собственных значений проблемы (1.7.1) от функций  $\eta_1(z)$  и  $\eta_2(z)$ , главная часть спектра проблемы (1.7.1) при  $\eta_1(z) \approx 1$  и  $\eta_2(z) \approx 1$  будет близка к главной части спектра проблемы (1.7.1) с  $\eta_1(z) = \eta_2(z) = 1$ . Более того, можно ожидать и близость соответствующих инвариантных подпространств, отвечающих группе изолированных собственных значений. В случае плоского канала самая неустойчивая мода является волной Толлмина–Шлихтинга с  $\gamma = 0$ . Поэтому волны Сквайра и волны Толлмина–Шлихтинга с  $\gamma > 0$  при определении линейного критического числа Рейнольдса можно игнорировать. Однако может оказаться, что мода (1.7.2), сходящаяся при  $\eta_1(z) \rightarrow 1$  и  $\eta_2(z) \rightarrow 1$  к волне Толлмина–Шлихтинга с  $\gamma = 0$  и максимальным  $\text{Re}\lambda$ , не является самой неустойчивой модой в оребренном канале и ведущую роль играют моды, сходящиеся к волнам Толлмина–Шлихтинга с  $\gamma > 0$  и даже волнам Сквайра.

Как и система (1.3.4) при  $\beta = 0$ , проблема собственных значений (1.7.1) допускает существенное упрощение в случае четного по  $z$  оребрения, то есть

когда функции  $\eta_1(z)$  и  $\eta_2(z)$  являются четными. В этом случае решение проблемы (1.7.1) можно сводить к отдельному поиску решений, обладающих симметриями  $I$  и  $II$ , определенными в разделе 1.3. Для плоского канала такие решения имеют вид

$$I) \begin{bmatrix} \tilde{u}(y, z) \\ \tilde{v}(y, z) \\ \tilde{w}(y, z) \\ \tilde{p}(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}'(y) \cos(\gamma z) \\ \tilde{v}'(y) \cos(\gamma z) \\ \mathbf{i}\tilde{w}'(y) \sin(\gamma z) \\ \tilde{p}'(y) \cos(\gamma z) \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

и

$$II) \begin{bmatrix} \tilde{u}(y, z) \\ \tilde{v}(y, z) \\ \tilde{w}(y, z) \\ \tilde{p}(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\tilde{u}'(y) \sin(\gamma z) \\ \mathbf{i}\tilde{v}'(y) \sin(\gamma z) \\ \tilde{w}'(y) \cos(\gamma z) \\ \mathbf{i}\tilde{p}'(y) \sin(\gamma z) \end{bmatrix}, \quad (1.7.5)$$

с теми же  $\tilde{u}'$ ,  $\tilde{v}'$ ,  $\tilde{w}'$  и  $\tilde{p}'$ , что и в (1.7.3), то есть являющимися решением проблемы собственных значений (1.6.1) с граничными условиями (1.6.2). Моды (1.7.2) с амплитудами (1.7.4) и (1.7.5), отвечающие волнам Толлмина–Шлихтинга, мы далее будем обозначать соответственно через  $ITS(\gamma)$  и  $IITS(\gamma)$ , а отвечающие волнам Сквайра — через  $IS(\gamma)$  и  $IIS(\gamma)$ . При  $\gamma = 0$  возможны лишь нетривиальные моды типа  $ITS(0)$  и  $IIS(0)$ . При каждом  $\gamma > 0$  одному и тому же нетривиальному решению проблемы (1.6.1) будут соответствовать нетривиальные моды обеих симметрий.

Отметим, что расширенную проблему Орра–Зоммерфельда (1.7.1) иногда сводят к системе двух уравнений 4-й степени, например, в [41] это делается для прямоугольного канала с условиями прилипания на всех стенках:

$$E(y, z)\tilde{v} = Q(y, z)\tilde{w}, \quad E(z, y)\tilde{w} = Q(z, y)\tilde{v}, \quad (1.7.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 E(y, z) &= - \left[ \frac{\mathbf{i}}{\alpha \text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) + U - c \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\
 Q(y, z) &= \left[ \frac{\mathbf{i}}{\alpha \text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) + U - c \right] \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \\
 &\quad + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad c = \frac{\mathbf{i} \lambda}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

В случае оребренного канала эту систему нужно рассматривать в области (1.1.7) с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(-\eta_1(z), z) = \tilde{v}(\eta_2(z), z) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(-\eta_1(z), z) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(\eta_2(z), z) &= 0, \\
 \tilde{w}(-\eta_1(z), z) = \tilde{w}(\eta_2(z), z) &= 0, \\
 \tilde{v}(y, -l) = \tilde{v}(y, l), \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}(y, -l) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}(y, l), \\
 \tilde{w}(y, -l) = \tilde{w}(y, l), \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}(y, -l) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}(y, l).
 \end{aligned}$$

Уменьшение числа уравнений за счет увеличения их степени бывает удобно для теоретических исследований. Однако с вычислительной точки зрения это, как правило, усложняет задачу. Поэтому даже для вычисления линейного критического числа Рейнольдса мы будем использовать исходные уравнения (1.7.1).

## 1.8 Выводы

В этой главе поставлена задача исследования временной устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале постоянного сечения, бесконечном в продольном и поперечном направлениях, с поперечно-периодическими продольно оребренными стенками. Даны определения характеристик устойчивости, предложены методы их вычисления. Исследование устойчивости основного течения сведено к исследованию его устойчивости к элементарным возмущениям с использованием представления Флоке, это сведение обосновано.

Кратко приводятся известные результаты по устойчивости течения Пуазейля в плоском канале, в частности, описаны волны Толлмина–Шлихтинга и Сквайра, сформулирована теорема Сквайра и приведено ее доказательство.

## Глава 2

# Методы расчета характеристик устойчивости

В этой главе описана пространственная аппроксимация в области  $\Sigma$ , определенной в (1.1.7), уравнения (1.1.6) с граничными условиями (1.1.8) и системы (1.3.4) с граничными условиями (1.3.5). Аппроксимация выполняется методом Галеркина-коллокаций, с использованием слабых постановок этих задач, выведенных по аналогии с работами [37, 42, 43]. Кроме того, описаны оригинальные алгоритмы расчета критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений на основе полученной после пространственной аппроксимации системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

### 2.1 Слабые постановки

Обозначим через  $\mathcal{L}_2$  пространство комплекснозначных интегрируемых с квадратом функций, определенных в  $\Sigma$ , а через  $\mathcal{H}^1$  — пространство Соболева функций из  $\mathcal{L}_2$ , чьи первые обобщенные производные также лежат в  $\mathcal{L}_2$ . Это

гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(f, g) = \int_{\Sigma} f \bar{g} d\Sigma, \quad (f, g)_{\mathcal{H}^1} = (f, g) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

соответственно. Введем также следующие пространства:

$$\mathcal{H}_0^1 = \{f \in \mathcal{H}^1 : f(-\eta_1(z), z) = f(\eta_2(z), z) = 0, f(y, -l) = f(y, l)\}$$

со скалярным произведением пространства  $\mathcal{H}^1$ ,

$$\mathcal{H}_0^1 = \{\mathbf{f} = (f_u, f_v, f_w)^\top : f_u, f_v, f_w \in \mathcal{H}_0^1\}$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathcal{H}_0^1} = (f_u, g_u)_{\mathcal{H}^1} + (f_v, g_v)_{\mathcal{H}^1} + (f_w, g_w)_{\mathcal{H}^1},$$

и

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathcal{L}_2 : \int_{\Sigma} q d\Sigma = 0\}$$

со скалярным произведением пространства  $\mathcal{L}_2$ .

Умножим (1.1.6) на  $g \in \mathcal{H}_0^1$  и проинтегрируем по  $\Sigma$ , используя формулу интегрирования по частям и учитывая граничные условия. Получим слабую постановку задачи (1.1.6), (1.1.8), которую можно сформулировать следующим образом: найти  $U \in \mathcal{H}_0^1$ , удовлетворяющую

$$a(U, g) = (1, g) \quad \text{для всех } g \in \mathcal{H}_0^1, \quad (2.1.1)$$

где

$$a(f, g) = \left( \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z} \right). \quad (2.1.2)$$

Поскольку  $(1, g)$  — линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{H}_0^1$ , а билинейная форма  $a(f, g)$  непрерывна и коэрцитивна на  $\mathcal{H}_0^1$ , то в силу теоремы Лакса–Мильграма [44] существует единственная функция  $U \in \mathcal{H}_0^1$ , удовлетворяющая (2.1.1).



Отметим, что непрерывность билинейной формы (2.1.2) непосредственно следует из неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} a(f, g) &\leq \left( \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{1/2} + \left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}_0^1} \|g\|_{\mathcal{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Покажем, что эта билинейная форма коэрцитивна на  $\mathcal{H}_0^1$ , то есть

$$c \|f\|_{\mathcal{H}_0^1}^2 \leq a(f, f) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{H}_0^1,$$

где  $c$  — некоторая константа. Для любой точки  $(y, z) \in \Sigma$  и любой бесконечно-дифференцируемой функции  $f \in \mathcal{H}_0^1$  верно

$$\begin{aligned} |f(y, z)| &= \left| \int_{-\eta_1(z)}^y \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} d\xi \right| \leq \int_{-\eta_1(z)}^y \left| \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \leq \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \left| \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \leq \\ &\leq \left( \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \left| \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} d\xi \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( C \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \left| \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $C = \max_z(\eta_1(z) + \eta_2(z))$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \int_{-l}^l \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} |f(y, z)|^2 dy dz \leq \int_{-l}^l \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} C \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \left| \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi dy dz \leq \\ &\leq C^2 a(f, f) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{1 + C^2} \|f\|_{\mathcal{H}_0^1}^2 \leq a(f, f).$$

Так как множество бесконечно-дифференцируемых функций плотно в  $\mathcal{H}_0^1$ , то отсюда следует, что билинейная форма  $a(f, g)$  коэрцитивна на  $\mathcal{H}_0^1$ .

Рассмотрим теперь систему (1.3.4). Зафиксируем некоторый момент времени  $T$ . Для банахового пространства  $\mathcal{B}$  с нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  через  $\mathcal{L}^r(0, T; \mathcal{B})$  будем обозначать пространство сильно измеримых отображений  $\phi: [0, T] \rightarrow \mathcal{B}$ , таких, что

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{B})} = \left( \int_0^T \|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad r = 2;$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{B})} = \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|\phi\|_{\mathcal{B}} < \infty, \quad r = \infty.$$

Также нам понадобится пространство

$$\mathcal{H} = \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{L}_2 : F_{\alpha\beta} \boldsymbol{\xi} = 0, \boldsymbol{\xi}(-\eta_1(z), z) = \boldsymbol{\xi}(\eta_2(z), z) = 0, \\ \boldsymbol{\xi}(y, -l) = \boldsymbol{\xi}(y, l) \},$$

где  $F_{\alpha\beta}$  — оператор, входящий в (1.3.4),

$$\mathcal{L}_2 = \{ \mathbf{f} = (f_u, f_v, f_w)^\top : f_u, f_v, f_w \in \mathcal{L}_2 \}$$

означает пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (f_u, g_u) + (f_v, g_v) + (f_w, g_w),$$

а равенство нулю  $F_{\alpha\beta} \boldsymbol{\xi}$  понимается в слабом смысле.

Умножим первое уравнение системы (1.3.4) на  $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_0^1$ , а второе — на  $q \in \mathcal{Q}$  и проинтегрируем по  $\Sigma$ , используя, где это необходимо, формулу интегрирования по частям и учитывая граничные условия. Получим слабую постановку задачи (1.3.4), (1.3.5), которую можно сформулировать следующим образом: для заданного  $\mathbf{v}_0'' \in \mathcal{H}$  найти  $\mathbf{v}'' \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$  и  $p'' \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{Q})$ , такие, что  $\mathbf{v}''(0; y, z) = \mathbf{v}_0''$  и при  $t > 0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t}, \mathbf{f} \right) &= J_\alpha(\mathbf{v}'', \mathbf{f}) + L_{\alpha\beta}(\mathbf{v}'', \mathbf{f}) + \\ &+ G_{\alpha\beta}(p'', \mathbf{f}) \text{ для всех } \mathbf{f} \in \mathcal{H}_0^1, \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{v}'', q) &= 0 \text{ для всех } q \in \mathcal{Q}, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

где используются следующие билинейные формы:

$$J_{\alpha}(\mathbf{v}'', \mathbf{f}) = -\mathbf{i}\alpha(Uu'', f_u) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}v'', f_u\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial z}w'', f_u\right) - \\ - \mathbf{i}\alpha(Uv'', f_v) - \mathbf{i}\alpha(Uw'', f_w),$$

$$L_{\alpha\beta}(\mathbf{v}'', \mathbf{f}) = M_{\alpha\beta}(u'', f_u) + M_{\alpha\beta}(v'', f_v) + M_{\alpha\beta}(w'', f_w),$$

$$G_{\alpha\beta}(p'', \mathbf{f}) = -\mathbf{i}\alpha(p'', f_u) + \left(p'', \frac{\partial f_v}{\partial y}\right) + \left(p'', \frac{\partial f_w}{\partial z}\right) - \mathbf{i}\beta(p'', f_w),$$

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{v}'', q) = \mathbf{i}\alpha(u'', q) + \left(\frac{\partial v''}{\partial y}, q\right) + \left(\frac{\partial w''}{\partial z}, q\right) + \mathbf{i}\beta(w'', q),$$

а

$$M_{\alpha\beta}(f, g) = -\alpha^2(f, g) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \mathbf{i}\beta f, \frac{\partial g}{\partial z} + \mathbf{i}\beta g\right).$$

В рамках методов и подходов, описанных в [42], можно показать, что решение задачи (2.1.3) существует и единственно.

## 2.2 Аппроксимация и редукция

Для пространственной аппроксимации задач (2.1.1) и (2.1.3) мы выберем достаточно гладкое взаимно-однозначное отображение квадрата

$$\mathfrak{D} = \{(r, s) : -1 < r < 1, -1 < s < 1\}$$

в исходную область  $\Sigma$  и сделаем в этих уравнениях замену переменных, перейдя к новым переменным  $r$  и  $s$ . Дифференцирование по  $y$  и  $z$  выразим через дифференцирование по  $r$  и  $s$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}(r, s)} \left( \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{J}(r, s)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (2.2.1)$$

а интегрирование по области  $\Sigma$  заменим на интегрирование по  $\mathfrak{D}$ :

$$\int_{\Sigma} f(y, z) dy dz = \int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{J}(r, s) f(y(r, s), z(r, s)) dr ds, \quad (2.2.2)$$

где  $\mathfrak{J}(r, s)$  означает якобиан отображения.

Поскольку функции  $\eta_1(z)$  и  $\eta_2(z)$  предполагаются достаточно гладкими, будем использовать так называемое отображение Гордона–Холла [45]:

$$y = \frac{\eta_2(ls) - \eta_1(ls) + r(\eta_1(ls) + \eta_2(ls))}{2}, \quad z = ls, \quad (2.2.3)$$

якобиан которого

$$\mathfrak{J}(r, s) = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\eta_1(ls) + \eta_2(ls)}{2} l > 0.$$

Отметим, что аналогичное отображение мы уже использовали в доказательстве леммы 1.4.1.

Аппроксимацию задач (2.1.1) и (2.1.3), записанных в новых переменных, будем выполнять методом Галеркина-коллокаций. Учитывая, что в новых переменных давление должно удовлетворять условию периодичности по  $s$ , а компоненты скорости должны удовлетворять нулевым граничным условиям по  $r$  и условию периодичности по  $s$ , будем выбирать базисные и пробные функции удовлетворяющими этим граничным условиям. Для этого в замыкании области  $\mathfrak{D}$  выберем две сетки  $\mathfrak{D}_p$  и  $\mathfrak{D}_v$ , первую из которых будем использовать для аппроксимации давления, а вторую — для аппроксимации компонент скорости. Обе эти сетки выбираем равномерными по направлению  $s$  с нечетным числом узлов  $m_s$  включая левую граничную точку  $-1$  и исключая правую граничную точку  $1$ . По направлению  $r$  сетки выбираем смещенными друг относительно друга. В качестве узлов для сетки  $\mathfrak{D}_p$  возьмем корни многочлена Лежандра (узлы Гаусса), а для сетки  $\mathfrak{D}_v$  — корни производной многочлена Лежандра той же степени и точки  $\pm 1$  (узлы Гаусса–Лобатто). Таким образом,

$$\mathfrak{D}_p = \{(r_i, s_j) : i = 1, \dots, m_r + 1; j = 1, \dots, m_s\},$$

$$\mathfrak{D}_v = \{(\tilde{r}_i, s_j) : i = 0, \dots, m_r + 1; j = 1, \dots, m_s\},$$

где  $s_j = 2(j - 1)/m_s - 1$ ,  $r_i$  — корни многочлена Лежандра  $L_{m_r+1}$  степени  $m_r + 1$ ,  $\tilde{r}_i$  ( $1 \leq i \leq m_r$ ) — корни производной  $L'_{m_r+1}$  многочлена Лежандра,  $\tilde{r}_0 = -1$ ,  $\tilde{r}_{m_r+1} = 1$ .

В качестве базисных функции для аппроксимации давления и компонент скорости будем использовать интерполяционные многочлены вида

$$\Upsilon_{ij}^p(r, s) = \chi_i(r)\psi_j(s), \quad \Upsilon_{ij}^v(r, s) = \phi_i(r)\psi_j(s), \quad (2.2.4)$$

соответственно, выбрав в качестве базисных функций по  $r$  элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, которые для сетки  $\mathfrak{D}_p$  могут быть записаны в виде

$$\chi_i(r) = \frac{1}{r - r_i} \frac{L_{m_r+1}(r)}{L'_{m_r+1}(r_i)},$$

а для сетки  $\mathfrak{D}_v$  — в виде

$$\phi_i(r) = \frac{(r^2 - 1)L'_{m_r+1}(r)}{(m_r + 2)(m_r + 1)(r - \tilde{r}_i)L_{m_r+1}(\tilde{r}_i)}.$$

В качестве базисных функций по  $s$  выберем элементарные тригонометрические многочлены [46]:

$$\psi_j(s) = \frac{\sin(m_s \pi (s - s_j) / 2)}{m_s \sin(\pi (s - s_j) / 2)}.$$

Отметим, что базисная функция  $\chi_i(r)$  является многочленом от  $r$  степени  $m_r$ , принимающим значение 1 в узле  $r_i$  и значение 0 в узлах  $r_k$ ,  $k \neq i$ . Базисная функция  $\phi_i(r)$  является многочленом от  $r$  степени  $m_r + 1$ , принимающим значение 1 в узле  $\tilde{r}_i$  и значение 0 в узлах  $\tilde{r}_k$ ,  $k \neq i$ . Базисная функция  $\psi_j(s)$  является тригонометрическим многочленом от  $s$  степени  $m_s$ , принимающим значение 1 в узле  $s_j$  и значение 0 в узлах  $s_k$ ,  $k \neq j$ . Линейные оболочки функций каждого из этих трех типов инвариантны относительно операции дифференцирования:

$$\chi'_i(r) = \sum_{k=1}^{m_r+1} \chi'_i(r_k)\chi_k(r), \quad \phi'_i(r) = \sum_{k=0}^{m_r+1} \phi'_i(\tilde{r}_k)\phi_k(r),$$

$$\psi'_j(s) = \sum_{k=1}^{m_s} \psi'_j(s_k) \psi_k(s),$$

и линейная оболочка системы  $\{\phi_i\}$  включает линейную оболочку системы  $\{\chi_i\}$ :

$$\chi_i(r) = \sum_{k=0}^{m_r+1} \chi_i(\tilde{r}_k) \phi_k(r).$$

По направлению  $s$  построенные базисные функции (2.2.4) будут периодическими. По направлению  $r$  базисные функции  $\Upsilon_{ij}^v(r, s)$  с  $1 \leq i \leq m_r$  будут удовлетворять нулевым граничным условиям. Кроме того, каждая из базисных функций  $\Upsilon_{ij}^p(r, s)$  будет равна единице в узле  $(r_i, s_j)$  и нулю в остальных узлах сетки  $\mathfrak{D}_p$ , а каждая из базисных функций  $\Upsilon_{ij}^v(r, s)$  будет равна единице в узле  $(\tilde{r}_i, s_j)$  и нулю в остальных узлах сетки  $\mathfrak{D}_v$ .

Таким образом, профиль основного течения мы будем аппроксимировать как

$$U(y(r, s), z(r, s)) \approx \sum_{i=1}^{m_r} \sum_{j=1}^{m_s} \Upsilon_{ij}^v(r, s) U_{ij}, \quad (2.2.5)$$

давление возмущения — как

$$p''(y(r, s), z(r, s), t) \approx \sum_{i=1}^{m_r+1} \sum_{j=1}^{m_s} \Upsilon_{ij}^p(r, s) p_{ij}(t), \quad (2.2.6)$$

а вектор скорости возмущения, учитывая нулевые граничные условия в направлении  $r$ , как

$$\mathbf{v}''(y(r, s), z(r, s), t) \approx \sum_{i=1}^{m_r} \sum_{j=1}^{m_s} \Upsilon_{ij}^v(r, s) \mathbf{v}_{ij}(t), \quad (2.2.7)$$

где  $\mathbf{v}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})^\top$ . При этом коэффициенты  $p_{ij}(t)$  разложения (2.2.6) будут значениями аппроксиманта в  $(i, j)$ -х узлах сетки  $\mathfrak{D}_p$ , а коэффициенты  $U_{ij}$  и  $\mathbf{v}_{ij}(t)$  разложений (2.2.5) и (2.2.7) будут значениями аппроксимантов в  $(i, j)$ -х узлах сетки  $\mathfrak{D}_v$ . В качестве пробных функций для задачи (2.1.1) будем использовать  $\Upsilon_{ij}^v$ ,  $1 \leq i \leq m_r$ ,  $1 \leq j \leq m_s$ . В качестве пробных функций для первого уравнения в (2.1.3) будем использовать векторные функции  $\Upsilon_{ij}^v e_k$ ,  $1 \leq i \leq m_r$ ,

$1 \leq j \leq m_s$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , где  $e_k$  означает  $k$ -й столбец единичной матрицы порядка 3. В качестве пробных функций для уравнения неразрывности будем использовать  $\Upsilon_{ij}^p$ ,  $1 \leq i \leq m_r + 1$ ,  $1 \leq j \leq m_s$ .

Для вычисления интегралов вида (2.2.2) будем применять в направлении  $r$  квадратурные формулы с узлами  $\tilde{r}_i$  и весами Гаусса–Лобатто [47]:

$$\int_{-1}^{+1} g(r) dr \approx \sum_{i=0}^{m_r+1} \omega_i g(\tilde{r}_i), \quad \omega_i = \frac{2}{(m_r + 1)(m_r + 2)L_{m_r+1}^2(\tilde{r}_i)},$$

а для интегрирования в направлении  $s$  — квадратурные формулы с узлами  $s_j$  и равными весами  $1/m_s$  [46]:

$$\int_{-1}^{+1} g(s) ds \approx \frac{1}{m_s} \sum_{j=1}^{m_s} g(s_j).$$

Эти квадратурные формулы точны для многочленов и тригонометрических многочленов степеней не выше  $2m_r + 1$  и  $m_s - 1$  соответственно. Квадратурная формула для вычисления интегралов вида (2.2.2) будет, таким образом, следующей:

$$\int_{\Sigma} f(y, z) dy dz \approx \sum_{i=0}^{m_r+1} \sum_{j=1}^{m_s} \kappa_{ij} f(y(\tilde{r}_i, s_j), z(\tilde{r}_i, s_j)), \quad (2.2.8)$$

где

$$\kappa_{ij} = \frac{\omega_i}{m_s} \mathfrak{J}(\tilde{r}_i, s_j). \quad (2.2.9)$$

Чтобы применять эту же формулу для аппроксимации членов слабой постановки уравнений движения, содержащих давление, и для аппроксимации слабой постановки уравнения неразрывности, нам потребуется вычислять значения функций  $\Upsilon_{ij}^p$  в узлах сетки  $\mathfrak{D}_v$ . Для этого достаточно иметь в распоряжении матрицу проектирования

$$\Pi = \{\chi_j(\tilde{r}_i)\}_{i,j=0,1}^{m_r, m_r}.$$

Кроме того, для вычисления значений производных базисных функций  $\Upsilon_{ij}^v$  в узлах сетки  $\mathfrak{D}_v$  нам потребуются матрицы дифференцирования

$$D_r = \{\phi'_j(\tilde{r}_i)\}_{i,j=0}^{m_r}, \quad D_s = \{\psi'_j(s_j)\}_{i,j=1}^{m_s}.$$

Явные формулы для вычисления элементов матрицы  $D_r$  приведены, например, в [47]. Однако более эффективный с вычислительной точки зрения алгоритм основан на использовании бароцентрических формул лагранжевой интерполяции [48], а также некоторых приемов, помогающих уменьшить ошибки округления [49]. Для вычисления элементов матрицы  $D_s$  можно использовать явные формулы, приведенные в [50], и так называемый “flipping trick”, предложенный в [51] для увеличения точности и основанный на том, что  $\sin(\xi)$  при малом  $\xi > 0$  можно вычислить в условиях машинной арифметики с более высокой относительной точностью, чем при большом  $\xi$ .

Используя аппроксиманты (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7), описанные выше пробные функции, квадратурную формулу и матрицы проектирования и дифференцирования, мы получим, применив метод Галеркина к (2.1.1), для вычисления коэффициентов  $U_{ij}$  систему линейных алгебраических уравнений с эрмитовой положительно определенной матрицей. Применив метод Галеркина к (2.1.3), для коэффициентов  $p_{ij}(t)$  и  $\mathbf{v}_{ij}(t)$  получим систему дифференциально-алгебраических уравнений следующего вида:

$$K \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (J_\alpha + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\beta}) \mathbf{v} + G_{\alpha\beta} p, \quad F_{\alpha\beta} \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.10)$$

где  $\mathbf{v}$  означает  $n_v$ -компонентный вектор коэффициентов  $\mathbf{v}_{ij}$ ,  $p$  означает  $n_p$ -компонентный вектор коэффициентов  $p_{ij}$ ,  $n_v = 3m_r m_s$ ,  $n_p = (m_r + 1)m_s$ ,  $K$  — квадратная диагональная матрица порядка  $n_v$  квадратурных коэффициентов (2.2.9), а  $J_\alpha$ ,  $L_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha\beta}$  и  $F_{\alpha\beta}$  — матрицы размеров  $n_v \times n_v$ ,  $n_v \times n_v$ ,  $n_v \times n_p$  и  $n_p \times n_v$  соответственно, являющиеся конечномерными аналогами операторов в (1.3.4), причем

$$G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^*, \quad L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}^* < 0. \quad (2.2.11)$$

Конечномерный аналог средней плотности кинетической энергии возмущения (1.3.2) будет иметь вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{8l} \|K^{1/2} \mathbf{v}\|_2^2. \quad (2.2.12)$$



Сделаем следующую замену переменных, сохранив старые обозначения:

$$K^{1/2}\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}, \quad K^{-1/2}J_\alpha K^{-1/2} \rightarrow J_\alpha, \quad K^{-1/2}L_{\alpha\beta}K^{-1/2} \rightarrow L_{\alpha\beta},$$

$$K^{-1/2}G_{\alpha\beta} \rightarrow G_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta}K^{-1/2} \rightarrow F_{\alpha\beta}.$$

В новых переменных система (2.2.10) примет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (J_\alpha + \frac{1}{\text{Re}}L_{\alpha\beta})\mathbf{v} + G_{\alpha\beta}p, \quad F_{\alpha\beta}\mathbf{v} = 0, \quad (2.2.13)$$

а конечномерный аналог средней плотности кинетической энергии примет вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{8l}\|\mathbf{v}\|_2^2. \quad (2.2.14)$$

Нетрудно видеть, что выполненная замена переменных сохранит свойства (2.2.11).

Отметим, что матрицы  $G_{\alpha\beta}$  и  $F_{\alpha\beta}$  как в системе (2.2.10), так и в системе (2.2.13) будут полного ранга при всех значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , кроме  $\alpha = \beta = 0$ . В этом случае они будут иметь дефект ранга 2.

Систему (2.2.10) можно упростить, спроектировав ее на подпространство соленоидальных сеточных функций, то есть — на ядро матрицы  $F_{\alpha\beta}$ , так как из второго уравнения системы следует, что все решения лежат в этом подпространстве. Для этого делаем замену переменных  $\mathbf{v} = V_{\alpha\beta}\mathbf{u}$ , где  $V_{\alpha\beta}$  — прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы  $F_{\alpha\beta}$ . После умножения получившегося уравнения слева на  $V_{\alpha\beta}^*$ , и учета того, что  $F_{\alpha\beta}^* = G_{\alpha\beta}$ , получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (H_{\alpha\beta} + \frac{1}{\text{Re}}S_{\alpha\beta})\mathbf{u}, \quad (2.2.15)$$

где  $H_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}^*J_\alpha V_{\alpha\beta}$  и  $S_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}^*L_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$  — квадратные матрицы порядка  $n_v - n_p + 2$ , если  $\alpha = \beta = 0$ , и порядка  $n_v - n_p$  в противном случае. Детальное обоснование такого типа редукций линейных дифференциально-алгебраических систем дано в [20].

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2.15) эквивалентна исходной системе дифференциально-алгебраических уравнений (2.2.10), более того,  $\|K^{1/2}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$ . Это позволяет свести вычисление характеристик устойчивости к вычислениям с матрицами  $H_{\alpha\beta}$  и  $S_{\alpha\beta}$ .

Как было отмечено в разделе 1.3, в случае  $\beta = 0$  и четного по  $z$  орбрения решение системы (1.3.4) можно свести к отдельному поиску решений, обладающих симметриями  $I$  и  $II$ . Поскольку предложенная пространственная аппроксимация сохраняет эти симметрии, систему (2.2.10) можно преобразовать к двум независимым системам, снабженным функционалами энергии вида (2.2.12). Каждая из этих систем будет иметь вид (2.2.10) с матрицами, имеющими примерно вдвое меньшее число строк и столбцов. Решения исходной системы (2.2.10), отвечающие решениям этих двух систем, будут взаимно ортогональными. К каждой из полученных систем можно применить описанную выше редукцию, позволяющую свести ее к системе вида (2.2.15).

В дальнейшем, чтобы не вводить новые обозначения для приближенных характеристик устойчивости, найденных на основе пространственной аппроксимации методом Галеркина-коллокаций, мы будем использовать обозначения  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$ ,  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  и  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re})$ , введенные в предыдущей главе для точных характеристик устойчивости.

Для обоснования алгоритмов вычисления критических чисел Рейнольдса нам будет достаточно учитывать, что матрица  $S_{\alpha\beta}$  диссипативная, то есть

$$S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^* < 0.$$

Матрицу  $H_{\alpha\beta}$  будем рассматривать как квадратную комплексную матрицу общего вида. При этом будем считать, что максимальное собственное значение матрицы  $H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^*$  положительно. Последнее не нарушит общности описанных в следующих разделах алгоритмов, поскольку если  $H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^* \leq 0$ , то при любом числе Рейнольдса норма любого решения  $\mathbf{u}(t)$  системы (2.2.15) строго

монотонно убывает при  $t \rightarrow \infty$ . Это вытекает из оценки

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 \leq h_{\max} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2, \quad (2.2.16)$$

где  $h_{\max}$  означает максимальное собственное значение матрицы

$$H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{\text{Re}} (S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*). \quad (2.2.17)$$

То есть в этом случае можно сразу заключить, что  $\text{Re}_E^{\alpha\beta} = \text{Re}_L^{\alpha\beta} = \infty$ , а  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re}) = 1$ .

Отметим, что если  $\mathbf{u}(0)$  является собственным вектором матрицы (2.2.17), отвечающим максимальному собственному значению  $h_{\max}$ , то в оценке (2.2.16) при  $t = 0$  достигается равенство.

В следующих разделах будут подробно описаны методы вычисления характеристик устойчивости в соответствии с работой [22].

## 2.3 Расчет энергетического критического числа Рейнольдса

Для вычисления энергетического критического числа Рейнольдса  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  достаточно найти точную нижнюю грань таких положительных  $\text{Re}$ , при которых существует решение системы (2.2.15), норма которого стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  не монотонно.

В силу эрмитовости матрицы (2.2.17) для ее максимального собственного значения справедливо следующее равенство [52]:

$$h_{\max} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left[ \frac{((H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{((S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \right].$$

Так как матрица  $H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^*$  не знакоопределенная, а  $S_{\alpha\beta}$  диссипативная, то в зависимости от  $\text{Re}$  максимальное собственное значение  $h_{\max}$  может быть как отрицательным, так и положительным. Более того, для любых положительных

чисел  $\text{Re}_1 < \text{Re}_2$  при любых  $\mathbf{x} \neq 0$  будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{((H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}_1} \frac{((S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} < \\ & < \frac{((H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}_2} \frac{((S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*)\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Значит,  $h_{\max}$  строго монотонно возрастает с ростом  $\text{Re}$ .

Из указанной выше зависимости  $h_{\max}$  от  $\text{Re}$  и того, что оценка (2.2.16) достижима при  $t = 0$ , следует, что  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  является наименьшим положительным значением  $\text{Re}$ , при котором максимальное собственное значение  $h_{\max}$  матрицы (2.2.17) равно нулю, то есть эта матрица является вырожденной. Множество всех  $\mu$ , при которых матрица

$$H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^* + \mu(S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*) \quad (2.3.1)$$

вырождена, является (по определению) спектром матричного пучка (2.3.1). Следовательно, для фиксированной пары параметров  $(\alpha, \beta)$  энергетическое критическое число Рейнольдса может быть вычислено как  $\text{Re}_E^{\alpha\beta} = 1/\mu_E^{\alpha\beta}$ , где  $\mu_E^{\alpha\beta}$  означает максимальное собственное значение эрмитового матричного пучка (2.3.1). Поскольку матрица при спектральном параметре  $\mu$  этого пучка отрицательно определенная, вычисление его спектра сводится на основе разложения Холецкого этой матрицы, взятой с обратным знаком, и двусторонних преобразований Хаусхолдера к обычной проблеме собственных значений с эрмитовой трехдиагональной матрицей. Для решения последней можно воспользоваться, например, специальным вариантом QR-алгоритма. Описанный подход легко реализовать с помощью процедур из пакета LAPACK [53].

Глобальное энергетическое критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_E$  можно найти, минимизируя  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Для расчета скоростной части  $\tilde{\nu}$  амплитуды (1.3.10) критического возмущения достаточно при критических значениях параметров  $\alpha = \alpha_E$  и  $\beta = \beta_E$  найти собственный вектор  $\mathbf{u}$  пучка (2.3.1), отвечающий его максимальному собственному значению

$\mu_E = 1/\text{Re}_E$ , тогда

$$\tilde{\mathbf{v}} = K^{-1/2} V_{\alpha\beta} \mathbf{u}. \quad (2.3.2)$$

## 2.4 Расчет линейного критического числа Рейнольдса

Для вычисления линейного критического числа Рейнольдса  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  достаточно найти точную нижнюю грань таких положительных  $\text{Re}$ , при которых существует решение системы (2.2.15), норма которого не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то есть минимальное  $\text{Re}$ , при котором матрица

$$H_{\alpha\beta} + \frac{1}{\text{Re}} S_{\alpha\beta}$$

имеет хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью.

Обозначим через  $r(\mu)$  максимальную вещественную часть собственных значений матрицы  $H_{\alpha\beta} + \mu S_{\alpha\beta}$ . Тогда  $\text{Re}_L^{\alpha\beta} = 1/\mu_L^{\alpha\beta}$ , где  $\mu_L^{\alpha\beta}$  — максимальный положительный корень уравнения  $r(\mu) = 0$ . Учитывая, что при  $\mu > \mu_E^{\alpha\beta}$  это уравнение корней заведомо не имеет, мы будем искать  $\mu_L^{\alpha\beta}$  на отрезке  $[\mu_1, \mu_E^{\alpha\beta}]$  с  $\mu_1 = 1/\text{Re}_\infty$ , где  $\text{Re}_\infty$  — некоторое достаточно большое число Рейнольдса, такое, что при большем числе Рейнольдса исследовать устойчивость основного течения не имеет физического смысла (в наших расчетах мы полагали  $\text{Re}_\infty = 10^7$ ). При этом, не нарушая общности, можно считать, что  $r(\mu_E^{\alpha\beta}) < 0$ , иначе  $r(\mu_E^{\alpha\beta}) = 0$ , то есть  $\mu_L^{\alpha\beta} = \mu_E^{\alpha\beta}$ .

Глобальное линейное критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_L$  находится минимизацией  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Для расчета скоростной части  $\tilde{\mathbf{v}}$  амплитуды (1.3.10) критического возмущения в данном случае достаточно при критических значениях параметров  $\alpha = \alpha_L$  и  $\beta = \beta_L$  найти собственный вектор  $\mathbf{u}$  матрицы  $H_{\alpha\beta} + \mu_L^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ , отвечающий ее собственному значению с максимальной вещественной частью, которая, очевидно, будет нулевой с точ-

ностью вычисления нулей функции  $r(\mu)$ . Требуемый вектор  $\tilde{v}$  находится, как и в разделе 2.3, по формуле (2.3.2).

Для вычисления нулей функции  $r(\mu)$  используются стандартные процедуры FZERO и FMIN, описанные в [54] и включенные во многие пакеты прикладных программ. Первая из этих процедур позволяет для заданных положительных  $\mu_1 < \mu_2$ , в которых  $r(\mu)$  имеет различные знаки, и заданной точности  $\delta$  найти в интервале  $[\mu_1, \mu_2]$  точку  $\mu_*$ , такую, что  $r(\mu_* - \mu_*\delta)r(\mu_* + \mu_*\delta) < 0$ . Вторая процедура ищет минимум заданной непрерывной функции в заданном интервале. Значение функции  $r(\mu)$  при фиксированном  $\mu$  можно находить путем вычисления всех собственных значений неэрмитовой матрицы  $H_{\alpha\beta} + \mu S_{\alpha\beta}$  с помощью соответствующей процедуры пакета LAPACK.

На первом шаге нашего алгоритма мы вычисляем  $r(\mu_1)$ . Если  $r(\mu_1) > 0$ , то с помощью FZERO находим приближенный корень, то есть точку  $\mu_* \in [\mu_1, \mu_E^{\alpha\beta}]$ , такую, что  $r(\mu_* - \mu_*\delta)r(\mu_* + \mu_*\delta) < 0$ . Если  $r(\mu_1) = 0$ , то полагаем  $\mu_* = \mu_1$ . В обоих случаях вычисляем новую левую границу интервала:  $\mu_2 = \mu_* + \mu_*\delta$ . Наконец, если  $r(\mu_1) < 0$ , то мы вычисляем минимум функции

$$\frac{r(\mu)}{\mu_E^{\alpha\beta} - \mu_1} \left( \frac{\mu_E^{\alpha\beta} - \mu}{r(\mu_1)} + \frac{\mu - \mu_1}{r(\mu_E^{\alpha\beta})} \right) \quad (2.4.3)$$

в интервале  $[\mu_1, \mu_E^{\alpha\beta}]$  с помощью процедуры FMIN. Это позволяет либо найти корень (если минимум равен нулю), либо убедиться, что корня нет (если минимум положительный), либо найти в интервале точку  $\mu_*$ , в которой  $r(\mu_*) > 0$ . В первом случае полагаем  $\mu_2 = \mu_* + \mu_*\delta$ . Во втором останавливаем вычисления, заключив, что корней в рассматриваемом интервале нет. В последнем случае полагаем  $\mu_2 = \mu_*$ . Таким образом, первый шаг позволяет либо убедиться, что корней в интервале  $[\mu_1, \mu_E^{\alpha\beta}]$  нет, либо сузить интервал поиска максимального корня до  $[\mu_2, \mu_E^{\alpha\beta}]$  с  $\mu_2 > \mu_1$ . В последнем случае мы либо нашли один корень, либо убедились, что в новом интервале  $[\mu_2, \mu_E^{\alpha\beta}]$  есть по крайней мере один корень, причем  $r(\mu_2) > 0$ , то есть к новому интервалу применима процедура FZERO.

Отметим, что в отличие от процедуры FZERO, которая, используя методы бисекции и секущих, обязательно найдет один из корней уравнения  $r(\mu) = 0$  с заданной точностью, если функция принимает на концах интервала различные знаки, процедура FMIN может, вообще говоря, пропустить глобальный и найти один из локальных минимумов. Учитывая особенности используемого в ней алгоритма, для повышения надежности этой процедуры мы вычисляли с ее помощью не минимум функции  $-r(\mu)$ , что было бы более естественно, а минимум функции (2.4.3), принимающей на концах интервала поиска одинаковые значения.

Если мы не убедились в отсутствии корней на первом шаге, мы применяем тот же алгоритм к интервалу  $[\mu_2, \mu_E^{\alpha\beta}]$ , и так далее. Поскольку функция  $r(\mu)$  является алгебраической и, следовательно, уравнение  $r(\mu) = 0$  может иметь лишь конечное число корней, в конце концов мы получим несколько вычисленных корней и убедимся, что в интервале  $[\hat{\mu}_L^{\alpha\beta} + \hat{\mu}_L^{\alpha\beta} \delta, \mu_E^{\alpha\beta}]$  корней нет, где  $\hat{\mu}_L^{\alpha\beta}$  — максимальный из вычисленных корней. При этом точное критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  будет удовлетворять неравенству

$$\hat{\mu}_L^{\alpha\beta} - \hat{\mu}_L^{\alpha\beta} \delta \leq 1/\text{Re}_L^{\alpha\beta} \leq \hat{\mu}_L^{\alpha\beta} + \hat{\mu}_L^{\alpha\beta} \delta,$$

то есть вычисленное критическое число Рейнольдса  $\widehat{\text{Re}}_L^{\alpha\beta} = 1/\hat{\mu}_L^{\alpha\beta}$  будет иметь относительную погрешность

$$|\widehat{\text{Re}}_L^{\alpha\beta} - \text{Re}_L^{\alpha\beta}|/\text{Re}_L^{\alpha\beta} \leq \delta.$$

Отметим, что если искать корни не только в крайнем правом, но и во всех подынтервалах, на которые разбивают  $[\mu_1, \mu_E^{\alpha\beta}]$  уже вычисленные корни, то мы найдем с относительной точностью  $\delta$  все корни уравнения  $r(\mu) = 0$  в этом интервале. Это позволяет строить полные нейтральные кривые, например, в плоскости  $(\text{Re}, \alpha)$  при фиксированных  $\beta$ .

## 2.5 Расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии

Пусть фиксировано некоторое число Рейнольдса  $Re$ :  $Re_E^{\alpha\beta} < Re < Re_L^{\alpha\beta}$ . Расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений сводится при таком числе Рейнольдса к вычислению максимальной амплификации квадрата второй нормы решений задач Коши для системы (2.2.15), которая очевидно равна

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(Re) = \max_{t \geq 0} \|\exp\{tA_{\alpha\beta}\}\|_2^2, \quad (2.5.1)$$

где  $A_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}/Re$ . Глобальная максимальная амплификация  $\Gamma_{\max}(Re)$  вычисляется максимизацией  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(Re)$  по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Для расчета скоростной части  $\tilde{v}$  амплитуды (1.3.10) оптимального возмущения достаточно при оптимальных значениях параметров  $\alpha = \alpha_{\max}$  и  $\beta = \beta_{\max}$  найти сингулярный вектор  $u$  матрицы  $\exp\{t_{\text{opt}}A_{\alpha\beta}\}$ , отвечающий ее максимальному сингулярному числу [55], где  $t_{\text{opt}}$  означает значение  $t$ , при котором достигается максимум (2.5.1). Требуемый вектор  $\tilde{v}$  находится, как и в разделах 2.3 и 2.4, по формуле (2.3.2).

В дальнейшем мы ограничим множество оптимальных возмущений теми из них, которые достигают максимально возможного значения при наименьшем значении  $t$ , то есть при

$$t_{\text{opt}} = \min \arg \max_{t \geq 0} \|\exp\{tA_{\alpha\beta}\}\|_2^2.$$

Описанный выше подход к вычислению максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений и соответствующих оптимальных возмущений сводится таким образом к вычислению для различных заданных квадратных комплексных матриц  $A$  величины

$$\Gamma_{\max} = \max_{t \geq 0} \Gamma(t), \quad (2.5.2)$$



где

$$\Gamma(t) = \|\exp\{tA\}\|_2^2,$$

и минимального  $t_{\text{opt}}$ , при котором достигается этот максимум. Поскольку максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии вычисляется при  $\text{Re} : \text{Re}_E^{\alpha\beta} < \text{Re} < \text{Re}_L^{\alpha\beta}$ , предполагается, что спектр матрицы  $A$  лежит в левой полуплоскости, а максимальное собственное значение  $h_{\text{max}}$  матрицы  $A + A^*$  положительное.

Найти  $\hat{t}_{\text{opt}}$ , дающее максимум  $\Gamma(t)$  с заданной относительной точностью  $\delta$ , можно вычислив  $\Gamma(t)$  на равномерной сетке с узлами  $t_j = \tau j$  и достаточно мелким шагом  $\tau$ . Для этого достаточно вычислить матрицу  $E_1 = \exp\{\tau A\}$  методом, описанным в [56]. В остальных узлах сетки значение матричной экспоненты  $E_j = \exp\{t_j A\}$  можно вычислять по формуле  $E_j = E_1 E_{j-1}$ . Нормы полученных матриц можно вычислять с помощью соответствующей процедуры пакета LAPACK. Остановить вычисления достаточно, если  $\|E_j\|_2 < 1$  (можно показать, что в этом случае  $t_j > t_{\text{opt}}$ ), взяв в качестве  $\hat{t}_{\text{opt}}$  узел сетки, в котором норма матричной экспоненты максимальная.

Основываясь на неравенстве  $\Gamma(t) \leq \exp(h_{\text{max}}t)$ , непосредственно следующем из оценки (2.2.16), несложно показать, что найденное таким образом  $\hat{t}_{\text{opt}}$  будет удовлетворять неравенству

$$|\Gamma(\hat{t}_{\text{opt}}) - \Gamma(t_{\text{opt}})|/\Gamma(t_{\text{opt}}) \leq \delta, \quad (2.5.3)$$

если выбрать  $\tau = \ln(1 + \delta)/h_{\text{max}}$ . Однако для большинства рассматриваемых в данной монографии матриц  $A = A_{\alpha\beta}$  вычислительные затраты такого алгоритма будут катастрофически большими даже при не слишком большой точности  $\delta$ , поскольку, из-за большой величины  $t_{\text{opt}}h_{\text{max}}$  при значениях  $\alpha$  и  $\beta$  близких к оптимальным будет очень большим число шагов алгоритма, необходимое для достижения максимума  $\Gamma(t_j)$ .

Для уменьшения вычислительных затрат в работе [18] было предложено заменять матрицу  $A$  ее формой Шура [55] (то есть верхней треугольной

матрицей, унитарно подобной исходной) с диагональными элементами, упорядоченными по невозрастанию вещественных частей, а для ускорения вычисления матриц  $E_j$ , которые для верхней треугольной матрицы будут также верхними треугольными, и их норм применять аппроксимацию вида

$$E_k \approx \begin{bmatrix} P_k \\ 0 \end{bmatrix} Q_k, \quad (2.5.4)$$

где  $P_k$  — квадратная верхняя треугольная матрица меньшего порядка, чем  $E_k$ , а  $Q_k$  — унитарная прямоугольная матрица. Учитывая, что норма правой части (2.5.4) равна  $\|P_k\|_2$ , такая аппроксимация позволит вычислять, начиная с  $j = k + 1$ , матрицы  $\widetilde{E}_1^{j-k} P_k$  вместо  $E_j$ , где  $\widetilde{E}_1$  означает главную подматрицу матрицы  $E_1$  того же порядка, что и  $P_k$ . В работе [18] показано, что если такую редукцию выполнять время от времени в процессе работы исходного алгоритма, то вычислительные затраты существенно уменьшатся (в тысячи раз) при той же точности результата в смысле (2.5.3).

Аппроксимацию (2.5.4) можно выполнить с заданной точностью, разбив матрицу  $E_k$  по строкам на два блока

$$E_k = \begin{bmatrix} E_k^{(1)} \\ E_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

так, чтобы норма нижнего блока не превосходила заданную малую пороговую величину, и, отбросив нижний блок, выполнить разложение верхнего блока в произведение квадратной верхней треугольной и унитарной прямоугольной матриц.

В пакете LAPACK имеются процедуры, необходимые для вычисления всех упомянутых выше разложений. Поэтому, вычисление максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений и соответствующего оптимального возмущения можно организовать так, чтобы основной объем вычислений выполнялся стандартными матричными процедурами.

## 2.6 Реализация технологии исследования устойчивости течений для вычислительных кластеров

Программная реализация [23] описанной выше технологии представляет собой комплекс программ, написанных в среде MATLAB для персонального компьютера (ПК), и на языке Fortran для кластера, оснащенного библиотекой Intel MKL. Рабочее место пользователя находится на ПК, соединенном с кластером по сети. Пользователь работает в среде MATLAB на ПК, но может выбрать режим, в котором основной объем вычислений производится на кластере. Использование кластера автоматизировано, по завершении вычислений пользователь может обрабатывать результаты так, как если бы вычисления полностью производились на ПК в среде MATLAB.

Благодаря сведению анализа устойчивости основного течения к анализу его устойчивости к элементарным возмущениям (1.3.1), предложенная технология обладает значительным параллелизмом. Например, при расчете линий уровня спектральных характеристик (проверка гипотезы об оптимальном и критических возмущениях) для каждой пары параметров  $(\alpha, \beta)$  необходимо решить одну и ту же независимую задачу, отличающуюся только значениями самих параметров. Полностью независимыми являются и любые расчеты при различных значениях параметров орбиты. Это позволяет распределять вычисления на большое количество вычислительных узлов кластера. При этом основной объем вычислений приходится на стандартные задачи матричного анализа с плотными матрицами умеренного размера. Процедуры библиотеки MKL позволяют использовать для решения каждой такой задачи несколько процессорных ядер.

Программная реализация включает в себя следующие основные процедуры:

**DESIGN** формирует рассматриваемую вычислительную задачу устойчивости.

Пользователь задает область течения, выбирает из предлагаемых вариантов исследуемое основное течение и требуемую нормировку. Затем подготавливается пространственная аппроксимация: из заданного набора отображений (отображение Гордона–Холла, конформное отображение и т.п.) пользователь выбирает конкретное отображение квадрата в физическую область и число узлов сеток по новым переменным  $r$  и  $s$ . После этого процедура рассчитывает производные отображения, необходимые для замены переменных, квадратурные коэффициенты для вычисления интегралов от  $r$  и  $s$  и другие вспомогательные матрицы для аппроксимации методом Галеркина-коллокаций. Производит пробный расчет основного течения для анализа качества аппроксимации. Данная процедура реализована только в среде MATLAB для ПК ввиду высокой логической сложности используемых в ней алгоритмов, небольшого объема вычислений и результатов вычислений, а также ввиду того, что вычисления на этом этапе не зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Все остальные процедуры реализованы как в среде MATLAB, так и на языке Fortran для кластера.

**FORM2DMATR** формирует матрицы дифференцирования по пространственным переменным  $y$  и  $z$ , матрицы квадратурных коэффициентов для вычисления интегралов по двумерной расчетной области, и другие вспомогательные матрицы. Хотя вычисления, производимые этой процедурой, также не зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , на кластере они повторяются для каждой пары значений этих параметров. Ввиду небольшого объема таких вычислений это незначительно увеличивает общий объем вычислений, но значительно сокращает объем данных, передаваемых на кластер.

**MATRICES** для каждой пары  $(\alpha, \beta)$  формирует матрицы системы дифференциально-алгебраических уравнений (2.2.10).

**REDUCTION** для каждой пары  $(\alpha, \beta)$  формирует матрицы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2.15), которые далее используются для вычислений характеристик устойчивости.

**REEL** для каждой пары  $(\alpha, \beta)$  вычисляет энергетическое  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  и линейное  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  критические числа Рейнольдса.

**GAMMA** для тройки параметров  $(\alpha, \beta, \text{Re})$  вычисляет максимальную амплификацию средней плотности кинетической энергии возмущений  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re})$ . Для вычисления максимума нормы матричной экспоненты применяется предложенный в [18] метод, основанный на малоранговой аппроксимации. Для реализации этого метода необходима процедура вычисления матричной экспоненты. Наиболее эффективный алгоритм вычисления матричной экспоненты [56] реализован в матлабовской процедуре EXPM. Для кластера использовалась процедура ZGPADM из открытого пакета EXROKIT [57].

Независимо от того, где производились основные вычисления, их результаты однотипно обрабатываются на ПК. На нем же решаются и другие задачи, не требующие в рамках описанной технологии большого объема вычислений: вычисляются векторные спектральные характеристики (критические и оптимальные возмущения), групповые и фазовые скорости и т.п. Для этого используется дополнительный набор оригинальных процедур, реализованных в среде MATLAB и опирающихся на стандартные матричные алгоритмы.

Таким образом, все процедуры, кроме DESIGN, могут выполняться на кластере параллельно для различных наборов параметров орebrения, а в некоторых случаях и при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Пользователю нужно задать количество доступных вычислительных узлов, и программа автоматически разобьет заданный набор параметров на части, каждая из которых будет распределена по доступным узлам кластера с помощью программного интерфейса MPI [58]. Автоматизация обмена данными с кластером и запуска

на нем соответствующего задания осуществляется с помощью языка сценариев Python. Само задание для кластера также создается автоматически в среде MATLAB.

Расчеты, результаты которых будут представлены в третьей главе, проводились в основном на трех кластерах: МВС100К Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, на кластере Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета и на кластере «Ломоносов» Московского государственного университета. Для работы в среде MATLAB и для связи с кластерами использовался персональный компьютер на базе четырехъядерного процессора Intel Core i5-760 с 16ГБ оперативной памяти.

## 2.6.1 Тестирование реализации для кластеров

В данном подразделе обсуждаются результаты тестирования реализации для вычислительных кластеров технологии численного исследования устойчивости течений на примере задачи из работы [59]. Связанные с этим численные эксперименты проводились на кластере МВС100К (МСЦ РАН), а также на кластере ИВМ РАН.

В работе [59] рассматривалось течение в канале с волнистым оребрением

$$\eta_1(z) = \eta_2(z) = 1 - \varepsilon \cos \frac{\pi z}{l},$$

и параметрами  $l = 0.25$  и  $\varepsilon = 0.075$ . Для построения расчетных сеток также использовалось отображение Гордона-Холла (2.2.3). Количество узлов расчетной сетки было выбрано  $m_r = 100$  и  $m_s = 10$  (см. раздел 2.2). С помощью учета симметрии по вертикальному направлению количество расчетных узлов было сокращено до  $m_r = 50$ . Характеристики устойчивости рассчитывались на равномерной сетке волновых чисел в диапазонах  $0 \leq \alpha \leq 2$  и  $0 \leq \beta \leq 7$ , количество узлов было выбрано  $n_\alpha = 25$  и  $n_\beta = 31$ , всего  $25 \times 31 = 775$  пар.

В таблице 2.1 для нескольких пространственных сеток представлены число неизвестных в системе (2.2.10), то есть суммарное число компонент векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$ , число неизвестных после редукции, то есть число компонент вектора  $\mathbf{u}$  в системе (2.2.15), а также требуемый для вычисления характеристик устойчивости объем оперативной памяти. Кроме сетки  $50 \times 11$ , близкой к сетке из работы [59], в таблице 2.1 представлены примеры сеток, при которых на один восьмиядерный узел кластера, содержащий 8GB оперативной памяти, помещается 8, 4, 2 и 1 задача, соответственно.

Таблица 2.1: Число неизвестных в системе до и после редукции, а также требуемый для расчета объем оперативной памяти для разных размеров вычислительной сетки.

$m_r \times m_s$	Неизвестных в системе (2.2.10)	Неизвестных в системе (2.2.15)	Требуемый объем ОП
$50 \times 11$	2200	1100	$\lesssim 0.25GB$
$60 \times 17$	4080	2040	$\lesssim 1GB$
$70 \times 20$	5600	2800	$\lesssim 2GB$
$86 \times 23$	7912	3956	$\lesssim 4GB$
$115 \times 25$	11500	5750	$\lesssim 8GB$

При условии, что задача помещается на вычислительный узел кластера, параллелизм технологии (по волновым числам и по параметрам орebrения) позволяет загружать большое количество доступных узлов кластера. В таблице 2.2 приведены результаты повторения эксперимента из работы [59] на пространственной сетке  $50 \times 11$  с четырьмя значениями  $\alpha$  и восемью значениями  $\beta$ :

$$\alpha = 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2; \quad \beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$$

всего 32 независимые задачи. Сначала эти задачи были решены двумя партиями по 16 задач, используя 2 восьмиядерных вычислительных узла кластера, затем все 32 задачи были решены параллельно, используя 4 восьмиядерных вычислительных узла. Также в таблице приведено время расчета на ПК.

Таблица 2.2: Расчет 32-х задач для различных пар  $(\alpha, \beta)$  на пространственной сетке  $50 \times 11$  на ПК и в разных режимах загрузки кластеров.

		ПК	ИВМ РАН		МВС100К	
			2 узла	4 узла	2 узла	4 узла
REEL	Время в сек.	4122	3234	1645	3185	1619
	Ускорение	1	1.27	2.51	1.29	2.55
ГАММА	Время в сек.	1267	1042	530	891	453
	Ускорение	1	1.20	2.39	1.42	2.80

При использовании 2 вычислительных узлов кластера было получено ускорение примерно в 1.3 раза, а при использовании 4 восьмиядерных узлов – вдвое большее ускорение.

Из таблицы 2.2 можно заключить, что расчет критических чисел Рейнольдса для 775 пар волновых чисел, проведенный исключительно на ПК, занял бы приблизительно 30 часов, а с использованием  $(775/8) \approx 97$  вычислительных узлов кластера – 30 минут. Расчет максимальной амплификации при тех же условиях занимает примерно втрое меньше времени, чем расчет критических чисел Рейнольдса.

Таблица 2.3: Расчет 8-и задач для различных пар  $(\alpha, \beta)$  на пространственной сетке  $50 \times 11$  при разных количествах ядер, используемых для решения одной задачи.

Ядер на одну задачу	1	2	4	8
Всего использовано узлов	1	2	4	8
REEL, время в сек.	1482	910	673	525
ГАММА, время в сек.	523	305	207	163



В библиотеке MKL есть механизм, так называемый *threading*, который позволяет при выполнении процедур этой библиотеки задействовать заданное количество ядер. Это позволяет дополнительно сокращать время расчета в случае, когда на восьмиядерный узел помещается 4 или меньше задач, или когда доступно большое количество вычислительных узлов. Полученное ускорение может зависеть от реализации и версии библиотеки MKL. В таблице 2.3 приведены результаты расчета для 8 пар  $(\alpha, \beta)$  на пространственной сетке  $50 \times 11$  при разных количествах ядер, используемых для решения одной задачи. Несмотря на плохую масштабируемость (расчет на 8 ядрах происходит лишь в три раза быстрее, чем на 1 ядре), использование нескольких ядер значительно снижает затраченное на расчет время. Например, использовав 775 вычислительных узлов вместо 97 при расчете для 775 пар спектральных параметров, этот расчет можно провести за 10 минут вместо 30.

Для исследования оребрения, рассмотренного в этом подразделе, достаточно сетки  $50 \times 11$ , однако для оребрения, исследованного в диссертационной работе, оказалась необходима более мелкая сетка (см. раздел 3.5). На один вычислительный узел помещается восемь задач при сетке, например,  $60 \times 17$  (см. таблицу 2.1). Вычисление на такой сетке критических чисел Рейнольдса при использовании восьми ядер для решения каждой задачи занимает 1 час. Вычисление на близкой к максимальной для одного восьмиядерного узла сетке  $115 \times 25$  занимает 24 часа.

Таким образом, реализация технологии для вычислительных кластеров позволяет проводить массовые параметрические расчеты по исследованию устойчивости течений в оребренных каналах за приемлемое время.

## 2.7 Канал с гребенчатым оребрением

В данном разделе, следуя работе [24], рассматривается возможность включения в технологию случая гребенчатого оребрения, представляющего собой

бесконечно тонкие разрезы на нижней стенке канала. Период поперечного сечения такого канала имеет вид  $[-l; l] \times [0, 2] \setminus \{0\} \times [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon < 2$ . Для построения расчетной сетки в области поперечного сечения канала вместо отображения Гордона–Холла (2.2.3) использовалось конформное отображение, предложенное в [60]. Приведены результаты расчетов основного течения и кривых нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением при  $2l = 1$  и  $\varepsilon = 0.4$ , а также для каналов с волнистым оребрением. Расчеты были проведены на кластерах МВС100К (МСЦ РАН) и «Ломоносов» (МГУ) с помощью реализации технологии для кластеров [23].

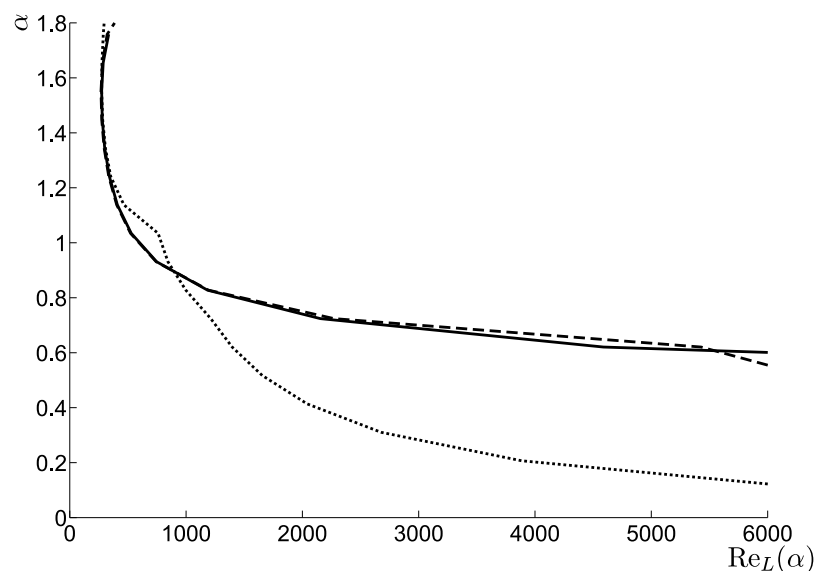


Рисунок 2.1: Зависимость  $\text{Re}_L(\alpha)$ , вычисленная на сетках размеров  $m_r \times m_s = 14 \times 13$  (пунктир),  $27 \times 23$  (штриховая линия) и  $54 \times 45$  (сплошная линия).

На рис. 2.1 представлены кривые нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением, рассчитанные на сетках размеров  $m_r \times m_s = 14 \times 13$ ,  $27 \times 23$  и  $54 \times 45$ . Видна хорошая сходимость по шагу сетки, особенно в области минимального  $\text{Re}_L$ , что позволяет вычислять глобальное критическое число Рейнольдса с хорошей точностью.

Кривую нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением можно получить предельным переходом при  $\rho \rightarrow \infty$ , рассматривая каналы с

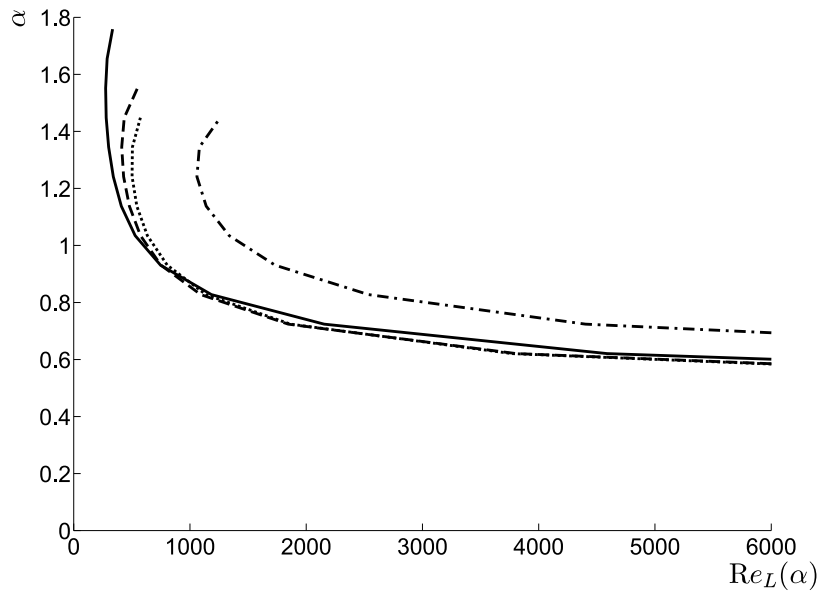


Рисунок 2.2: Зависимость  $\text{Re}_L(\alpha)$  для канала с гребенчатым оребрением (сплошная кривая) и для канала с волнистым оребрением при  $\rho = 2$  (штрих с точкой), 6 (пунктир) и 10 (штриховая линия).

волнистым оребрением нижней стенки вида

$$\eta(z) = 1 - \varepsilon \left( \left| \cos \frac{\pi z}{2l} \right|^\rho - h_\rho \right), \quad (2.7.1)$$

где  $\varepsilon$  такое же, как для гребенчатого оребрения, а  $h_\rho$  выбирается так, чтобы обеспечить единичную полувысоту канала. На рис. 2.2 изображены кривые нейтральной устойчивости для волнистого оребрения с  $\rho = 2, 6$  и  $10$ , а также для гребенчатого оребрения. Видно, что кривые нейтральной устойчивости для волнистого оребрения с ростом  $\rho$  приближаются к кривой для гребенчатого оребрения.

## 2.8 Выводы

В этой главе даны слабые постановки уравнения Пуассона для расчета профиля основного течения и линеаризованных уравнений эволюции элементарных возмущений. Предложена пространственная аппроксимация этих задач

методом Галеркина-коллокаций, приводящая для уравнений эволюции элементарных возмущений к дифференциально-алгебраической системе одного и того же вида для всех значений волновых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  и параметров оребрения. Описана оригинальная алгебраическая редукция для понижения размерности полученной системы, метод вычисления с заданной точностью линейного и энергетического критических чисел Рейнольдса и быстрый метод вычисления с заданной точностью максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений, основанный на малоранговой аппроксимации матричной экспоненты. Рассмотрена возможность распространения технологии на случай гребенчатого оребрения. Предложена реализация этой технологии для вычислительных кластеров и показано, что она позволяет проводить массовые параметрические расчеты за приемлемое время.

## Глава 3

# Зависимость характеристик устойчивости от параметров оребрения

Эта глава посвящена анализу результатов численных экспериментов с модельным поперечно-периодическим волнистым продольным оребрением нижней стенки канала.

### 3.1 Параметры оребрения и профиль основного течения

Далее мы будем рассматривать течение Пуазейля в канале с волнистым оребрением следующего вида:

$$\eta_1(z) = 1 - \varepsilon \left( \left| \cos \frac{\pi z}{L} \right|^\rho - h_\rho \right), \quad \eta_2(z) = 1, \quad (3.1.1)$$

где  $L = 2l$  — период оребрения,  $0 \leq \varepsilon < 1$  — высота ребер,  $\rho > 0$  — параметр, определяющий их «заостренность», а  $h_\rho$  — число, выбираемое так,

чтобы обеспечить единичную среднюю полувысоту канала:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} dy dz = 1.$$

Нетрудно проверить, что

$$h_\rho = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left| \cos \frac{\pi s}{2} \right|^\rho ds$$

и, следовательно,  $0 < h_\rho < 1$ . В частности,

$$h_\rho = \frac{1}{2}, \quad \eta_1(z) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{2\pi z}{L}$$

при  $\rho = 2$  и

$$h_\rho = \frac{3}{8}, \quad \eta_1(z) = 1 - \varepsilon \left( \cos^4 \frac{\pi z}{L} - \frac{3}{8} \right)$$

при  $\rho = 4$ . Примеры поперечного сечения канала при этих двух значениях  $\rho$  приведены на рис. 3.1.

В случае  $\varepsilon = 0$  канал является плоским (величина  $\rho$  при этом роли не играет), а в случае  $\varepsilon > 0$  — оребренным. При варьировании  $z$  полувысота оребренного канала меняется от  $h_{\min}(\varepsilon, \rho) = 1 + \varepsilon(h_\rho - 1)/2 < 1$  до  $h_{\max}(\varepsilon, \rho) = 1 + \varepsilon h_\rho/2 > 1$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  величина  $h_\rho$  монотонно убывает до 0, а оребрение стремится к бесконечно тонким вертикальным разрезам высоты  $\varepsilon$ , расположенным на расстоянии  $L$  друг от друга.

На рис. 3.2 и 3.3 слева представлены нормированные профили скорости основного течения в плоском и оребренных каналах при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и нескольких значениях периода оребрения. Справа изображены сечения профилей плоскостью, перпендикулярной поперечному направлению, при нескольких характерных значениях  $z$ . Видно, что с ростом периода оребрения скорость основного течения увеличивается в межреберной области, что приводит к уменьшению средней скорости в надреберной части канала. При небольших периодах оребрения профили имеют значительную перегибность по  $y$ , а при больших — по  $z$ , перегибность по  $y$  при этом исчезает.

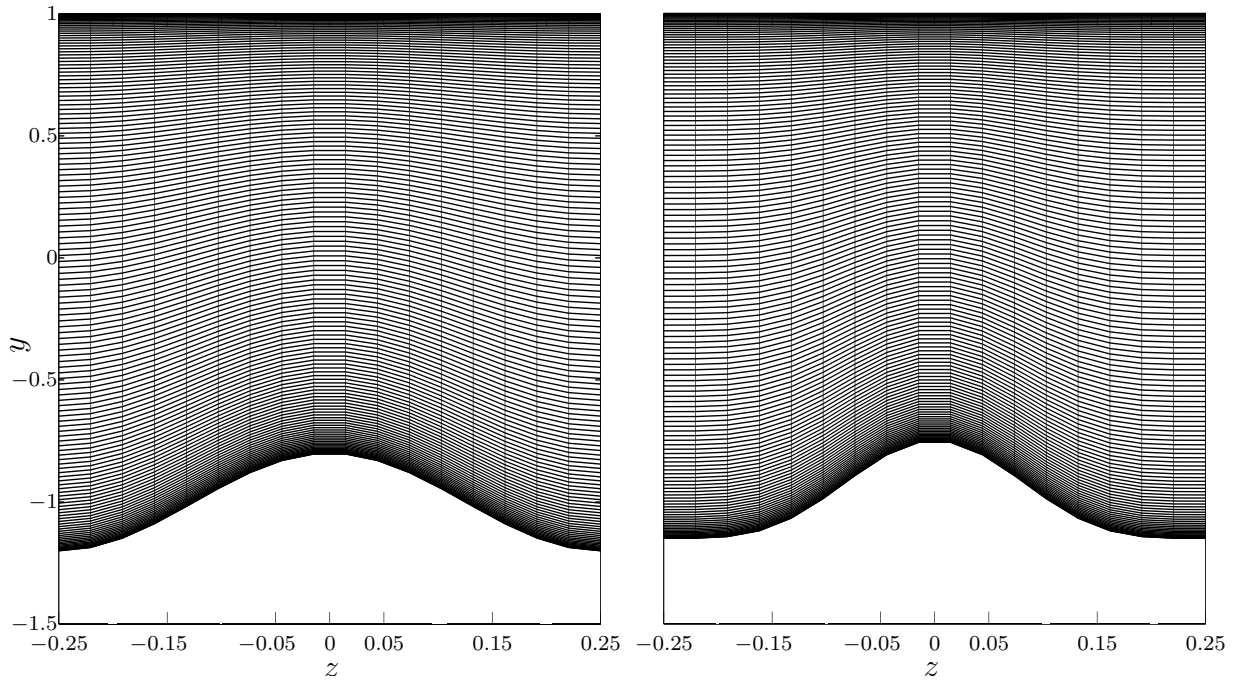


Рисунок 3.1: Поперечное сечение канала (один период) при  $L = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и  $\rho = 2$  (слева) и  $\rho = 4$  (справа) и соответствующие сетки с числом узлов  $140 \times 17$ .

## 3.2 Гипотеза об оптимальном и критических возмущениях

Для плоского течения Пуазейля справедлива теорема Сквайра (см. раздел 1.6), которая утверждает, что глобальное линейное критическое число Рейнольдса  $Re_L$  достигается на возмущениях вида (1.5.1) с  $\gamma = 0$  и неравным нулю продольным волновым числом  $\alpha$ . В данном разделе мы продемонстрируем, что в случае течения Пуазейля в оребренном канале справедливо аналогичное утверждение:  $Re_L$  достигается на возмущениях вида (1.3.1) с  $\beta = 0$  и неравным нулю  $\alpha$ . Кроме того, мы покажем, что глобальное энергетическое критическое число Рейнольдса  $Re_E$  и максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений  $\Gamma_{\max}(Re)$  при  $Re_E < Re < Re_L$  достигаются на возмущениях вида (1.3.1) с  $\alpha = 0$  и, вообще говоря, неравными нулю  $\beta$ .

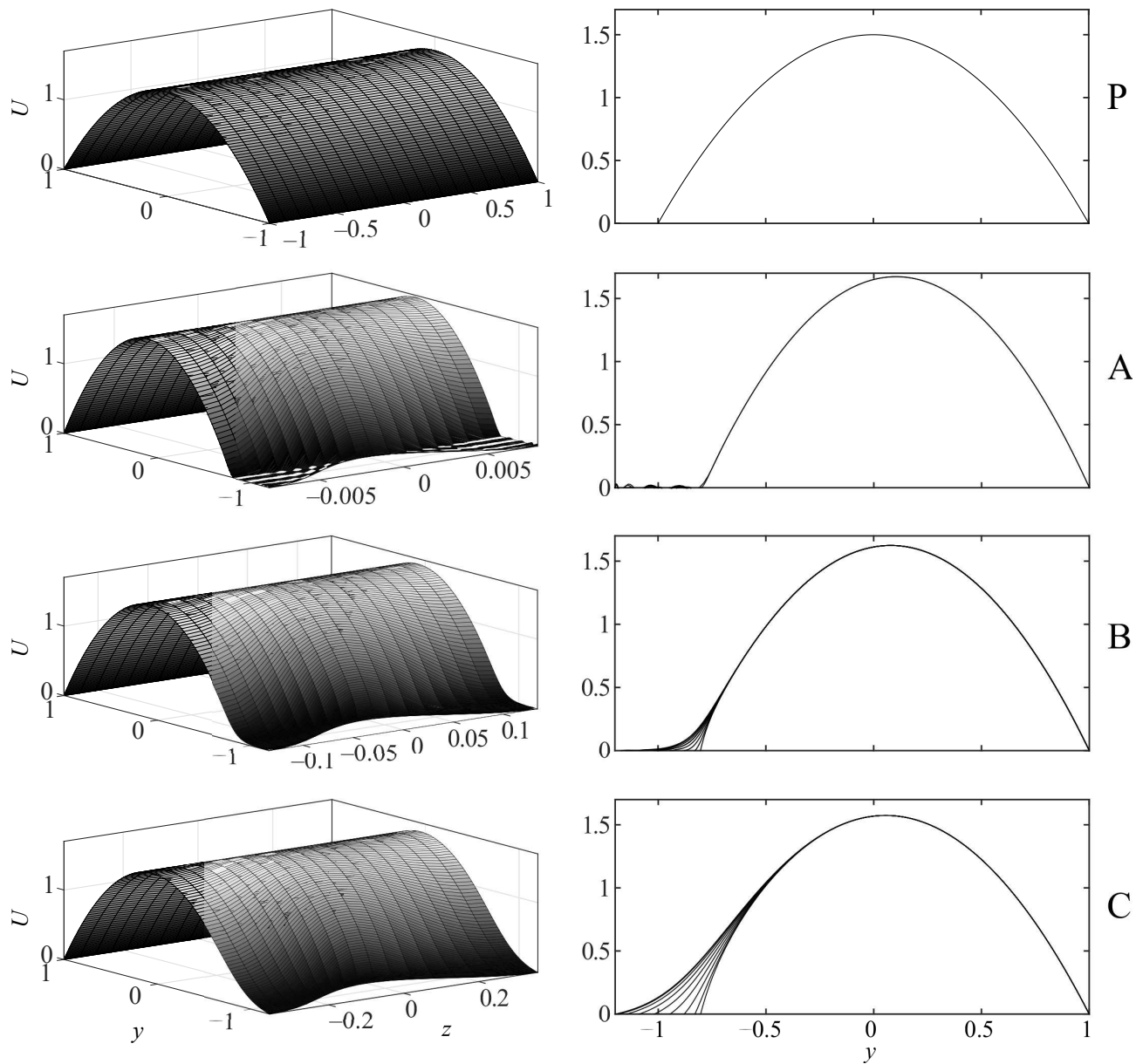


Рисунок 3.2: Профиль основного течения в плоском канале (P) и ребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C соответственно).



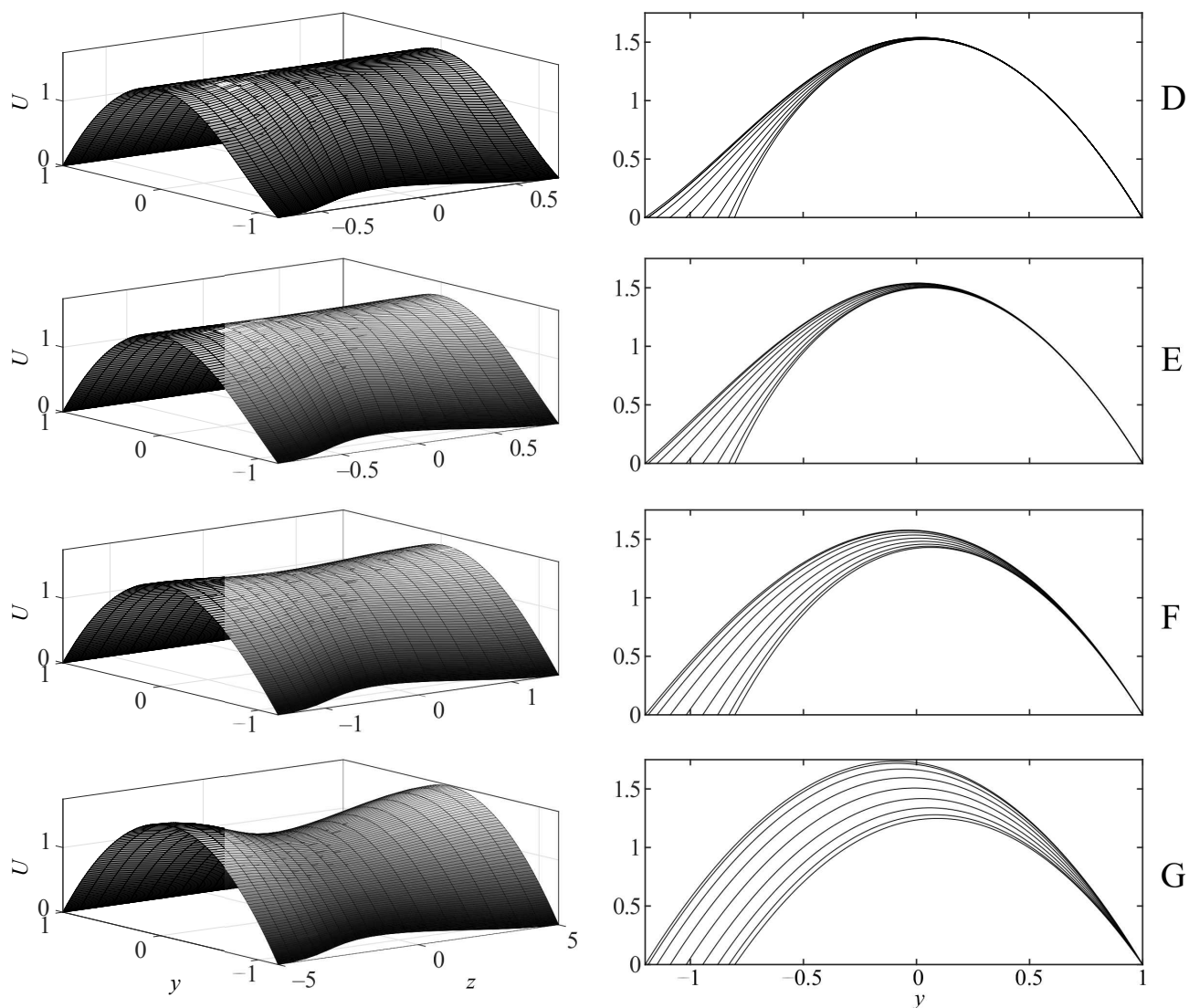


Рисунок 3.3: Профиль основного течения в ребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и  $L = 1.444, 1.836, 3.012$  и  $10$  (D, E, F и G соответственно).

Указанные свойства характеристик устойчивости мы далее будем называть *гипотезой об оптимальном и критических возмущениях*. В данной работе предъявлено лишь численное подтверждение этой гипотезы. Однако тот факт, что во всех экспериментах при всех рассмотренных параметрах оребрения она оказывалась справедливой, дает основание предполагать, что возможно и ее теоретическое обоснование.

Некоторые результаты расчетов, подтверждающие гипотезу об оптимальном и критических возмущениях, представлены на рис. 3.4 и 3.5, где при восьми различных наборах параметров оребрения изображены линии уровня энергетического  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  и линейного  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$  средней плотности кинетической энергии возмущений как функций параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Видно, что в соответствии с этой гипотезой минимум  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  и максимум  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$  достигаются при  $\alpha = 0$ , а минимум  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  достигается при  $\beta = 0$ .

Поскольку рассматриваемое оребрение является четным по  $z$ , расчеты выполнялись в соответствии с теоремой 1.3.1 только для неотрицательных значений  $\alpha$  и  $\beta \in [0, \pi/L]$ . Характеристики устойчивости вычислялись в узлах равномерной сетки с числом узлов  $n_\alpha = 20$  по  $\alpha$  и  $n_\beta = 30$  по  $\beta$  в изображенных областях значений этих параметров. Для пространственной аппроксимации использовались сетки с числом узлов  $m_r \times m_s = 140 \times 17$ . Образы таких сеток в плоскости сечения канала изображены на рис. 3.1.

Отметим, что линии уровня линейного критического числа Рейнольдса, изображенные на рис. 3.5, демонстрируют некоторую хаотичность в области больших значений  $\beta$  (верхняя часть рисунка). Это связано с тем, что при периоде оребрения  $L = 3$  и больших значениях  $\beta$  начинают конкурировать ведущие моды двух различных симметрий (см. раздел 3.3.2) и, как следствие, зависимость  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  оказывается более сложной. Выбранная сетка по  $\alpha$  и  $\beta$  оказывается недостаточно мелкой для аккуратной отрисовки этой зависимости.

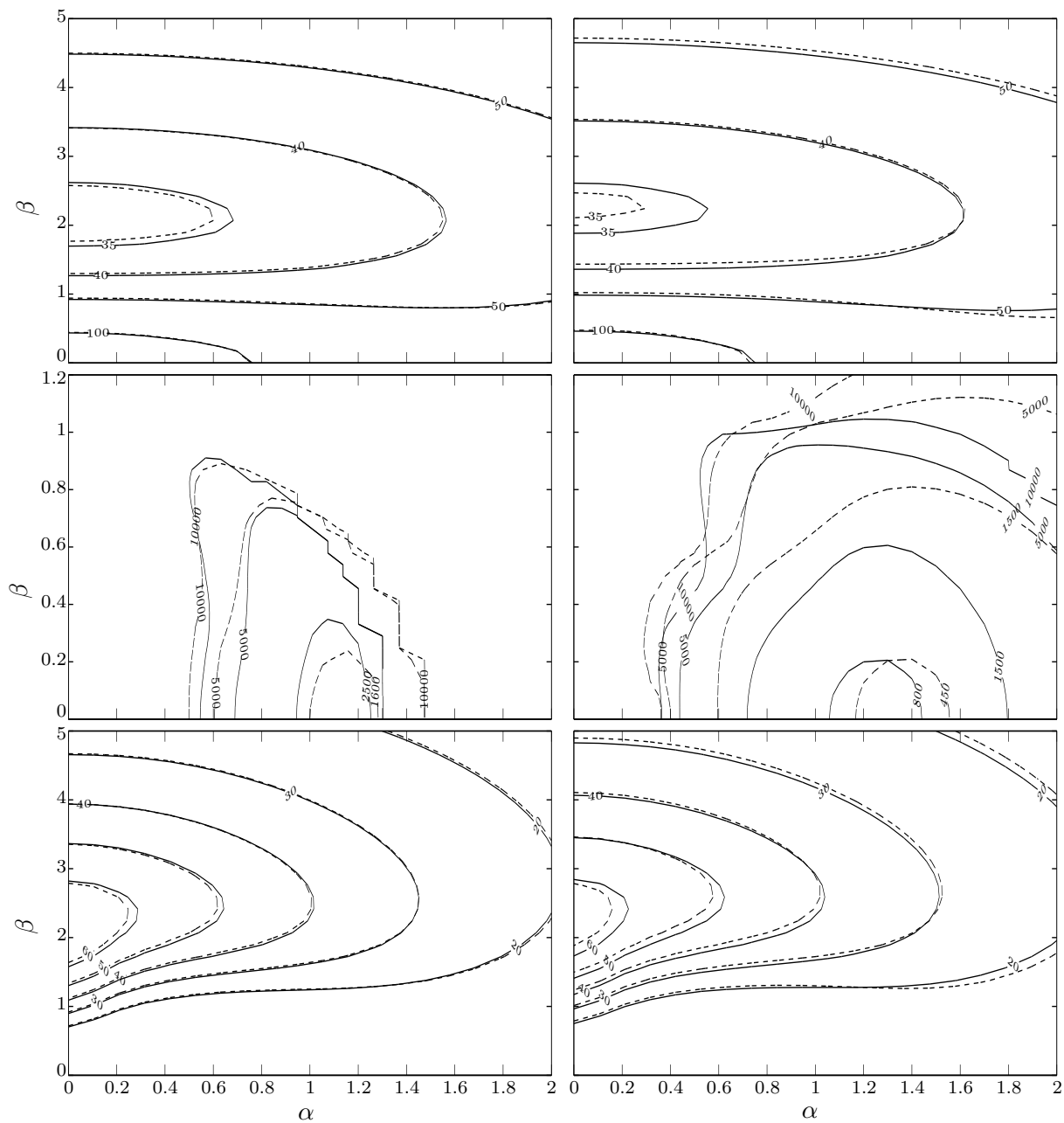


Рисунок 3.4: Линии уровня  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  (вверху),  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  (посередине) и  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$  (внизу) для  $L = 0.5$  и  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\rho = 2$  (—) и  $4$  (- -).

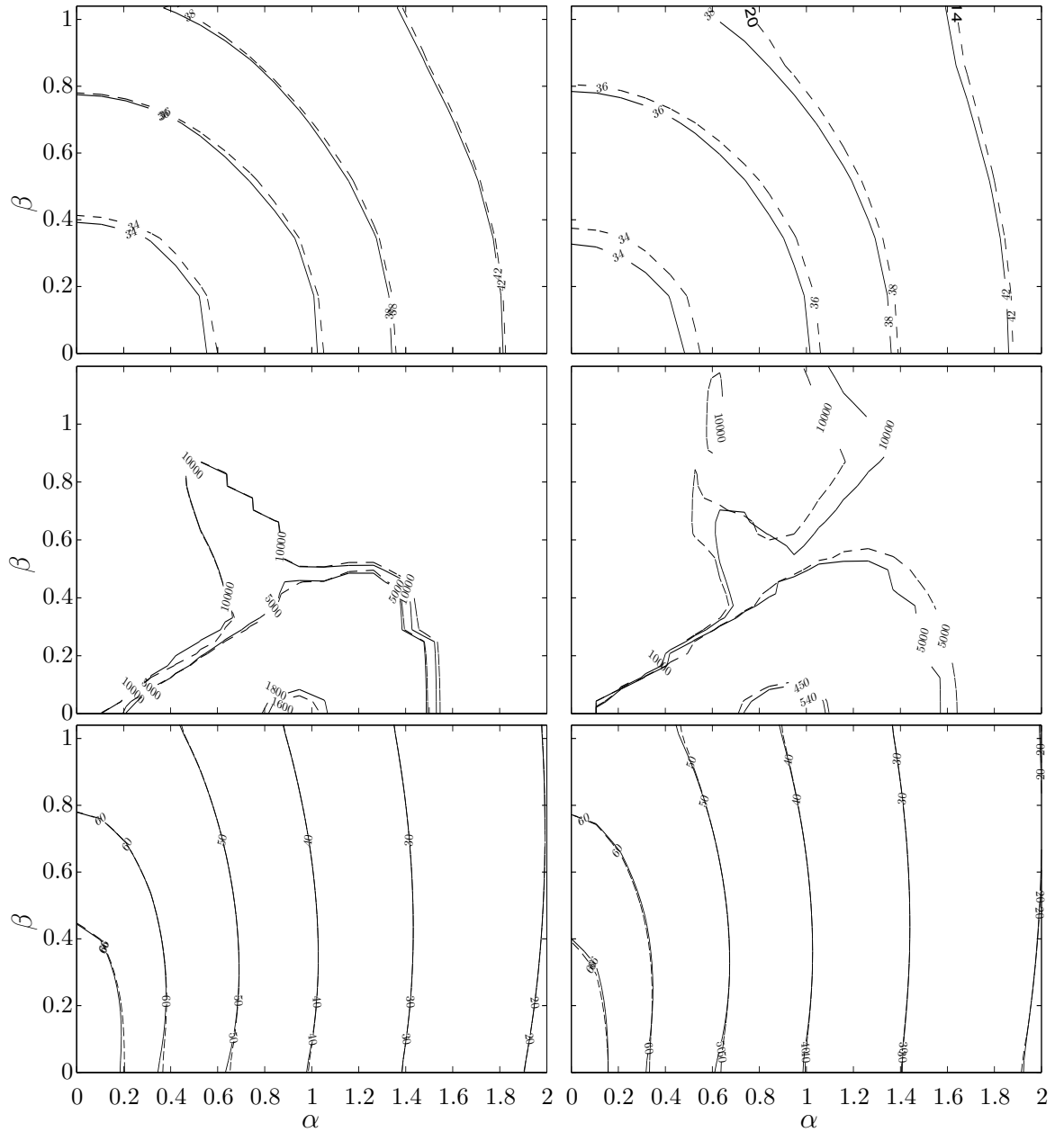


Рисунок 3.5: Линии уровня  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  (вверху),  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  (посредине) и  $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$  (внизу) для  $L = 3$  и  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\rho = 2$  (—) и  $4$  (- -).

Поскольку это происходит в области больших значений  $Re_L^{\alpha\beta}$ , на вывод о том, что  $Re_L^{\alpha\beta}$  достигает минимума при  $\beta = 0$ , это обстоятельство не влияет.

При числе Рейнольдса, большем  $Re_L$ , максимальная амплификация плотности кинетической энергии возмущений становится очевидно равной бесконечности. На рис. 3.6 на примере плоского канала показано, где с ростом  $Re$  при  $Re > \widetilde{Re}_L = 3848.2$  появляется область значений  $(\alpha, \gamma)$  (темно-серая), в которой величина  $\widetilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(Re)$  равна бесконечности. С ростом  $Re$  эта область расширяется. Как и следовало ожидать,  $\widetilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(Re) = \infty$  в области наименьших значений  $Re_L^{\alpha\gamma}$ . Интересно, что вокруг этой области величина  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}(Re)$  остается небольшой, а ее максимум за пределами этой области по-прежнему достигается при нулевом значении  $\alpha$  и ненулевом значении  $\gamma$ . Это подтверждает, что оптимальные возмущения по своей природе существенно отличаются от критических возмущений при всех докритических значениях числа Рейнольдса.

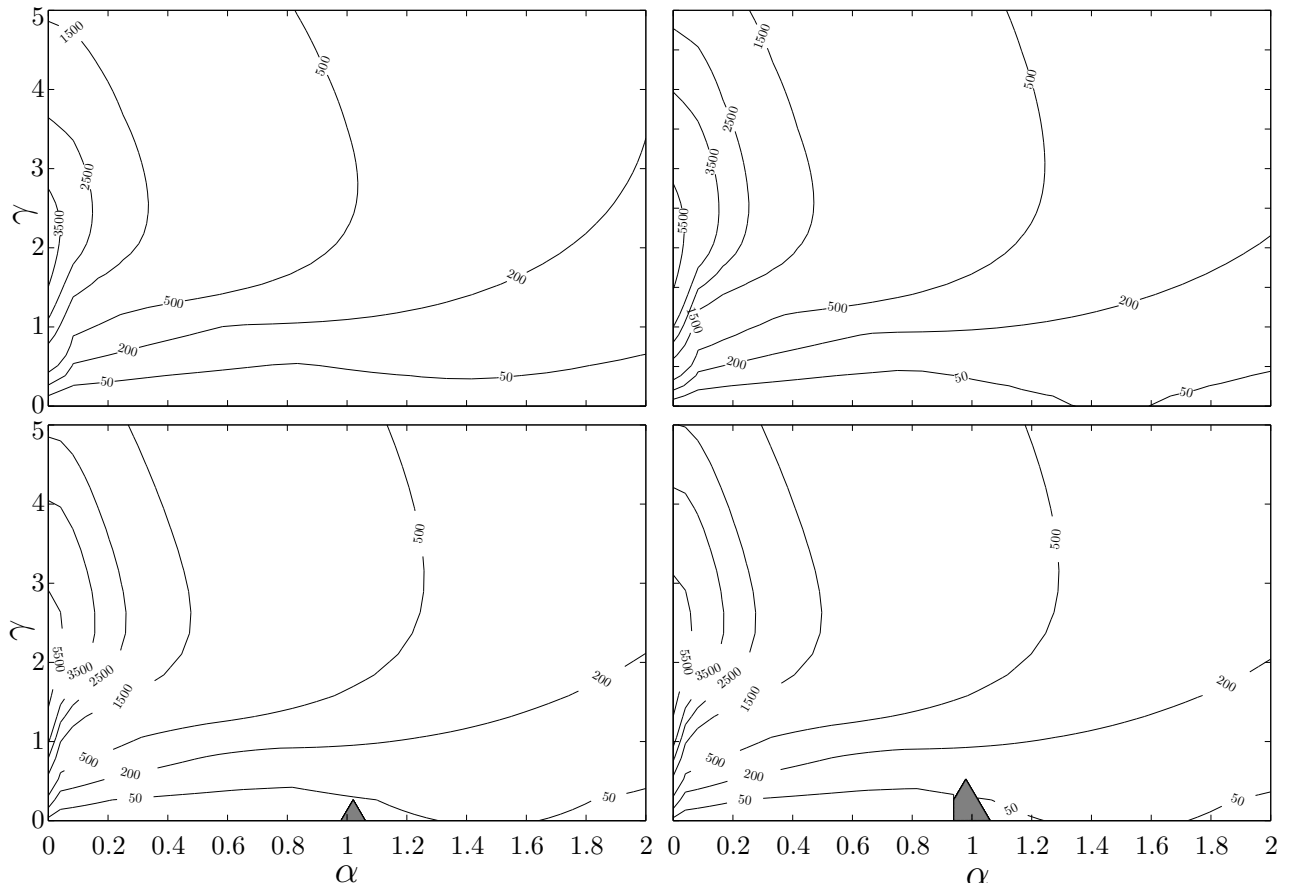


Рисунок 3.6: Линии уровня  $\tilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re})$  для плоского канала, вычисленные при  $\text{Re} = 3000$  (сверху слева),  $\text{Re} = 3800$  (сверху справа),  $\text{Re} = 3860$  (снизу слева) и  $\text{Re} = 4000$  (снизу справа). В темно серых областях  $\tilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re}) = \infty$  (на двух нижних рисунках).

### 3.3 Зависимость критических чисел Рейнольдса от параметров оребрения

В данном разделе мы рассмотрим зависимости критических чисел Рейнольдса и критических возмущений от параметров оребрения (3.1.1). На всех графиках в этом разделе значению  $\rho = 2$  соответствуют сплошные линии, а значению  $\rho = 4$  — штриховые. Зависимости при  $\varepsilon = 0.2$  изображены слева, а при  $\varepsilon = 0.4$  — справа. Значения энергетического  $\widetilde{Re}_E$  и линейного  $\widetilde{Re}_L$  критических чисел Рейнольдса течения Пуазейля в плоском канале изображены на графиках горизонтальными пунктирными линиями.

Период оребрения  $L$  будем варьировать в интервале от 0.016 до 4.048 с шагом 0.028, обращая особое внимание на значения 0.016, 0.268, 0.716, 1.444, 1.836 и 3.012. Кроме того, мы рассмотрим период оребрения  $L = 10$ . Соответствующие этим значениям рисунки и результаты в таблицах будем обозначать буквами A, B, C, D, E, F и G соответственно. Профили основного течения и их сечения при этих значениях периода оребрения изображены на рис. 3.2 и 3.3.

Расчеты для оребренного канала выполнялись с использованием пространственной сетки размера  $140 \times 17$ , кроме расчетов при  $L < 1$ , где для обеспечения достаточной точности использовалась сетка размера  $140 \times 35$  (см. раздел 3.5). Выбор интервала периодов оребрения был обусловлен тем, что при  $L \sim 1$  можно было предполагать наличие нетривиальных существенно трехмерных эффектов. Высоты ребер были выбраны достаточно большими с тем, чтобы соответствовать по порядку величины использованным в предшествующих работах (см., например, [3, 61]). Заостренность ребер была ограничена доступным пространственным разрешением, поскольку с увеличением  $\rho$  основное течение и критические возмущения становятся менее гладким, что приводит к необходимости увеличивать число узлов по  $y$  и  $z$  для достижения сходимости по шагу сетки. Тем не менее отдельные расчеты, выполненные для  $\rho = 10$  и  $\rho = \infty$  (гребенчатое оребрение), не привели к качественно новым резуль-

татам. В первом случае использовалось более высокое пространственное разрешение, а во втором — вместо отображения Гордона–Холла использовалось конформное отображение [24].

Во всех расчетах мы предполагали, что для течения Пуазейля в оребренном канале справедлива гипотеза об оптимальном и критических возмущениях, и ограничивались при вычислении каждого из критических чисел Рейнольдса варьированием одного из параметров,  $\alpha$  либо  $\beta$ , зафиксировав нулевое значение второго, что значительно уменьшало вычислительные затраты. При расчете  $Re_L$  фиксировалось значение  $\beta = 0$  и проводилась оптимизация по  $\alpha$  в интервале  $0.6 \leq \alpha \leq 1.6$ . В ходе расчетов проверялось, что оптимальное значение не находится на границе этого интервала. При расчете  $Re_E$  фиксировалось значение  $\alpha = 0$  и проводилась оптимизация по  $\beta$  в интервале, зависящем от периода оребрения. Для каждого значения периода интервал выбирался так, чтобы оптимальное значение  $\beta$  для плоского канала было близко к центру этого интервала. В ходе расчетов проверялось, чтобы оптимум не находился на границе выбранного интервала и чтобы найденное оптимальное значение  $\beta$  не превышало  $\pi/L$ , так как для рассматриваемого оребрения достаточно ограничиться  $0 \leq \beta \leq \pi/L$ .

Поскольку для плоского канала критические числа Рейнольдса не зависят от периода оребрения, расчеты в этом случае выполнялись при одном значении периода оребрения  $L = 0.5$  на пространственной сетке  $140 \times 1$ , что соответствует выбору возмущений вида (1.5.1) в качестве элементарных с  $\gamma = 0$  для расчета  $Re_L$  и с  $\alpha = 0$  для расчета  $Re_E$ . В последнем случае зависимость  $\beta_E(L)$  рассчитывалась с помощью формулы (1.5.3).

Зависимости  $Re_E$  и  $Re_L$  от периода оребрения при различных  $\rho$  и  $\varepsilon$  изображены на рис. 3.7. На рис. 3.8 изображены соответствующие зависимости  $\beta_E$  и  $\alpha_L$  от периода оребрения. Значения  $Re_L$  и  $\alpha_L$  вычислялись отдельно для симметрий  $I$  и  $II$  (см. конец раздела 1.3, а также разделы 1.7 и 2.2). Далее мы будем обозначать эти значения через  $Re_L^I$ ,  $\alpha_L^I$  и  $Re_L^{II}$ ,  $\alpha_L^{II}$ , соответственно.



Глобальным  $Re_L$  и  $\alpha_L$  при каждом значении периода соответствует нижняя из двух кривых, отвечающих одним и тем же значениям  $\rho$  и  $\varepsilon$  и двум различным симметриям.

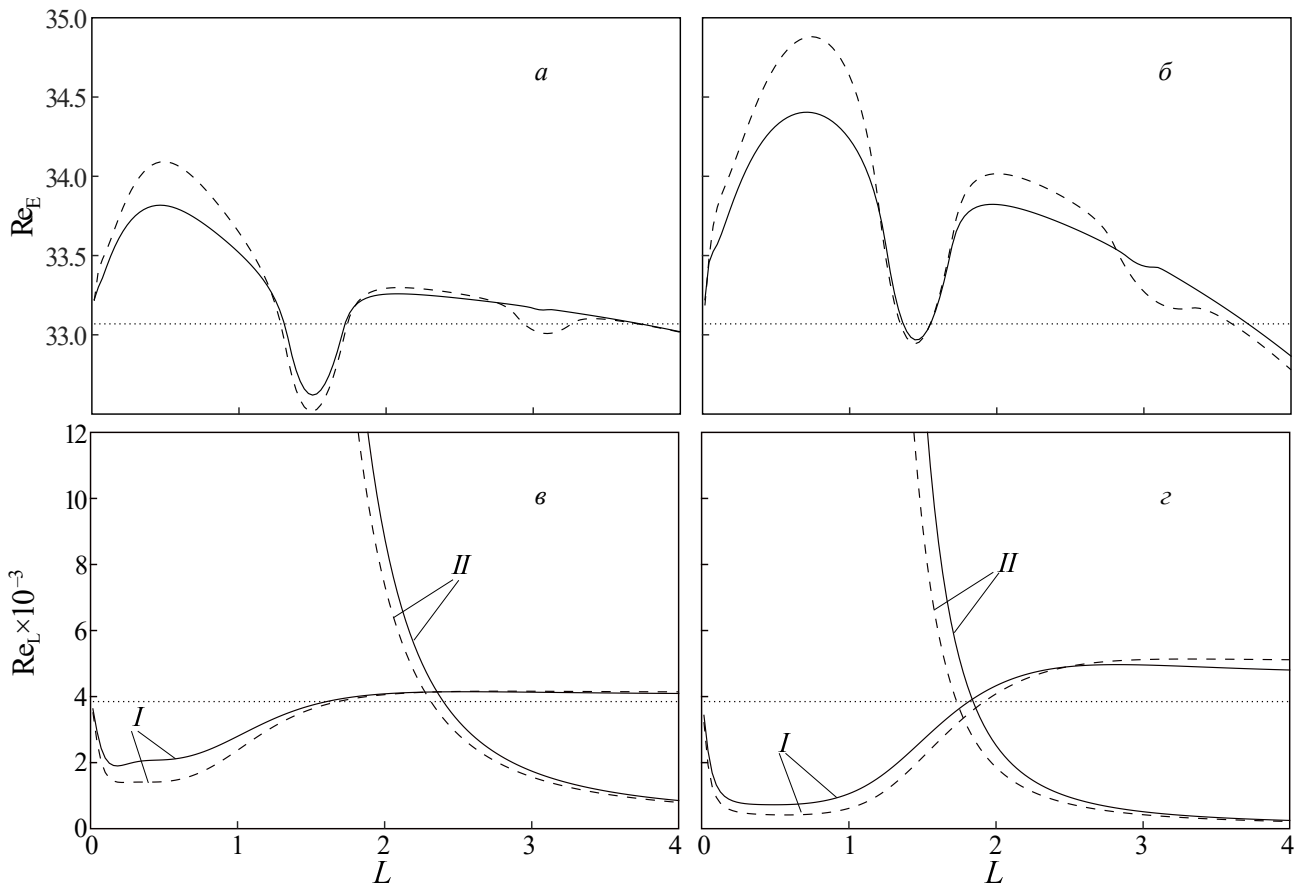


Рисунок 3.7: Зависимости  $Re_E$  (сверху) и  $Re_L$  (снизу) от периода оребрения для  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\rho = 2$  (—) и  $4$  (- -);  $\widetilde{Re}_E \approx 33.07$ ,  $\widetilde{Re}_L \approx 3.848 \times 10^3$  ( $\cdots$ ).

Из рис. 3.7 видно, что  $Re_E$  и  $Re_L$  достаточно сложно зависят от периода оребрения. С увеличением как  $\rho$ , так и  $\varepsilon$  отклонение их значений для оребренного канала от значений для плоского канала (пунктирные линии) увеличивается. Вместе с тем, зависимость от периода оребрения каждого из критических чисел Рейнольдса качественно не меняется при варьировании  $\rho$  и  $\varepsilon$ . В двух следующих подразделах мы рассмотрим эти зависимости более подробно и дадим их физическое объяснение.

Анализ рис. 3.7 также показывает, что наряду со случаем, когда оребрение увеличивает энергетическое критическое число Рейнольдса и уменьшает

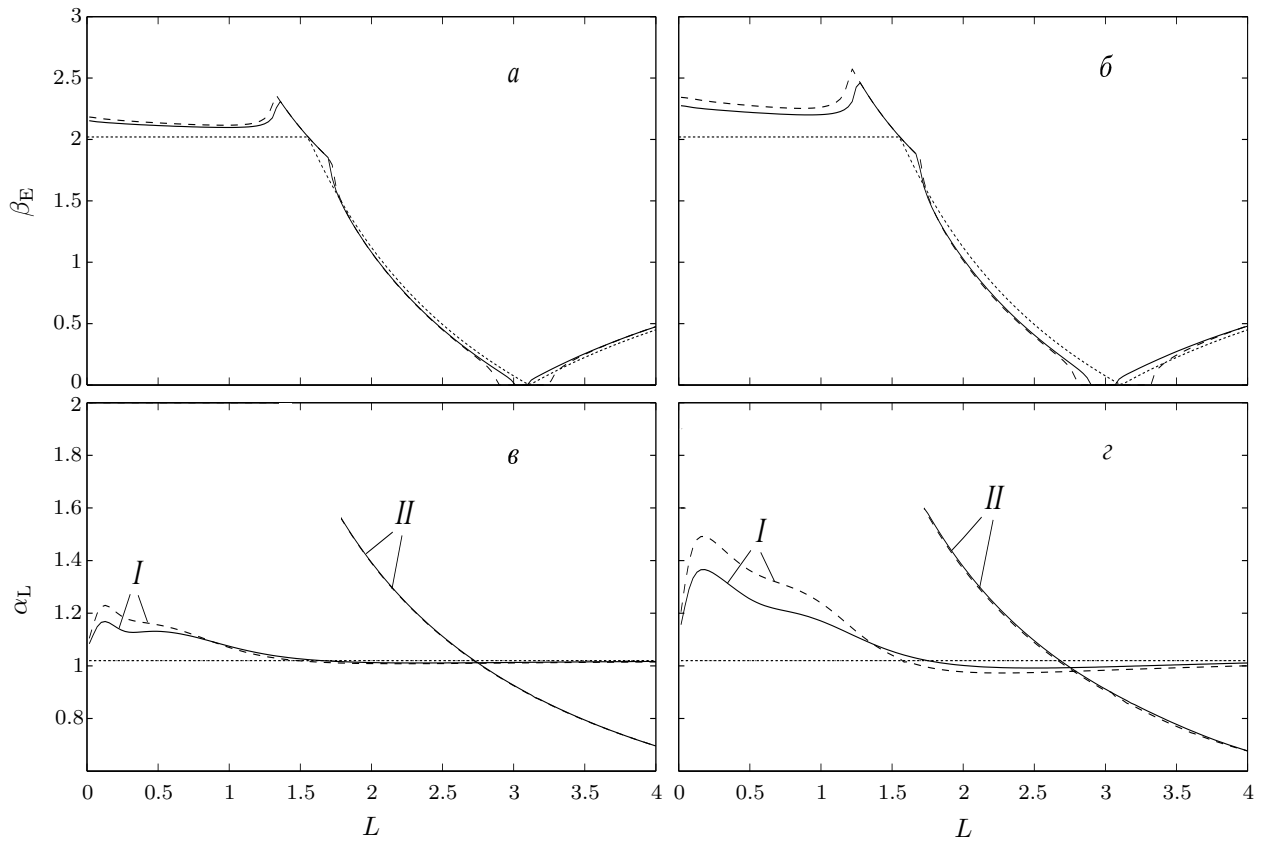


Рисунок 3.8: Зависимости  $\beta_E$  (сверху) и  $\alpha_L$  (снизу) от периода оребрения для  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\rho = 2$  (—) и  $4$  (- -);  $\tilde{\beta}_E$  и  $\tilde{\alpha}_L$  ( $\cdots$ )

линейное (например, при  $L = 0.604$ ), оно может, при определенных значениях периода, уменьшить оба критических числа Рейнольдса (например, при  $L = 1.416$ ), а также оно может увеличить оба критических числа Рейнольдса (например, при  $L = 2.088$  и  $\varepsilon = 0.2$ ), как и уменьшить энергетическое критическое число Рейнольдса и увеличить линейное (например, при  $L = 1.696$  и  $\varepsilon = 0.2$ ).

Таким образом, оребрение может отдалить докритический ламинарно-турбулентный переход и приблизить естественный, может приблизить и докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы, а может отдалить и докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы, как и приблизить докритический и отдалить естественный.

### 3.3.1 Энергетическое критическое число Рейнольдса

Как можно видеть из рис. 3.7, в большей части рассмотренного интервала периодов оребрения энергетическое критическое число Рейнольдса  $Re_E$  оребренного канала в соответствии с данными предшествующих работ [28, 29, 62, 63] превосходит энергетическое критическое число Рейнольдса  $\widetilde{Re}_E$  плоского канала. Кривые  $Re_E(L)$  имеют в этом интервале глобальный (слева) и локальный (справа) максимумы и локальный минимум между ними. Увеличение высоты ребер  $\varepsilon$  приводит главным образом к увеличению  $Re_E$  в целом, а увеличение параметра  $\rho$  заостренности ребер — к увеличению разброса значений  $Re_E$ . Величина глобального максимума существенно зависит как от  $\varepsilon$ , так и от  $\rho$ , а его положение существенно зависит лишь от  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0.4$  и  $\rho = 4$  максимальное значение  $Re_E$  отличается от  $\widetilde{Re}_E$  примерно на 5.5%. Положение локального максимума слабо зависит как от  $\varepsilon$ , так и от  $\rho$ , и находится вблизи  $L = 1.8$ . Максимальное значение  $Re_E$  отличается в данном случае от  $\widetilde{Re}_E$  примерно на 3.4% при  $\varepsilon = 0.4$  и  $\rho = 4$ . Положение локального минимума  $L_{\min} \approx 1.5$ , причем  $Re_E < \widetilde{Re}_E$  в окрестности  $L_{\min}$ . Минимальное значение довольно слабо зависит от  $\rho$ , но с увеличением  $\varepsilon$  оно заметно увеличивается и, как следствие, уменьшается интервал периодов, при которых  $Re_E < \widetilde{Re}_E$ . Минимальное значение  $Re_E$  отличается от  $\widetilde{Re}_E$  примерно на 1.7% при  $\varepsilon = 0.2$  и  $\rho = 4$ .

В таблице 3.1 для плоского и оребренного каналов при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и нескольких значениях периода оребрения приведены значения  $Re_E$  и параметров критических возмущений, отвечающих  $Re_E$ . На рис. 3.9 и 3.10 для каждого из этих возмущений изображена действительная часть проекции его вектора скорости на плоскость сечения канала, а на рис. 3.11 и 3.12 изображен квадрат модуля такой проекции, нормированный на среднюю плотность кинетической энергии полного возмущения. Распределения плотности кинетической энергии полного критического возмущения демонстрируют рис. 3.13 и 3.14, где

Таблица 3.1: Параметры критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}_E$ , для плоского канала (P) и оребренного канала при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и некоторых значениях периода оребрения.

	P	A	B	C	D	E	F	G
$L$	–	0.016	0.268	0.716	1.444	1.836	3.012	10.0
$\text{Re}_E$	33.069	33.134	34.069	34.404	32.968	33.793	33.431	28.763
$\beta_E$	2.0437	2.2805	2.2440	2.2064	2.1755	1.3210	$1.81 \times 10^{-4}$	$5.43 \times 10^{-5}$
$\Lambda$	3.0000	2.7549	2.7956	2.8218	2.8880	3.1320	3.0120	3.0864
$\mathcal{E}(u')/\mathcal{E}(v')$	0.3457	0.4067	0.4222	0.4164	0.2986	0.3490	0.3392	0.3446
$\mathcal{E}(v')/\mathcal{E}(w')$	0.2350	0.1547	0.1527	0.1432	0.1508	0.1557	0.1511	0.1802
$\mathcal{E}(w')/\mathcal{E}(v')$	0.4193	0.4385	0.4252	0.4404	0.5506	0.4953	0.5097	0.4752

для тех же нормированных критических возмущений изображен квадрат модуля полной скорости.

Отметим, что действительная часть проекции вектора скорости критического возмущения на плоскость поперечного сечения канала — это, в случае плоского канала, двумерное поле скорости с компонентами

$$\text{Real}(\tilde{v}'(y) \exp\{\mathbf{i}\gamma_E z\}), \quad \text{Real}(\tilde{w}'(y) \exp\{\mathbf{i}\gamma_E z\}), \quad (3.3.1)$$

где  $\tilde{v}'$  и  $\tilde{w}'$  — компоненты амплитуды вектора скорости критического возмущения вида (1.5.5) в вертикальном и поперечном направлениях соответственно, а в случае оребренного канала — двумерное поле скорости с компонентами

$$\text{Real}(\tilde{v}(y, z) \exp\{\mathbf{i}\beta_E z\}), \quad \text{Real}(\tilde{w}(y, z) \exp\{\mathbf{i}\beta_E z\}), \quad (3.3.2)$$

где  $\tilde{v}$  и  $\tilde{w}$  — компоненты амплитуды вектора скорости критического возмущения вида (1.3.10) в вертикальном и поперечном направлениях соответственно.

Из рис. 3.9 и 3.10 видно, что критические возмущения представляют собой противорвращающиеся в плоскости сечения канала продольные вихревые пары, поперечный период  $\Lambda$  которых слабо зависит от параметров оребрения и составляет 2.7–3.2 (в случае плоского канала  $\Lambda \approx 3.0$ ). Минимум  $\text{Re}_E$  дости-

гается, когда размер одного такого вихря из пары близок к периоду оребрения, то есть наиболее «благоприятный» по отношению к критическим возмущениям период оребрения  $L_{\min} \approx \Lambda/2$ .

При «благоприятном» периоде оребрения каждый вихрь расположен между выступающими в поток гребнями ребер и граница канала «охватывает» нижнюю пристенную часть вихрей, поэтому «кажущаяся» или эффективная полувысота канала по отношению к вихрям примерно равна  $h_{\max}(\varepsilon, \rho)$ , что несколько больше полувысоты плоского канала, равной единице. Такое «углубление» канала по отношению к вихрям означает увеличение эффективного числа Рейнольдса, поскольку средняя скорость основного течения в сравниваемых каналах одинаковая. Как следствие, течение в оребренном канале при  $L = L_{\min}$  теряет монотонную устойчивость при меньшем числе Рейнольдса.

Увеличение  $\rho$  с 2 до 4 этот эффект усиливает, поскольку хотя и уменьшает  $h_{\max}(\varepsilon, \rho)$ , но делает межреберное пространство более свободным для вихревого движения. Однако при достаточно большом значении  $\rho$  его дальнейшее увеличение несущественно влияет на вихревое движение, тогда как  $h_{\max}(\varepsilon, \rho)$  все еще уменьшается, что должно приводить к увеличению  $Re_E$ . При фиксированном значении  $\rho$  увеличение  $\varepsilon$  приводит к выталкиванию вихрей из межреберного пространства, что уменьшает эффективную полувысоту канала и также приводит к увеличению  $Re_E$ .

Масштаб вихревой структуры в поперечном направлении слабо зависит от периода оребрения и остается примерно таким же, как и в плоском канале, поэтому при значениях  $L$ , отличных от  $L_{\min}$ , возникает расстройка между размерами вихрей, обеспечивающих  $Re_E$ , и периодом оребрения. Так, при  $L < L_{\min}$  с уменьшением  $L$  эта расстройка способствует выталкиванию вихрей из межреберной области и эффективная средняя полувысота канала уменьшается вплоть до  $h_{\min}(\varepsilon, \rho)$ , что приводит к уменьшению эффективного числа Рейнольдса и, как следствие, увеличению  $Re_E$ . С ростом  $\rho$  величина  $h_{\min}(\varepsilon, \rho)$

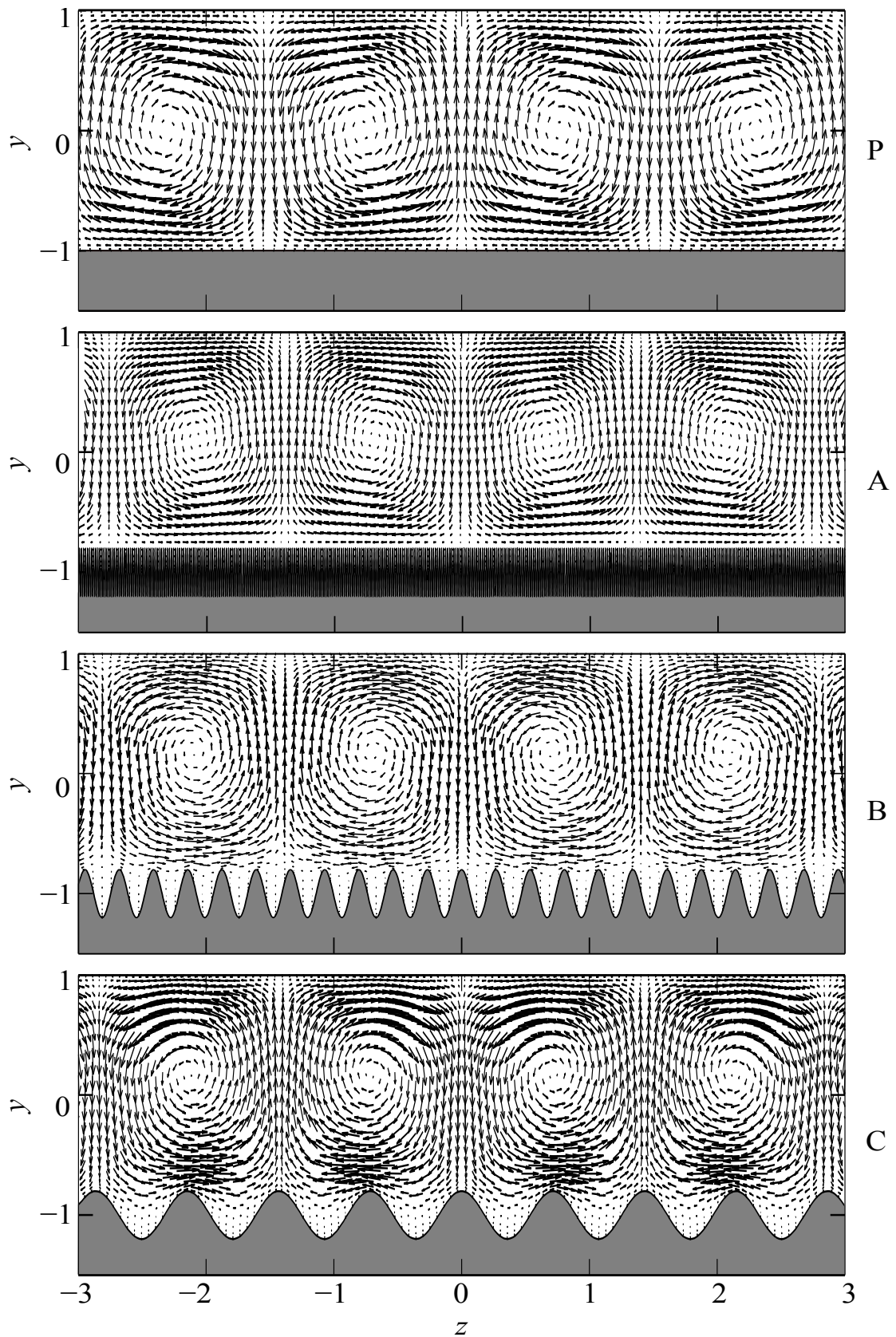


Рисунок 3.9: Действительная часть проекции скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}E$ , на плоскость поперечного сечения в плоском (P) и оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C соответственно).

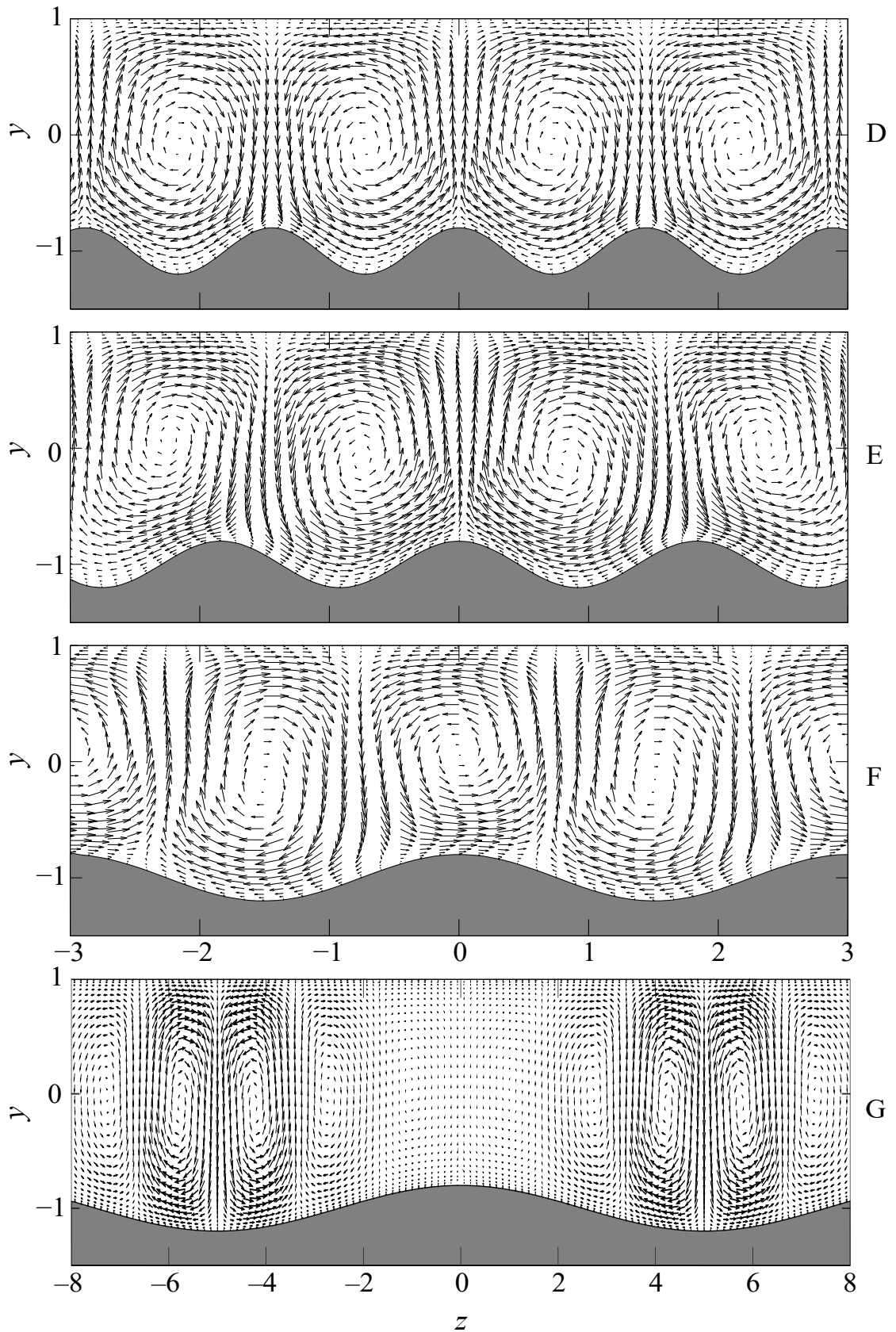


Рисунок 3.10: Действительная часть проекции скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}E$ , на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 1.444, 1.836, 3.012$  и  $10$  (D, E, F и G соответственно).

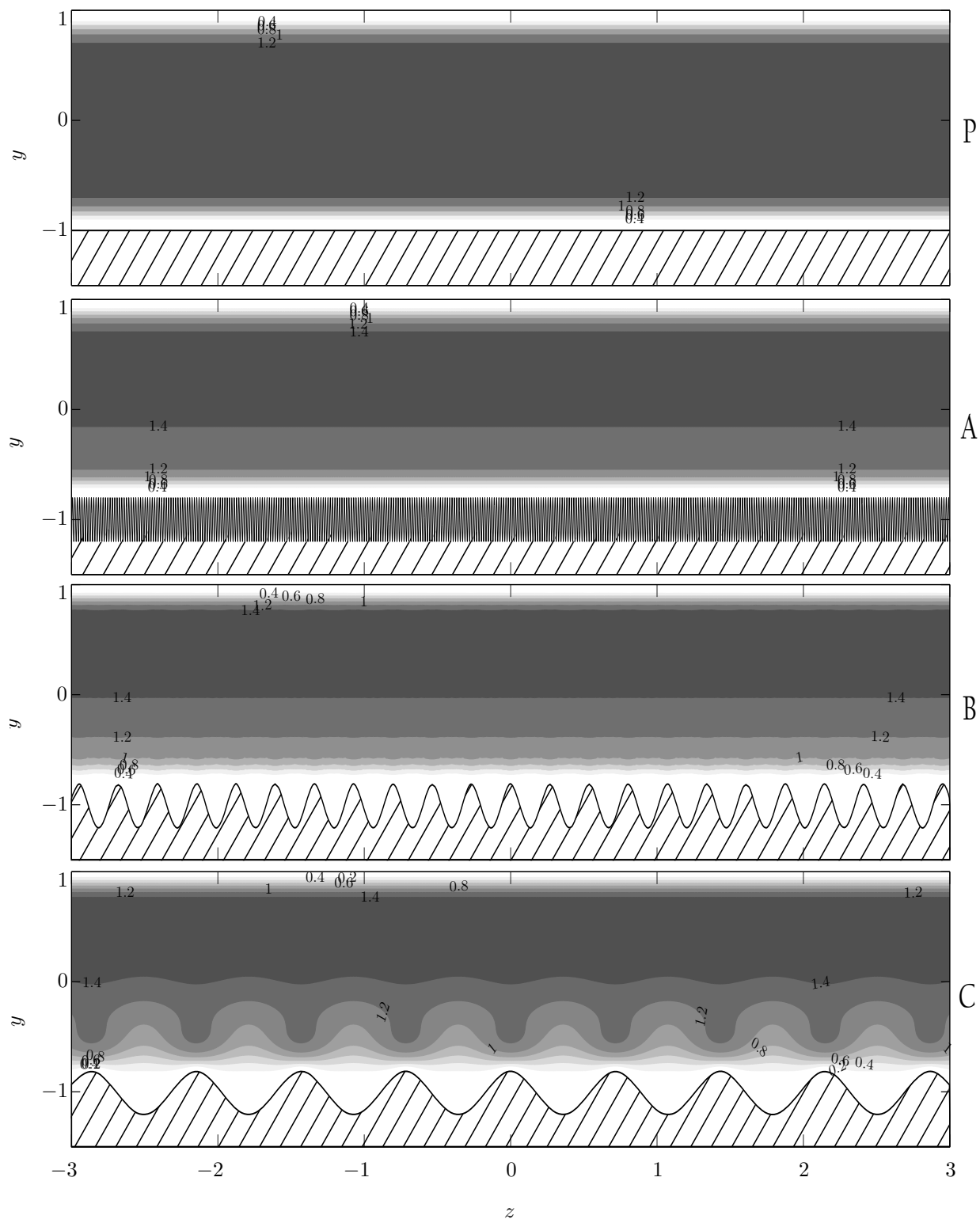


Рисунок 3.11: Квадрат модуля проекции скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в плоском канале (P) и оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C соответственно).



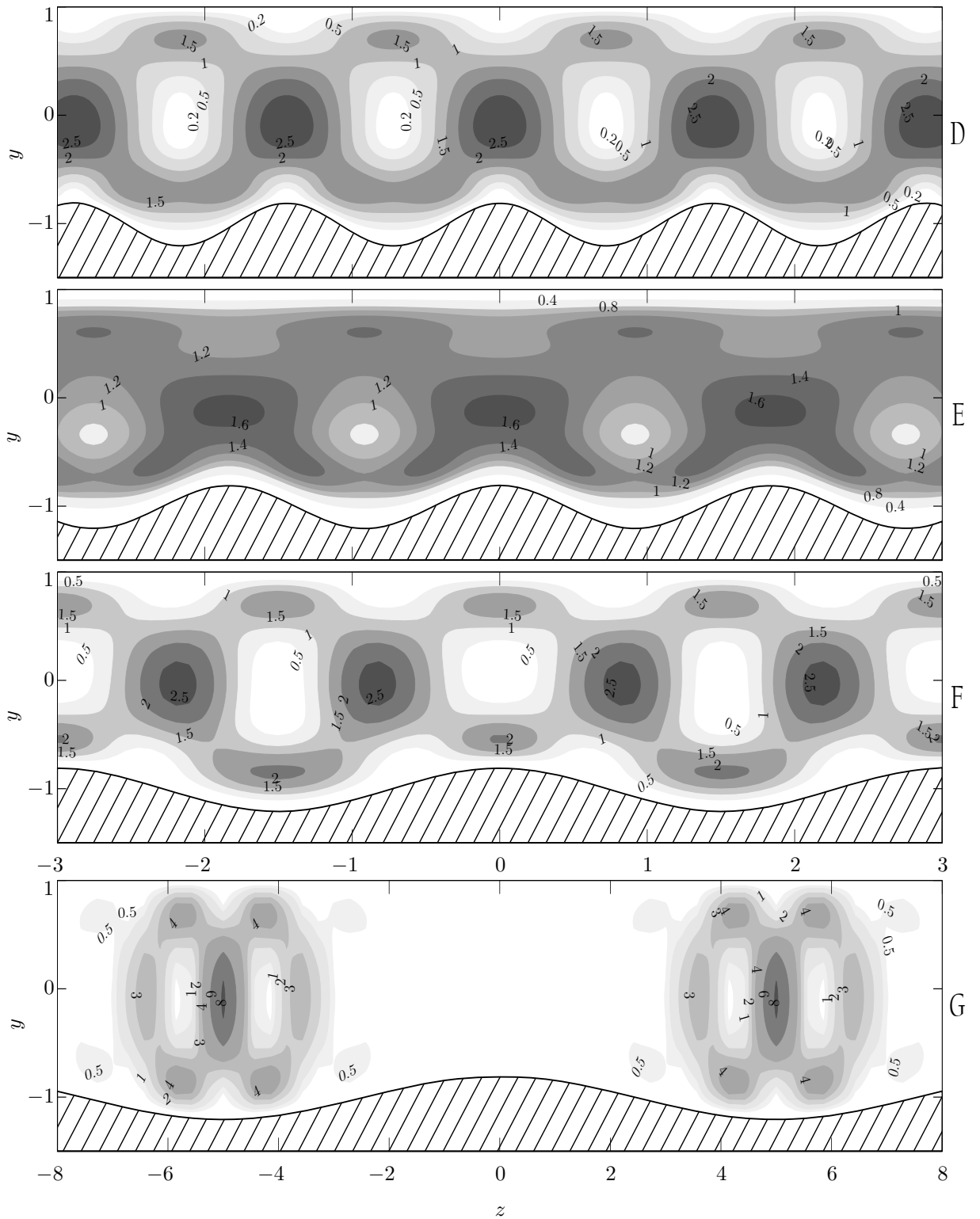


Рисунок 3.12: Квадрат модуля проекции скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 1.444$ ,  $1.836$ ,  $3.012$  и  $10$  (D, E, F и G соответственно).

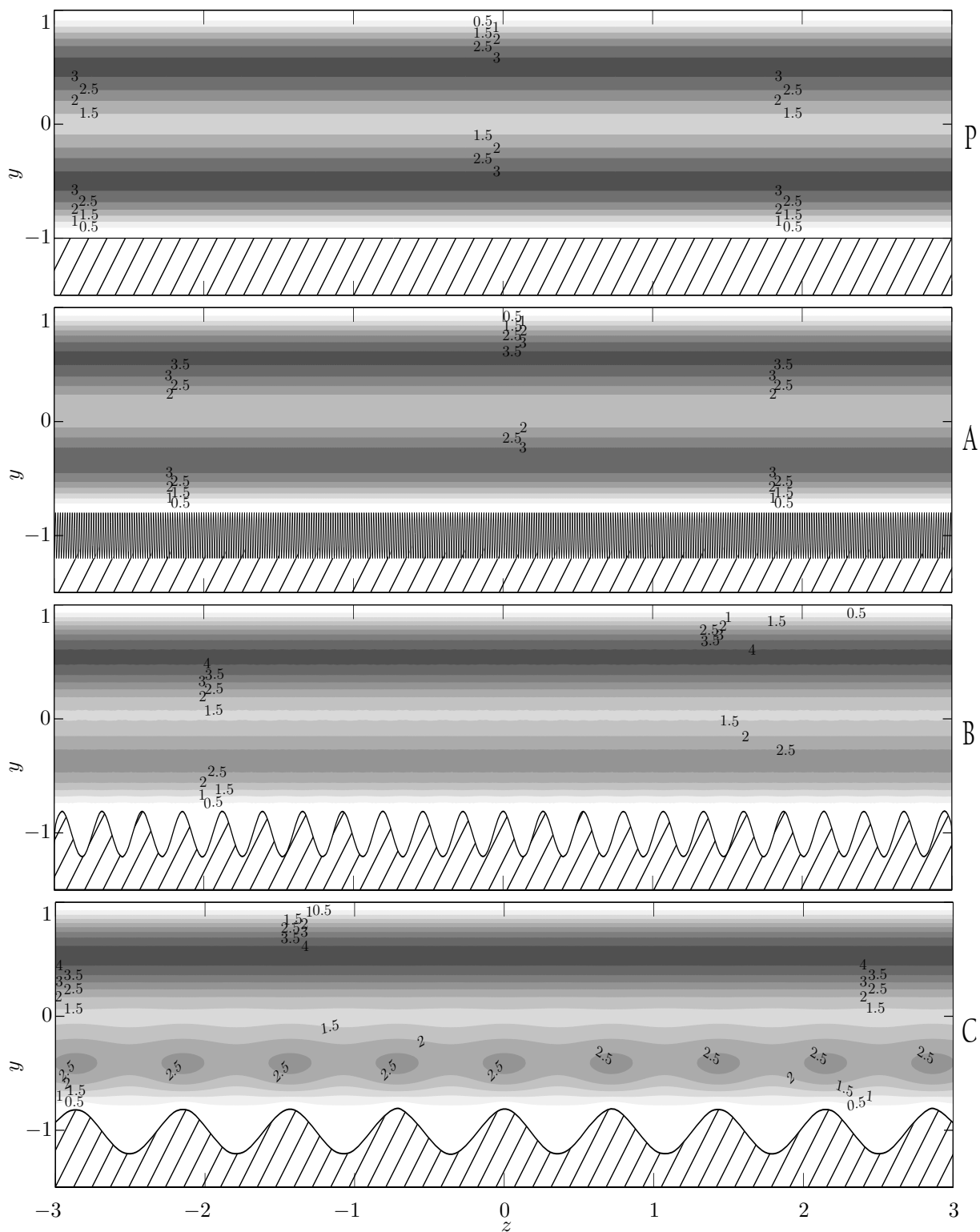


Рисунок 3.13: Квадрат модуля полной скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}_E$ , в плоском канале (P) и оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C соответственно).

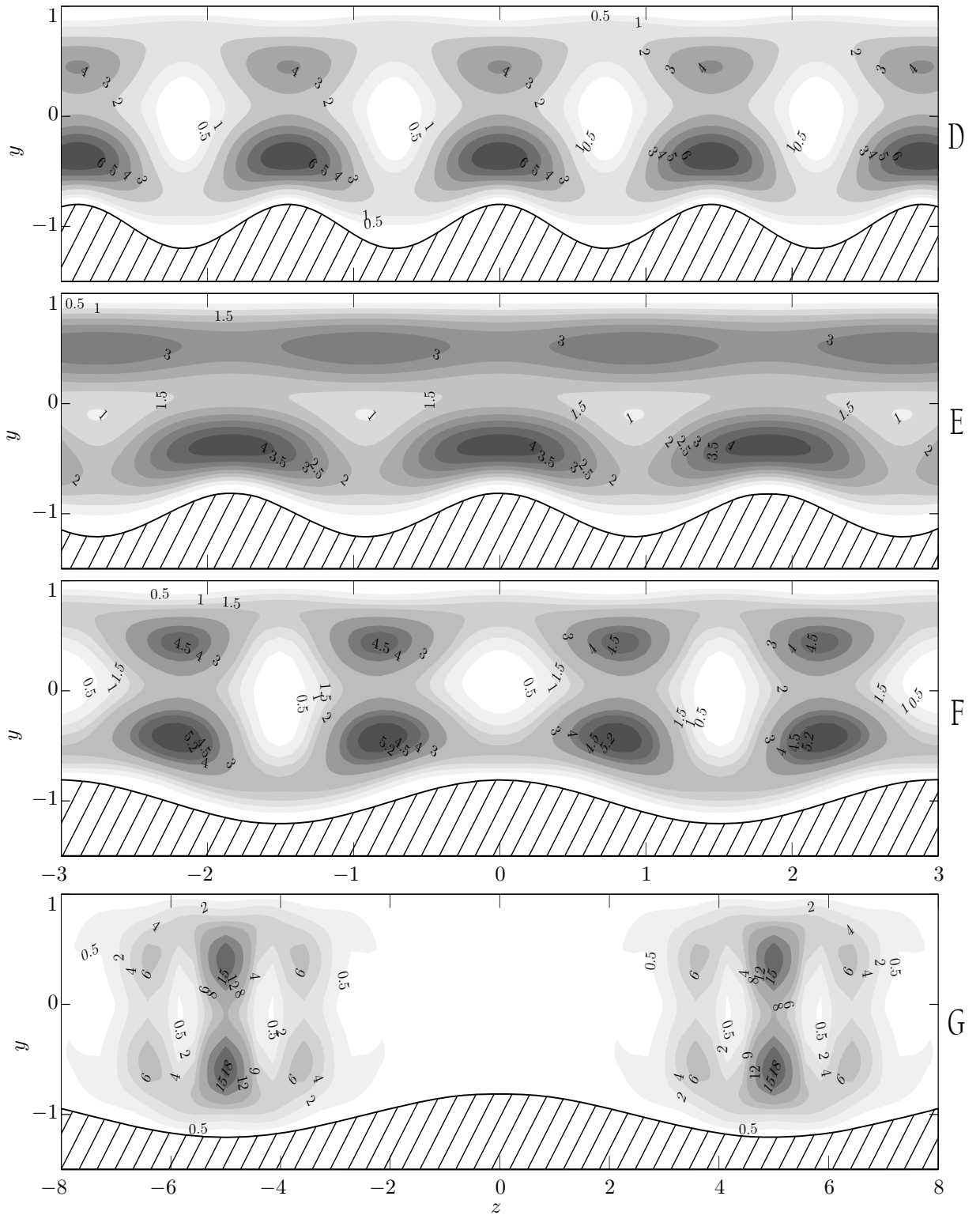


Рисунок 3.14: Квадрат модуля полной скорости критического возмущения, отвечающего  $\text{Re}_E$ , в оребренном канале при  $\rho = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 1.444, 1.836, 3.012$  и  $10$  (D, E, F и G соответственно).

уменьшается, что усиливает этот эффект. Вместе с тем, при достаточно малых  $L$  основное течение между ребрами начинает замедляться, поэтому его средняя скорость в области над ребрами увеличивается, что снова приводит к увеличению эффективного числа Рейнольдса и уменьшению  $Re_E$ . При  $L \rightarrow 0$  эффективная полувысота канала стремится к  $h_{\min}(\varepsilon, \rho)$ , а средняя скорость основного течения в надреберной части канала стремится к  $1/h_{\min}(\varepsilon, \rho)$ . Вследствие этого  $Re_E \rightarrow \widetilde{Re}_E$ .

При  $L > L_{\min}$  для каждой вихревой пары эффективное число Рейнольдса, вообще говоря, свое и зависит от локальных (определяемых по локальным по  $z$  полувысоте канала и средней скорости основного течения) чисел Рейнольдса в области локализации этой пары. Глобальное эффективное число Рейнольдса близко к максимальному из этих эффективных чисел Рейнольдса. При умеренных значениях  $L$  основную роль играет расстройка между периодами ребер и вихрей. Максимальное эффективное число Рейнольдса с ростом  $L$  сначала уменьшается до величины, меньшей  $Re$ , а затем начинает расти (как следствие, сначала растет, а потом уменьшается  $Re_E$ ). При  $L \gg 1$  в критическом возмущении существенно доминируют вихревые пары, расположенные в самых широких частях канала (см. рис. 3.10G, 3.12G и 3.14G). Поэтому в этом случае максимальное эффективное число Рейнольдса близко к  $h_{\max}(\varepsilon, \rho)^2 Re$ , а  $Re_E \approx \widetilde{Re}_E / h_{\max}(\varepsilon, \rho)^2$ .

### 3.3.2 Линейное критическое число Рейнольдса

Из рис. 3.7 видно, что в большей части рассмотренного диапазона периодов оребрения, в соответствии с данными предшествующих работ [3, 61],  $Re_L$  значительно меньше  $\widetilde{Re}_L$ . Это связано с наличием перегибов в профиле скорости основного течения (см. рис. 3.2 и 3.3): при небольших периодах оребрения профиль скорости имеет значительную перегибность по  $y$ , а при больших — по  $z$ , перегибность по  $y$  при этом исчезает. Перегибность про-

филя основного течения является причиной неустойчивости и ряда других пространственно модулированных сдвиговых течений, рассмотренных ранее как экспериментально, так и теоретически (см., например, [64, 65]).

Из рис. 3.7 так же видно, что при фиксированных параметрах оребрения  $L$  и  $\rho$  с уменьшением  $\varepsilon$  кривая  $I$  стремится к горизонтальной пунктирной линии, показывающей значение  $\widetilde{\text{Re}}_L$ , а кривая  $II$  смещается вправо. Естественно предположить, что  $\text{Re}_L^I \rightarrow \widetilde{\text{Re}}_L$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и мода симметрии  $I$ , нейтрально устойчивая при  $\text{Re} = \text{Re}_L^I$  в оребренном канале, стремится к моде, нейтрально устойчивой при  $\text{Re} = \widetilde{\text{Re}}_L$  в плоском канале и являющейся волной Толлмина–Шлихтинга типа  $ITS(0)$  (см. раздел 1.7). Справедливость этого предположения демонстрируется для  $L = 3$  и  $\rho = 2$  на рис. 3.15 и 3.16 поведением продольной компоненты скорости этой моды при уменьшении  $\varepsilon$ .

В то же время  $\text{Re}_L^{II} \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, как видно из рис. 3.17 и 3.18, мода симметрии  $II$ , нейтрально устойчивая при  $\text{Re} = \text{Re}_L^{II}$  в оребренном канале, стремится к невязкому пределу ведущей волны Сквайра типа  $IIS(\gamma)$  плоского канала с поперечным волновым числом  $\gamma = 2\pi/L$ . Отметим, что как и все волны Сквайра, эта волна Сквайра устойчива при любом конечном числе Рейнольдса, а модуль ее продольной компоненты скорости с точностью до нормировки стремится при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  к  $\delta(y)|\sin(\gamma z)|$  (невязкий предел), где  $\delta(y)$  означает дельта-функцию Дирака.

Дополнительные расчеты показывают, что если при некотором  $\varepsilon > 0$  фиксировать значения  $\alpha = \alpha_L^I$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L^I$  и устремить  $\varepsilon$  к нулю, то ведущая мода симметрии  $I$  будет сходиться к ведущей волне Толлмина–Шлихтинга типа  $ITS(0)$  плоского канала, найденной при тех же значениях продольного волнового числа и числа Рейнольдса, а если фиксировать значения  $\alpha = \alpha_L^{II}$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L^{II}$  и устремить  $\varepsilon$  к нулю, то ведущая мода симметрии  $II$  будет сходиться к ведущей волне Сквайра типа  $IIS(2\pi/L)$ , найденной при тех же значениях продольного волнового числа и числа Рейнольдса.

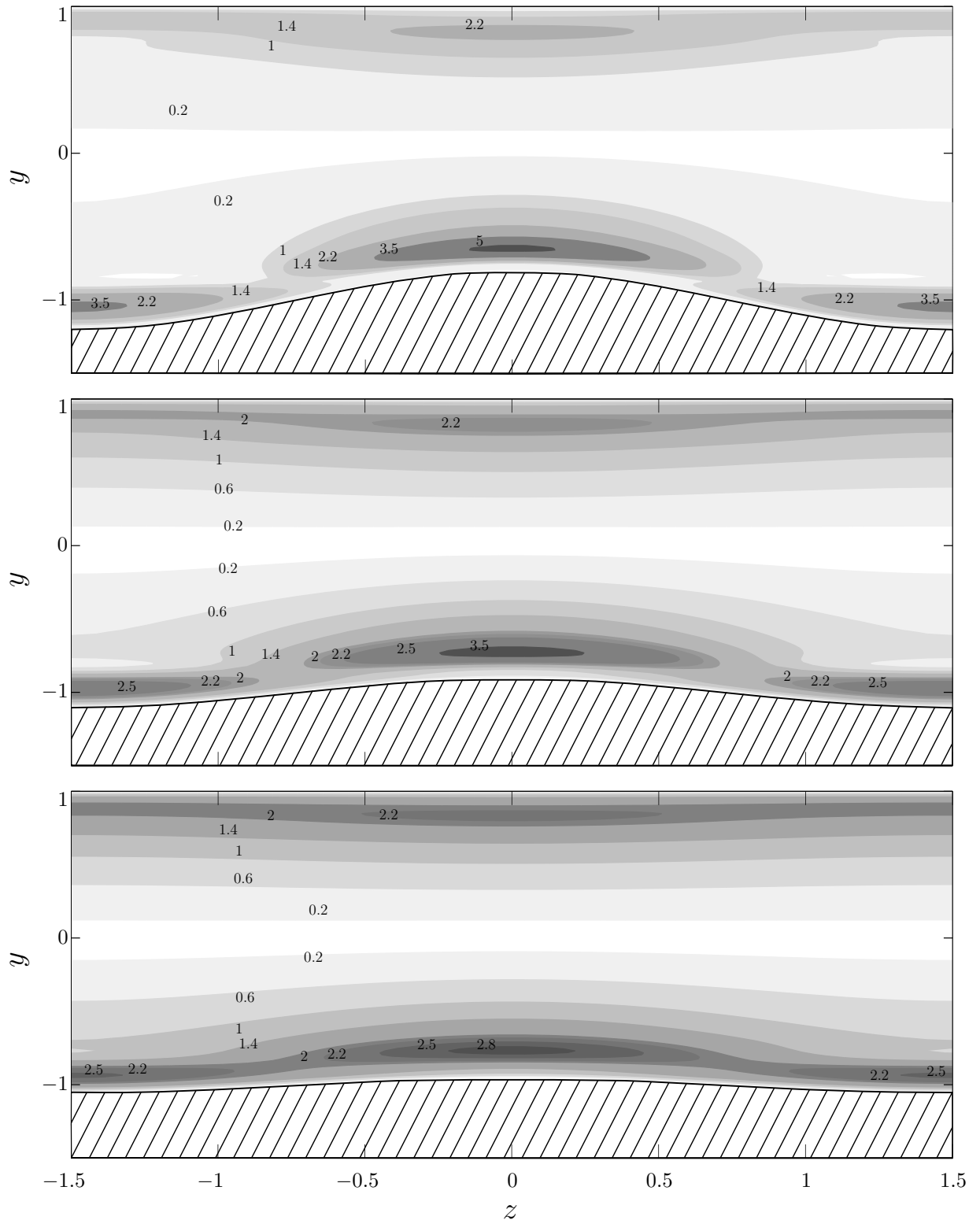


Рисунок 3.15: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии  $I$ , обеспечивающей  $\text{Re} \Gamma_L$  в оребренном канале с  $L = 3$  и  $\rho = 2$ , при трех значениях  $\varepsilon = 0.4, 0.2, 0.1$ .

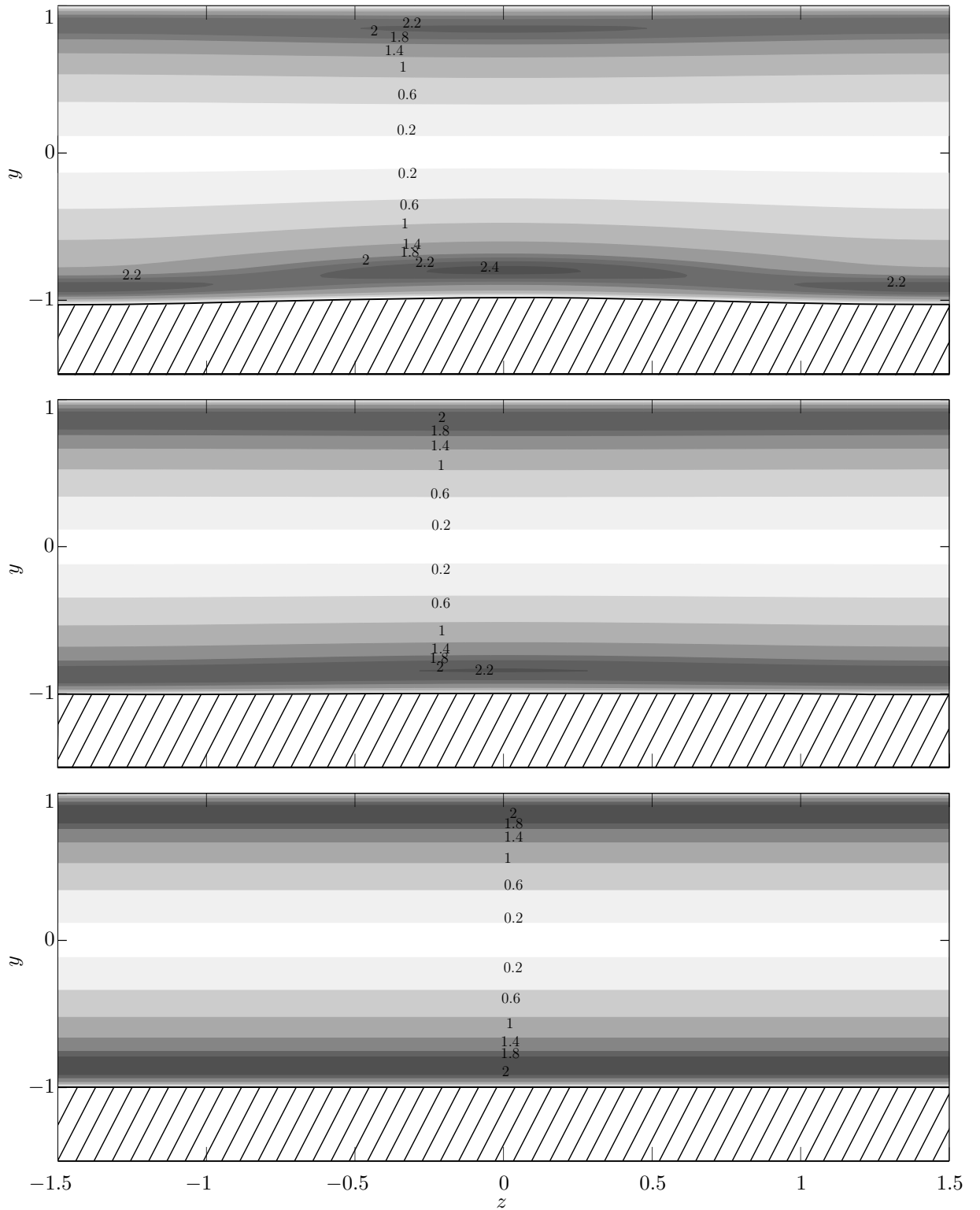


Рисунок 3.16: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии  $I$ , обеспечивающей  $\text{Re}_L^I$  в орбренном канале с  $L = 3$  и  $\rho = 2$ , при двух значениях  $\varepsilon = 0.05, 0.01$ , и нейтрально устойчивой моды, отвечающей  $\widetilde{\text{Re}}_L$  в плоском канале.

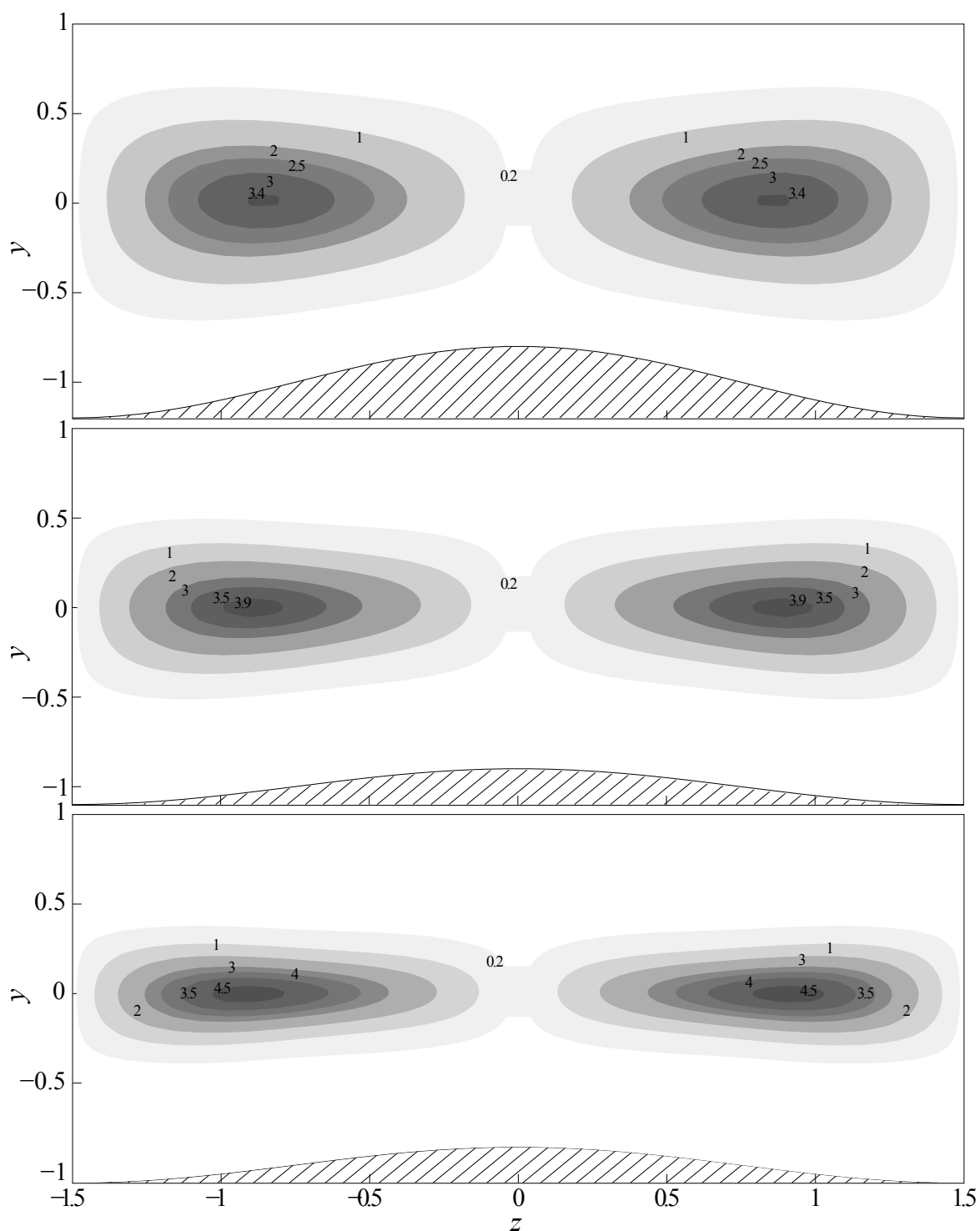


Рисунок 3.17: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии  $II$ , обеспечивающей  $\text{Re}_L^{II}$  в оребренном канале с  $L = 3$  и  $\rho = 2$ , при трех значениях  $\varepsilon = 0.4, 0.2, 0.1$ .



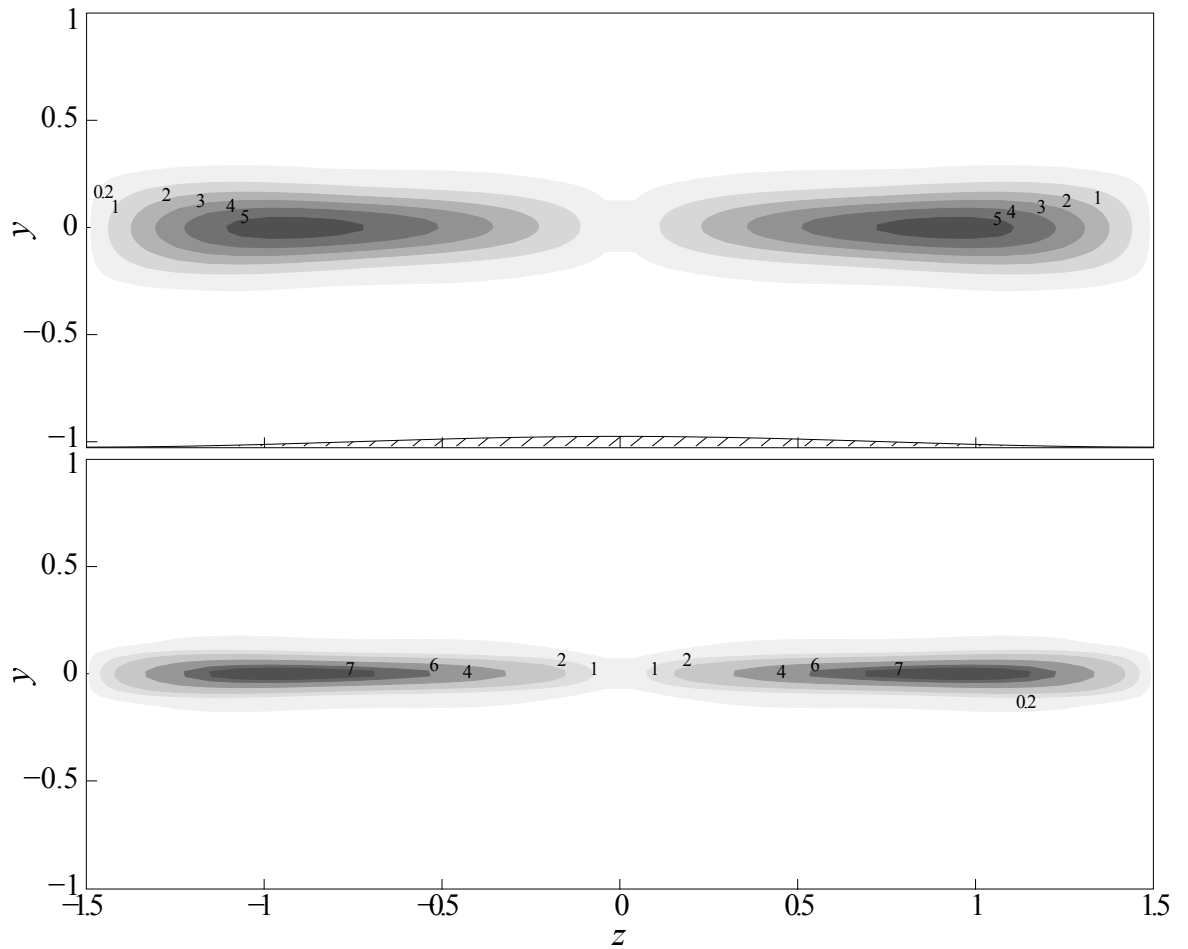


Рисунок 3.18: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии  $II$ , обеспечивающей  $\text{Re}_L^{II}$  в орбренном канале с  $L = 3$  и  $\rho = 2$ , при двух значениях  $\varepsilon = 0.05, 0.01$ .

Из сказанного можно заключить, что ведущая нейтрально устойчивая мода оребренного канала в рассмотренном диапазоне периодов оребрения при небольших периодах близка по структуре к волне Толлмина–Шлихтинга плоского канала, а при больших — к волне Сквайра. Это объясняется тем, что, как это было отмечено выше, при небольших периодах оребрения профиль скорости основного течения имеет значительную перегибность по  $y$ , а при больших — по  $z$ , перегибность по  $y$  при этом исчезает.

Напомним, что в соответствии с существующим представлением об устойчивости плоских течений наличие точки перегиба

$$y_s : \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y_s) = 0$$

профиля скорости  $U(y)$  является необходимым условием возникновения неустойчивости при пренебрежимо малой вязкости (так называемый механизм возникновения «невязкой неустойчивости»). При этом в случае нейтральной устойчивости ( $Re = Re_L$ ) точка перегиба должна совпадать с «критической» точкой  $y_c$ , в которой скорость основного течения равна фазовой скорости  $c$  ведущей моды:  $U(y_c) = c$  [66]. Это позволяет объяснить зависимость устойчивости основного течения от профиля его скорости и предсказать области наибольших значений модуля продольной компоненты скорости ведущей моды, то есть области возникновения и развития неустойчивости.

Течения, рассматриваемые в работах [64, 65], имеют более сложную, чем рассматриваемое течение Пуазейля, структуру, в частности зависят от двух координат. Однако для них было показано, что если зависимость от одной из координат слабая по сравнению с зависимостью от другой координаты, то приведенные выше соображения хорошо согласуются с наблюдаемым возникновением и развитием неустойчивости.

Возвращаясь к рассматриваемому течению, прежде всего отметим, что  $Re_L \rightarrow \widetilde{Re}_L$  при  $L \rightarrow 0$  по той же причине, по которой  $Re_E \rightarrow \widetilde{Re}_E$ : оребренный канал становится эквивалентен плоскому с меньшей полувысотой и во

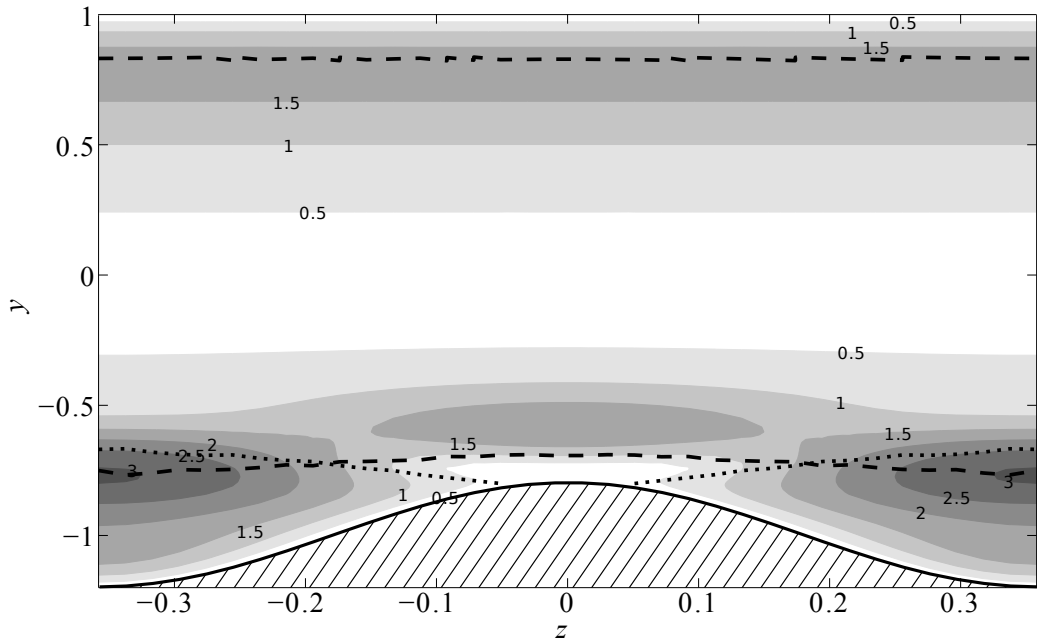


Рисунок 3.19: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых  $\partial^2 U / \partial y^2 = 0$  (пунктир) и  $U = c$  (штриховые линии), при  $L = 0.716$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L$ .

столько же большей средней скоростью основного течения. Уже при  $L \approx 0.016$  перенормированная с учетом этого нейтрально устойчивая мода симметрии  $I$ , обеспечивающая в данном случае  $\text{Re}_L$ , с хорошей точностью совпадает в надберберной части канала с волной Толлмина–Шлихтинга плоского канала, а ее перенормированная фазовая скорость равна примерно 0.3972, то есть близка к фазовой скорости  $c \approx 0.3959$  волны Толлмина–Шлихтинга.

С ростом  $L$  механизм невязкой неустойчивости начинает проявлять себя резким уменьшением величин  $\text{Re}_L$ . Анализ распределений  $\partial^2 U / \partial y^2$  и  $U$  показывает, что в этом случае имеются точки  $(y, z)$ , в которых

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y, z) = 0, \quad U(y, z) = c.$$

Эти точки расположены в области наибольших значений модуля  $|u'|$  продольной компоненты скорости моды, ведущей при  $\text{Re} = \text{Re}_L$  (см. рис. 3.19), что согласуется с данными для пограничных слоев [64, 65]. При дальнейшем увеличении  $L$  перегибы по  $y$  постепенно исчезают, а величина  $\text{Re}_L^I$  при  $L \gtrsim 2.5$  выходит на постоянный уровень, который несколько выше величины  $\widetilde{\text{Re}}_L$ . За-

висимости, изображенные на рис. 3.8, также показывают, что в рассматриваемой области параметра  $L$  для этой моды  $\alpha_L \rightarrow \tilde{\alpha}_L$  с ростом  $L$ .

Таблица 3.2: Параметры критических возмущений (нейтрально устойчивых мод симметрий  $I$  и  $II$ ) для плоского канала (P) и оребренного канала при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и некоторых значениях периода оребрения.

	P	I						II	
		A	B	C	D	E	F	E	F
$L$	–	0.016	0.268	0.716	1.444	1.836	3.012	1.836	3.012
$\text{Re}_L$	3848.2	4079.6	770.11	766.75	2334.0	3902.7	4956.3	3974.1	509.44
$\alpha_L$	1.0205	1.1397	1.3459	1.2127	1.0661	1.0120	0.9963	1.5044	0.9081
$\omega$	0.4042	0.5032	0.7355	0.6248	0.4682	0.4015	0.3700	2.2722	1.3330
$c$	0.3959	0.4415	0.5465	0.5152	0.4392	0.3967	0.3714	1.5104	1.4679

Вместе с тем, при  $L \gtrsim 1.8\text{--}2.4$  (в зависимости от параметров оребрения) глобальное  $\text{Re}_L$  обеспечивается модой симметрии  $II$ . Как уже упоминалось, она соответствует волне Сквайра плоского канала, устойчивой при любом числе Рейнольдса. Мода симметрии  $II$  имеет большую фазовую скорость, чем мода симметрии  $I$ , примерно равную средней скорости основного течения в центре канала. Она становится неустойчивой при малых числах Рейнольдса, когда возникает перегиб по  $z$  в центре канала. Максимум модуля продольной компоненты скорости моды симметрии  $II$  также располагается в центре канала (см. рис. 3.20). При дальнейшем увеличении  $L$  перегибы по  $z$  в центре канала не исчезают, поэтому эти соображения продолжают оставаться актуальными.

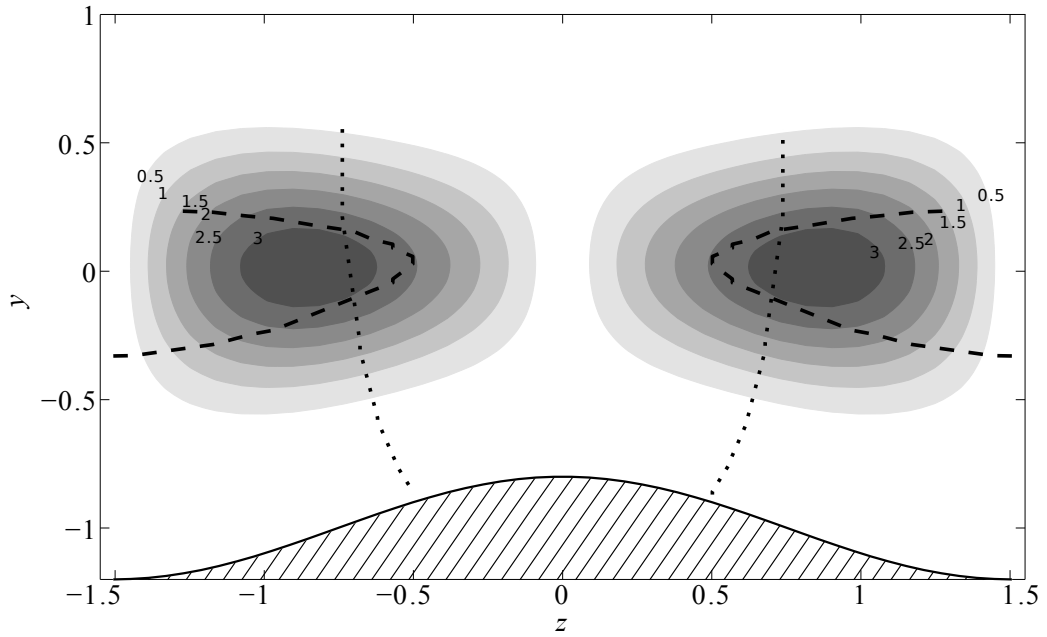


Рисунок 3.20: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых  $\partial^2 U / \partial z^2 = 0$  (пунктир) и  $U = c$  (штриховые линии), при  $L = 3.012$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L$ .

### 3.4 Максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии

Напомним, что анализ максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений и соответствующих оптимальных возмущений наиболее интересен для численного исследования докритических сценариев ламинарно-турбулентного перехода. Такой переход может реализоваться в области чисел Рейнольдса  $\text{Re}_E < \text{Re} < \text{Re}_L$ . В качестве примера ниже максимальная амплификация рассмотрена при числе Рейнольдса  $\text{Re} = 400$ , принадлежащем этому интервалу при всех рассмотренных значениях параметров оребрения.

Зависимость  $\Gamma_{\max}(400)$  от периода оребрения изображена на рис. 3.21 сверху. В отличие от зависимостей  $\text{Re}_E$  и  $\text{Re}_L$ , изображенных на рис. 3.7, эта зависимость рассчитана до  $L = 3$ , поскольку  $\text{Re}_L$  при немного большем периоде оребрения становится меньше 400 (для  $\varepsilon = 0.4$  и  $\rho = 4$  при  $L = 3.068$ ).

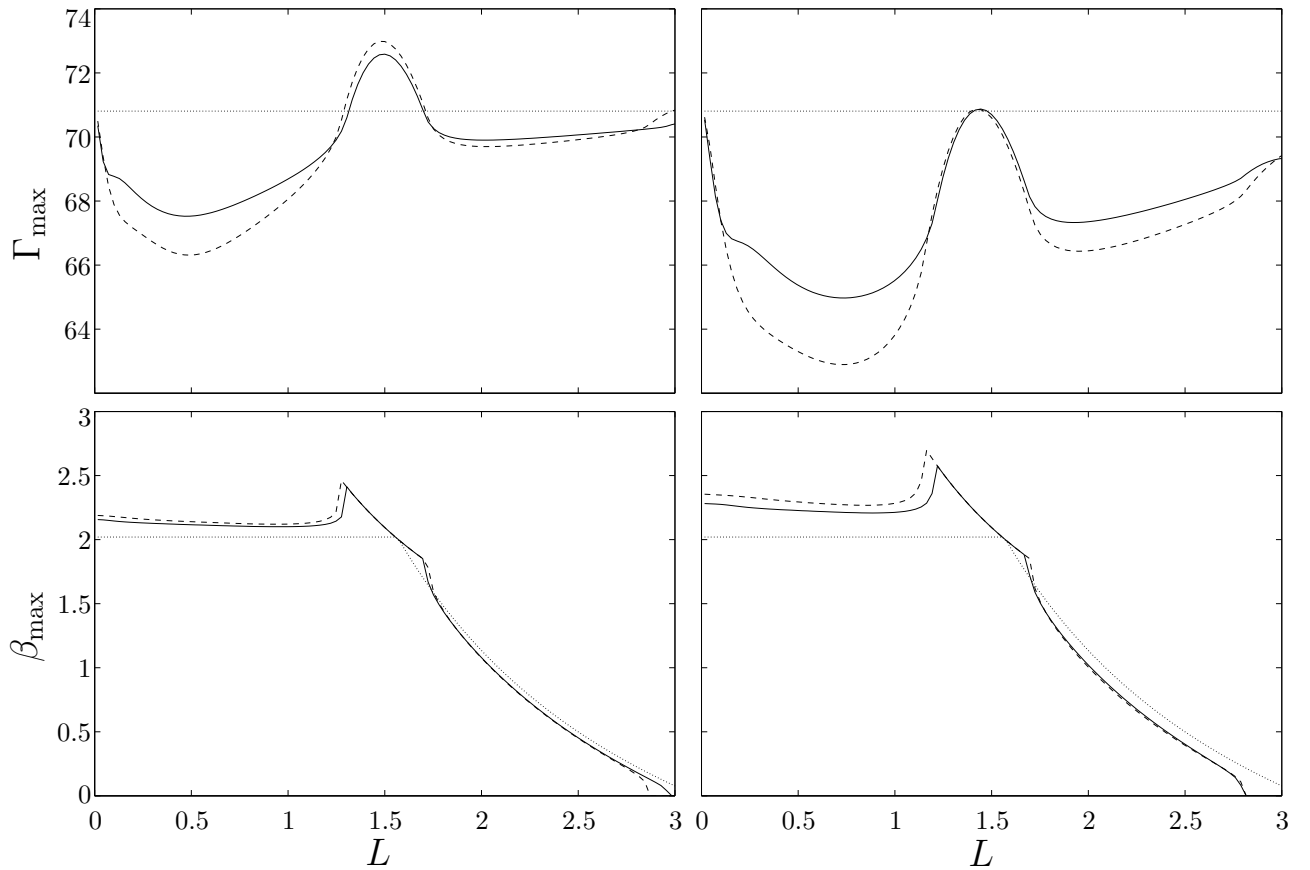


Рисунок 3.21: Зависимости  $\Gamma_{\max}$  (сверху) и  $\beta_{\max}$  (снизу) от периода орбрения для  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\rho = 2$  (—) и  $4$  (- -).

Зависимость  $\Gamma_{\max}(400)$  от периода орбрения можно объяснить структурой оптимального возмущения для плоского канала. Как и в разделе 3.3.1, в случае плоского канала в качестве элементарных выбирались возмущения вида (1.5.1) с  $\alpha = 0$ , а зависимость  $\beta_{\max}$  от  $L$ , изображенная пунктирной кривой на рис. 3.21 снизу, рассчитывалась с помощью формулы (1.5.3) по вычисленному значению  $\gamma_{\max} = 2.0445$ . Отметим, что в силу этой формулы  $\beta_{\max} = \gamma_{\max}$  при  $L \leq \pi/\gamma_{\max} \approx 1.5$ .

В случае плоского канала оптимальное возмущение периодически по  $z$  с периодом  $\Lambda = 2\pi/\gamma_{\max} \approx 3$  и на одном периоде представляет собой пару вихрей с осями в продольном направлении. Развитие этих вихрей приводит к значительному росту энергии возмущения за счет увеличения продольной компоненты скорости. Это иллюстрирует рис. 3.22Р, где изображена действительная

часть проекции скорости оптимального возмущения на плоскость поперечного сечения канала, то есть двумерное поле скорости с компонентами (3.3.1), где  $\tilde{v}'$  и  $\tilde{w}'$  — компоненты амплитуды вектора скорости оптимального возмущения вида (1.5.5) в вертикальном и поперечном направлениях соответственно.

На рис. 3.22А–С и на рис. 3.23 изображена вихревая структура оптимального возмущения в оребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$  и  $\rho = 2$  и некоторых значениях периода оребрения, то есть двумерное поле скорости с компонентами (3.3.2), где  $\tilde{v}$  и  $\tilde{w}$  — компоненты амплитуды вектора скорости оптимального возмущения вида (1.3.10) в вертикальном и поперечном направлениях соответственно. Видно, что масштаб вихревой структуры в поперечном направлении слабо зависит от периода оребрения и остается примерно таким же, как и в плоском канале. Распределение энергии оптимального возмущения по пространственным направлениям, то есть отношение энергии, приходящейся на определенное направление, к полной энергии возмущения, как показывает таблица 3.3, также мало зависит от периода оребрения и близко к распределению для плоского канала.

Вследствие этого при малых периодах оребрения область между ребрами практически выпадает из вихревого движения (см. рис. 3.22) и, таким образом, не участвует в перераспределении энергии, увеличивающем продольную компоненту скорости, то есть при малом периоде эффективная полувисота канала равна примерно  $h_{\min}(\varepsilon, \rho)$ . С другой стороны, при малом периоде оребрения основное течение также практически отсутствует в области между ребрами. Следовательно, средняя скорость основного течения в области над ребрами при  $L = 0.016$  больше, чем в плоском канале, примерно в  $1/h_{\min}(\varepsilon, \rho)$  раз и постепенно падает при увеличении периода до  $L = 0.716$ , где средняя скорость основного течения в области над ребрами становится почти такой же, как и в случае плоского канала.

Эти два фактора приводят к тому, что при наименьшем из рассмотренных на рис. 3.22 периодов оребренный канал с точки зрения развития оптималь-

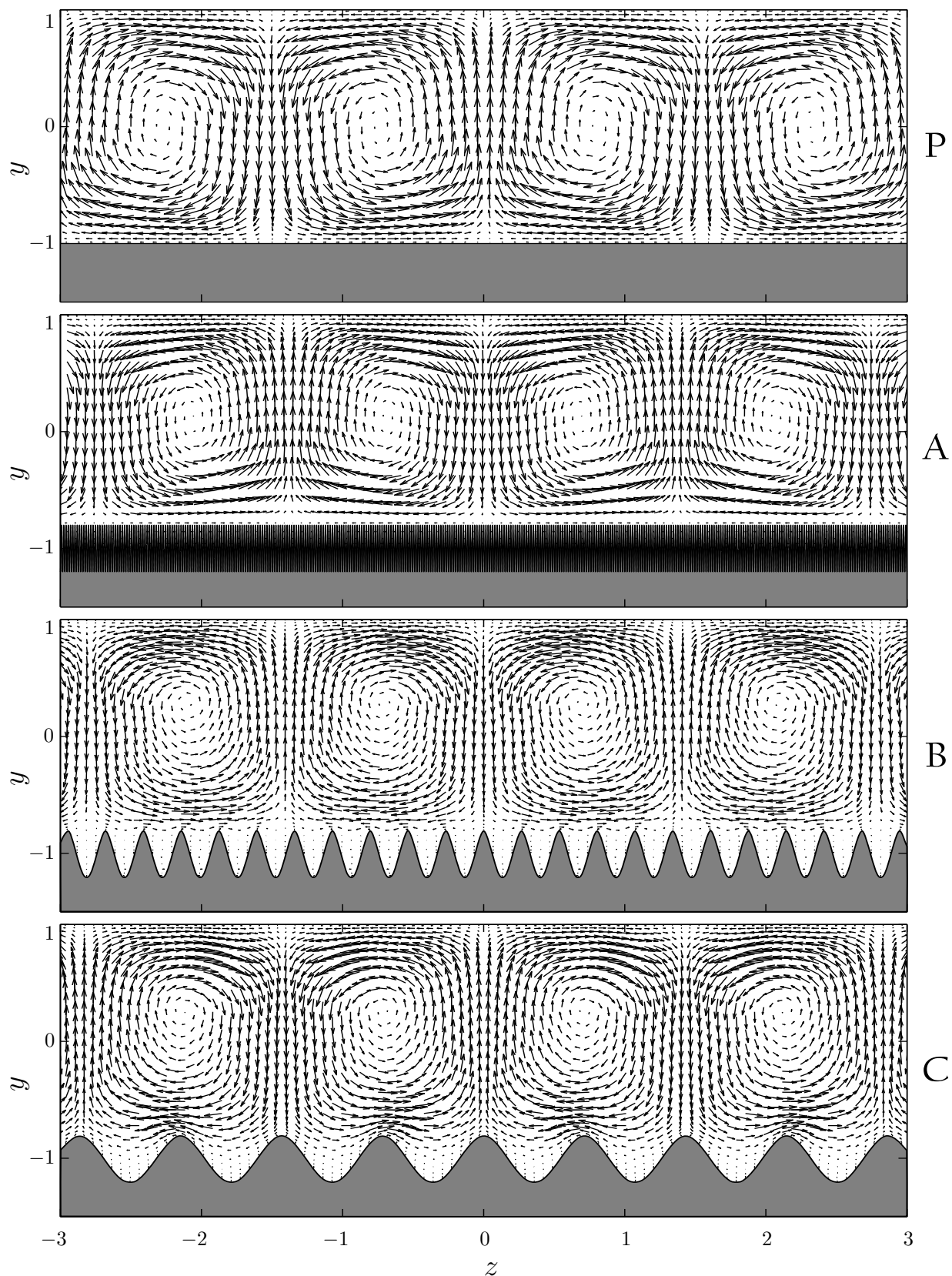


Рисунок 3.22: Действительная часть проекции скорости оптимального возмущения на плоскость поперечного сечения в плоском (P) и оребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и периодах оребрения  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C соответственно).



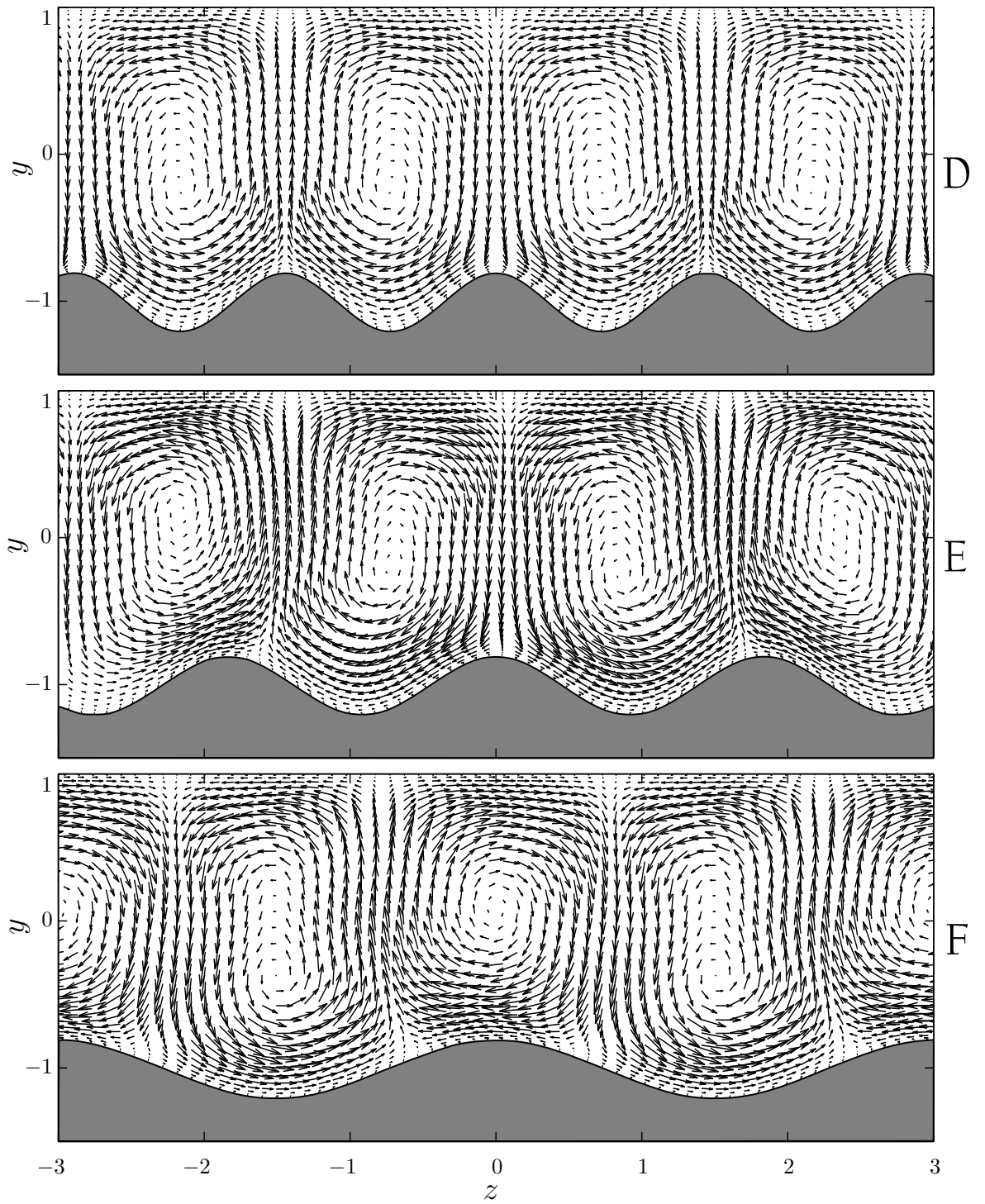


Рисунок 3.23: Действительная часть проекции скорости оптимального возмущения на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и периодах оребрения  $L = 1.444$ ,  $1.836$  и  $3.012$  (D, E и F соответственно).

Таблица 3.3: Параметры оптимального возмущения в плоском канале (P) и оребренном канале при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 2$  и некоторых значениях периода оребрения.

	P	A	B	C	D	E	F
$L$	—	0.016	0.268	0.716	1.444	1.836	3.012
$\Gamma_{\max}$	70.821	70.538	66.488	64.974	70.872	67.384	69.339
$t_{\text{opt}}$	30.200	24.245	25.144	26.128	27.082	28.275	28.991
$\beta_{\max}$	2.0445	2.2814	2.2478	2.2138	2.1755	1.3102	$2.92 \times 10^{-4}$
$\Lambda$	3.0000	2.7551	2.7956	2.8218	2.8880	3.0240	3.0120
$t = 0$	$\mathcal{E}(u')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.0017	0.0017	0.0019	0.0019	0.0016	0.0018
	$\mathcal{E}(v')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.5985	0.5985	0.5972	0.6056	0.6435	0.6103
	$\mathcal{E}(w')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.3998	0.3998	0.4009	0.3925	0.3550	0.3878
$t = t_{\text{opt}}$	$\mathcal{E}(u')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.9973	0.9973	0.9972	0.9971	0.9971	0.9971
	$\mathcal{E}(v')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0011	0.0012
	$\mathcal{E}(w')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.0016	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0017

ных возмущений эквивалентен плоскому каналу с меньшей высотой, но во столько же раз большей скоростью основного течения, в сравнении с рассматриваемым плоским каналом. Поэтому величина  $\Gamma_{\max}$  в этом случае почти такая же, как и в случае плоского канала. С хорошей точностью совпадают и распределения энергии оптимального возмущения по пространственным направлениям ( $t = 0$ ) и развившейся из него полосчатой структуры ( $t = t_{\text{opt}}$ ) (см. таблицу 3.3). В то же время значения  $t_{\text{opt}}$  и  $\beta_{\max}$  при  $L = 0.016$  достаточно сильно отличаются (для плоского канала при данном значении периода  $\beta_{\max} = \gamma_{\max}$ ). Однако если эти значения для оребренного канала перенормировать с учетом того, что эффективная полувысота канала в данном случае равна  $h_{\min}(\varepsilon, \rho) = 0.9$ , то полученные перенормированные значения, то есть  $t_{\text{opt}}/h_{\min}(\varepsilon, \rho)^2 \approx 29.93$  и  $\beta_{\max}h_{\min}(\varepsilon, \rho) \approx 2.0565$ , окажутся близкими к их значениям для плоского канала.

С увеличением периода оребрения максимальная амплификация уменьшается за счет уменьшения средней скорости основного течения в области перемешивания. Оребрение все еще препятствует проникновению вихревого движения в межреберную область при периоде оребрения  $L = 0.716 \approx \Lambda/4$  (рис. 3.22С), а средняя скорость основного течения в области над ребрами становится почти такой же, как и в случае плоского канала. Это соответствует минимуму  $\Gamma_{\max}(400)$ , который в данном случае примерно равен максимальной амплификации для плоского канала при числе Рейнольдса, немного большем, чем  $400h_{\min}(\varepsilon, \rho) = 360$ . Для проверки этой гипотезы была вычислена зависимость  $\tilde{\Gamma}_{\max}(\text{Re})$  для плоского канала, которая показала, что  $\Gamma_{\max}(400) = 64.974 = \tilde{\Gamma}_{\max}(383.05)$ .

Оребрение перестает мешать проникновению вихревого движения в межреберную область при периоде оребрения  $L = 1.444 \approx \Lambda/2$  (рис. 3.23D), т.к. в этом случае вихри размещаются точно между ребрами. Максимальная амплификация становится почти такой же, как и в плоском канале. Более того, при  $\varepsilon = 0.2$  (рис. 3.21, слева) максимальная амплификация при таком периоде оребрения даже больше, чем в плоском канале. Это, по-видимому, связано с тем, что при  $\varepsilon = 0.2$  ребра занимают область между вихрями, в которой перемешивание в плоском канале почти отсутствует, а при  $\varepsilon = 0.4$  их верхняя часть попадает в область, где в плоском случае вертикальная компонента скорости оптимального возмущения заметно отличается от нуля.

При  $L = 3.012 \approx \Lambda$  (точка F) оребрение влияет лишь на половину вихрей, образующих оптимальное возмущение, причем менее значительно, чем при  $L \approx \Lambda/4$ .

Сравнение рис. 3.21 и 3.7, показывает, что отклонение максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}(\text{Re})$  для оребренного канала от максимальной амплификации  $\tilde{\Gamma}_{\max}(\text{Re})$  для плоского канала при варьировании периода оребрения и других его параметров обратно по знаку и почти пропорционально по величине отклонению энергетического критического числа Рейнольдса  $\text{Re}_E$  ореб-

ренного канала от энергетического критического числа Рейнольдса  $\widetilde{Re}_E$  плоского канала. Близки и параметры оптимального и критического возмущений, представленные, соответственно, в таблицах 3.3 и 3.1, кроме распределений энергии по направлениям, а также близки вихревые структуры, изображенные на рис. 3.22, 3.23 и на рис. 3.9, 3.10. Это позволяет утверждать, что зависимость максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений от параметров оребрения можно с хорошей точностью оценить по известной зависимости энергетического критического числа Рейнольдса от этих параметров. Поскольку расчет последней является существенно более простой вычислительной задачей, в инженерных приложениях, связанных с оптимизацией обтекания, имеет смысл ограничиться только детальным расчетом зависимости  $Re_E$  от параметров оребрения и контрольными расчетами  $\Gamma_{\max}(Re)$  при небольшом числе значений параметров.

### 3.5 Сходимость по шагу сетки

Из-за больших вычислительных затрат параметрического исследования, результатам которого посвящена эта глава, остро вставал вопрос о выборе минимально достаточного пространственного разрешения. Этому вопросу было уделено значительное внимание при подготовке массовых расчетов.

На рис. 3.24 и 3.25 представлены результаты по сходимости по шагу сетки, обосновывающие выбор пространственного разрешения. Сравниваются результаты расчетов глобальных характеристик устойчивости, полученные с использованием сеток  $80 \times 11$  и  $140 \times 17$  при различных значениях параметров оребрения. Видно, что при достаточно большом периоде оребрения  $L$  имеется сходимость по шагу сетки. Напротив, для  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\rho = 2$  при  $L < 0.5$  наблюдается существенное отличие результатов, особенно при вычислении энергетического критического числа Рейнольдса и максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений. Для больших значений

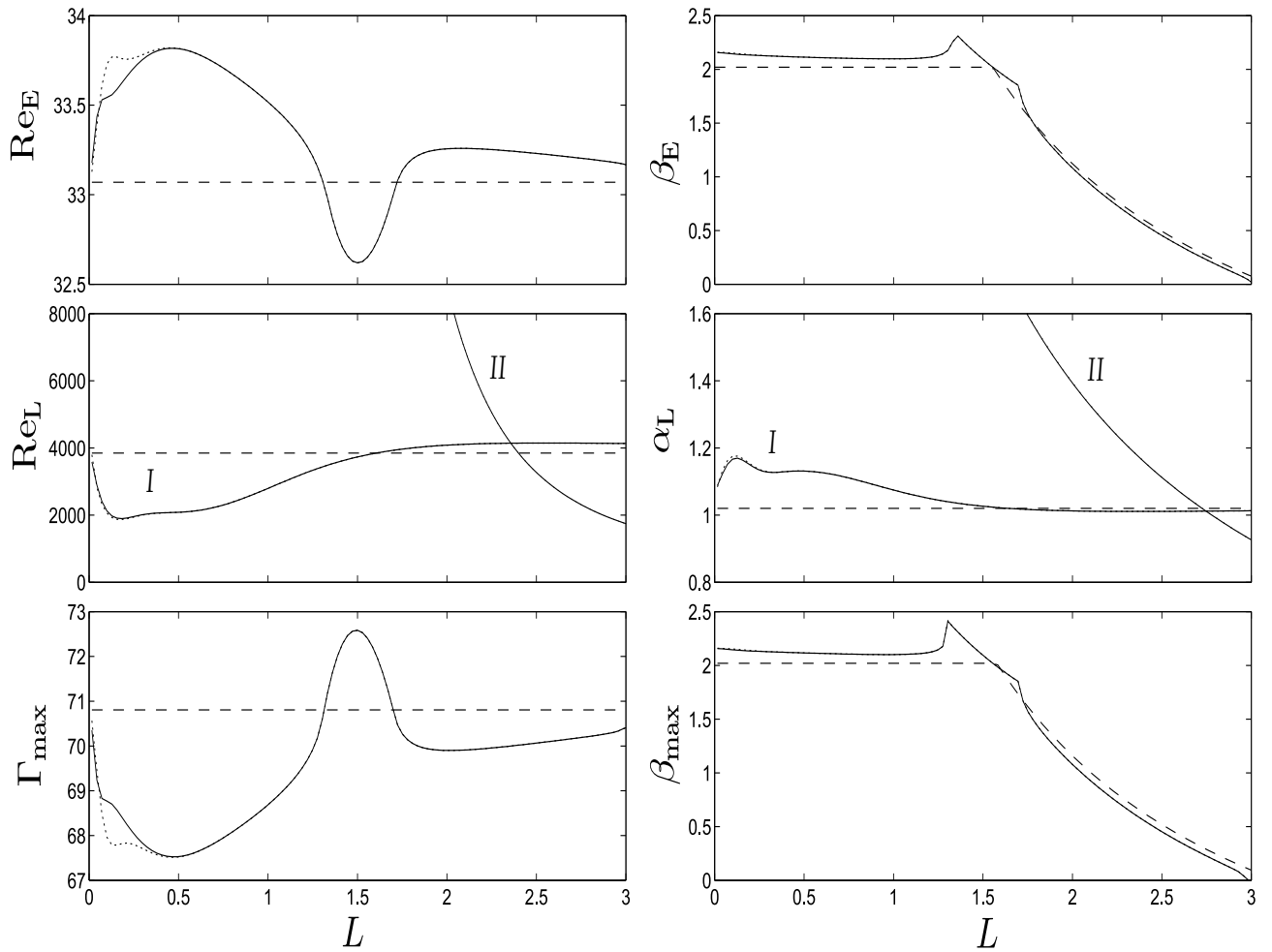


Рисунок 3.24: Сходимость по шагу сетки при вычислении зависимости характеристик устойчивости от периода оребрения для  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\rho = 2$ ,  $m_r \times m_s = 80 \times 11$  (пунктир) и  $m_r \times m_s = 140 \times 17$  (сплошная линия). Штриховой линией изображены значения характеристик для плоского канала.

$\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 4$  это отличие наблюдается также и в интервале  $0.5 < L < 1$ . Поэтому при  $L \geq 1$  мы использовали сетку  $140 \times 17$ , а при  $L < 1$  — сетку  $140 \times 35$ , более мелкую в поперечном направлении. Дополнительные численные эксперименты показали, что этого пространственного разрешения достаточно для вычисления характеристик устойчивости с точностью до знаков, приводимых в этой главе.

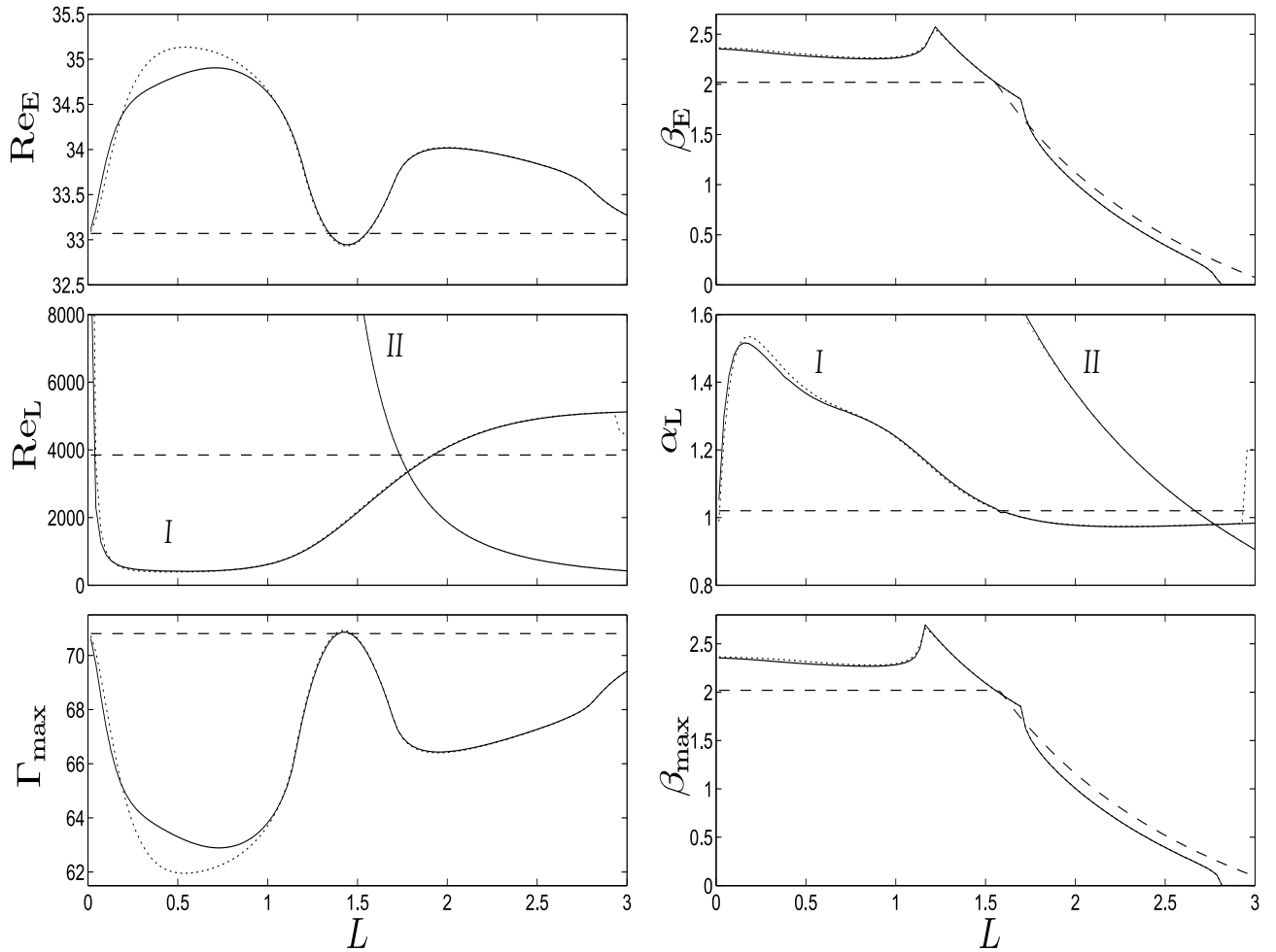


Рисунок 3.25: Сходимость по шагу сетки при вычислении зависимости характеристик устойчивости от периода оребрения для  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\rho = 4$ ,  $m_r \times m_s = 80 \times 11$  (пунктир) и  $m_r \times m_s = 140 \times 17$  (сплошная линия). Штриховой линией изображены значения характеристик для плоского канала.

### 3.6 Выводы

В этой главе приведены результаты подробного численного анализа устойчивости течения Пуазейля в канале с продольно оребренной стенкой. Такой анализ позволила провести реализация технологии исследования устойчивости течений для вычислительных кластеров.

Установлено, что линейная неустойчивость реализуется при небольших периодах оребрения на ведущей моде, которой соответствует волна Толлмина–Шлихтинга плоского канала, а при больших периодах оребрения — на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала. Приведены и объяснены зависимости энергетического  $Re_E$  и линейного  $Re_L$  критических чисел Рейнольдса, а также максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}$  средней плотности кинетической энергии возмущений при  $Re_E < Re < Re_L$  от высоты  $\varepsilon$  и заостренности  $\rho$  ребер и периода оребрения  $L$ . Сравнение с энергетическим  $\widetilde{Re}_E$  и линейным  $\widetilde{Re}_L$  критическими числами Рейнольдса плоского течения Пуазейля показывает, что в определенном диапазоне параметров оребрения существует достаточно протяженный интервал значений  $L$ , в котором  $Re_L > \widetilde{Re}_L$ . С увеличением  $\varepsilon$  и  $\rho$  этот интервал постепенно сужается и исчезает, что свидетельствует о существовании оптимальных значений  $\varepsilon$  и  $\rho$ , при которых достигается максимальная величина  $Re_L$ . Кроме того, при всех рассмотренных значениях  $\varepsilon$  и  $\rho$  в максимуме  $Re_L$  по  $L$  имеем  $Re_E > \widetilde{Re}_E$ .

Даны качественные физические объяснения установленных зависимостей  $Re_E$ ,  $Re_L$  и  $\Gamma_{\max}$  от параметров оребрения. В частности, было показано, что величины  $Re_E$  и  $\Gamma_{\max}$  в основном определяются степенью проникновения отвечающих им критического и оптимального возмущений в межреберное пространство, которая зависит от соотношения периода оребрения и размера возмущения в поперечном направлении. Величина  $Re_L$  определяется степенью вовлеченности вязких и невязких механизмов в процесс возникновения неустойчивости, которая также зависит от периода оребрения.

Полученные результаты существенно дополняют традиционное представление об устойчивости течений в оребренных каналах. Впервые показано, что существуют продольные оребрения, увеличивающие, по сравнению с плоским каналом, оба критических числа Рейнольдса и уменьшающие  $\Gamma_{\max}$ , отдаляя тем самым как естественный, так и докритический ламинарно-турбулентный переход. Показано существование оптимального оребрения, максимизирующего такой эффект. Практическое значение полученных результатов состоит, в частности, в том, что такие оребрения канала позволяют прокачивать больше жидкости при сохранении ламинарности течения. При других значениях параметров оребрения возможны и другие комбинации увеличения или уменьшения  $Re_E$  и  $Re_L$ , что открывает широкие возможности для применения оребрения в качестве гибкого способа управления переходом к турбулентности.



# Заключение

Развита и обоснована оригинальная технология вычисления характеристик устойчивости для течений в оребренных каналах (энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации энергии возмущений), получены зависимости характеристик устойчивости течения Пуазейля от параметров оребрения в широком диапазоне этих параметров, эти зависимости проанализированы и объяснены, в том числе:

1. Предложена и реализована версия технологии вычисления характеристик устойчивости для вычислительных кластеров. Особенности данной технологии являются, в частности, применение для аппроксимации метода Галеркина-коллокаций и использование представления Флоке.
2. Численно показана справедливость для оребренного канала аналога теоремы Сквайра, которая для плоского канала говорит о том, что наиболее неустойчивые моды имеют нулевое поперечное волновое число. Кроме того, численно показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.
3. Впервые показано, что линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала.

4. Впервые показано, что параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся оба критических числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений, что отдалит как докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы. Кроме того, показано, что оребрение может отдалить докритический ламинарно-турбулентный переход и приблизить естественный, может приблизить и докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы, а может приблизить докритический и отдалить естественный.

# Список рисунков

1.1	Нейтральная кривая проблемы Орра–Зоммерфельда. . . . .	41
2.1	Зависимость $Re_L(\alpha)$ , вычисленная на сетках размеров $m_r \times m_s = 14 \times 13$ (пунктир), $27 \times 23$ (штриховая линия) и $54 \times 45$ (сплошная линия). . . . .	74
2.2	Зависимость $Re_L(\alpha)$ для канала с гребенчатым оребрением (сплошная кривая) и для канала с волнистым оребрением при $\rho = 2$ (штрих с точкой), 6 (пунктир) и 10 (штриховая линия). . . . .	75
3.1	Поперечное сечение канала (один период) при $L = 0.5$ , $\varepsilon = 0.4$ и $\rho = 2$ (слева) и $\rho = 4$ (справа) и соответствующие сетки с числом узлов $140 \times 17$ . . . . .	79
3.2	Профиль основного течения в плоском канале (Р) и оребренном канале при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и $L = 0.016, 0.268$ и $0.716$ (А, В и С соответственно). . . . .	80
3.3	Профиль основного течения в оребренном канале при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и $L = 1.444, 1.836, 3.012$ и $10$ (D, E, F и G соответственно). . . . .	81
3.4	Линии уровня $Re_E^{\alpha\beta}$ (вверху), $Re_L^{\alpha\beta}$ (посередине) и $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$ (внизу) для $L = 0.5$ и $\varepsilon = 0.2$ (слева) и $0.4$ (справа) при $\rho = 2$ (—) и $4$ (- -). . . . .	83
3.5	Линии уровня $Re_E^{\alpha\beta}$ (вверху), $Re_L^{\alpha\beta}$ (посередине) и $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(400)$ (внизу) для $L = 3$ и $\varepsilon = 0.2$ (слева) и $0.4$ (справа) при $\rho = 2$ (—) и $4$ (- -). . . . .	84

3.6	Линии уровня $\tilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re})$ для плоского канала, вычисленные при $\text{Re} = 3000$ (сверху слева), $\text{Re} = 3800$ (сверху справа), $\text{Re} = 3860$ (снизу слева) и $\text{Re} = 4000$ (снизу справа). В темно серых областях $\tilde{\Gamma}_{\max}^{\alpha\gamma}(\text{Re}) = \infty$ (на двух нижних рисунках). . . . .	86
3.7	Зависимости $\text{Re}_E$ (сверху) и $\text{Re}_L$ (снизу) от периода оребрения для $\varepsilon = 0.2$ (слева) и $0.4$ (справа) при $\rho = 2$ (—) и $4$ (- -); $\tilde{\text{Re}}_E \approx 33.07$ , $\tilde{\text{Re}}_L \approx 3.848 \times 10^3$ (· · ·). . . . .	89
3.8	Зависимости $\beta_E$ (сверху) и $\alpha_L$ (снизу) от периода оребрения для $\varepsilon = 0.2$ (слева) и $0.4$ (справа) при $\rho = 2$ (—) и $4$ (- -); $\tilde{\beta}_E$ и $\tilde{\alpha}_L$ (· · ·)	90
3.9	Действительная часть проекции скорости критического возмущения, отвечающего $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в плоском (P) и оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 0.016$ , $0.268$ и $0.716$ (A, B и C соответственно). .	94
3.10	Действительная часть проекции скорости критического возмущения, отвечающего $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 1.444$ , $1.836$ , $3.012$ и $10$ (D, E, F и G соответственно). . . .	95
3.11	Квадрат модуля проекции скорости критического возмущения, отвечающего $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в плоском канале (P) и оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 0.016$ , $0.268$ и $0.716$ (A, B и C соответственно).	96
3.12	Квадрат модуля проекции скорости критического возмущения, отвечающего $\text{Re}_E$ , на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 1.444$ , $1.836$ , $3.012$ и $10$ (D, E, F и G соответственно). . . . .	97
3.13	Квадрат модуля полной скорости критического возмущения, отвечающего $\text{Re}_E$ , в плоском канале (P) и оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 0.016$ , $0.268$ и $0.716$ (A, B и C соответственно). . . . .	98

3.14	Квадрат модуля полной скорости критического возмущения, отвечающего $Re_E$ , в оребренном канале при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и периодах оребрения $L = 1.444, 1.836, 3.012$ и $10$ (D, E, F и G соответственно). . . . .	99
3.15	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии $I$ , обеспечивающей $Re_L^I$ в оребренном канале с $L = 3$ и $\rho = 2$ , при трех значениях $\varepsilon = 0.4, 0.2, 0.1$ . . . . .	102
3.16	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии $I$ , обеспечивающей $Re_L^I$ в оребренном канале с $L = 3$ и $\rho = 2$ , при двух значениях $\varepsilon = 0.05, 0.01$ , и нейтрально устойчивой моды, отвечающей $\widetilde{Re}_L$ в плоском канале. . . . .	103
3.17	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии $II$ , обеспечивающей $Re_L^{II}$ в оребренном канале с $L = 3$ и $\rho = 2$ , при трех значениях $\varepsilon = 0.4, 0.2, 0.1$ . . . . .	104
3.18	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости нейтрально устойчивой моды симметрии $II$ , обеспечивающей $Re_L^{II}$ в оребренном канале с $L = 3$ и $\rho = 2$ , при двух значениях $\varepsilon = 0.05, 0.01$ . . . . .	105
3.19	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых $\partial^2 U / \partial y^2 = 0$ ( <i>пунктир</i> ) и $U = c$ ( <i>штриховые линии</i> ), при $L = 0.716$ , $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и $Re = Re_L$ . . . . .	107
3.20	Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых $\partial^2 U / \partial z^2 = 0$ ( <i>пунктир</i> ) и $U = c$ ( <i>штриховые линии</i> ), при $L = 3.012$ , $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и $Re = Re_L$ . . . . .	109
3.21	Зависимости $\Gamma_{max}$ ( <i>сверху</i> ) и $\beta_{max}$ ( <i>снизу</i> ) от периода оребрения для $\varepsilon = 0.2$ ( <i>слева</i> ) и $0.4$ ( <i>справа</i> ) при $\rho = 2$ (—) и $4$ (- -). . . . .	110

3.22	Действительная часть проекции скорости оптимального возмущения на плоскость поперечного сечения в плоском (Р) и оребренном канале при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и периодах оребрения $L = 0.016, 0.268$ и $0.716$ (А, В и С соответственно). . . . .	112
3.23	Действительная часть проекции скорости оптимального возмущения на плоскость поперечного сечения в оребренном канале при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и периодах оребрения $L = 1.444, 1.836$ и $3.012$ (D, E и F соответственно). . . . .	113
3.24	Сходимость по шагу сетки при вычислении зависимости характеристик устойчивости от периода оребрения для $\varepsilon = 0.2$ , $\rho = 2$ , $m_r \times m_s = 80 \times 11$ ( <i>пунктир</i> ) и $m_r \times m_s = 140 \times 17$ ( <i>сплошная линия</i> ). Штриховой линией изображены значения характеристик для плоского канала. . . . .	117
3.25	Сходимость по шагу сетки при вычислении зависимости характеристик устойчивости от периода оребрения для $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 4$ , $m_r \times m_s = 80 \times 11$ ( <i>пунктир</i> ) и $m_r \times m_s = 140 \times 17$ ( <i>сплошная линия</i> ). Штриховой линией изображены значения характеристик для плоского канала. . . . .	118

# Список таблиц

0.1	Экспериментальные данные о влиянии оребрения на переход к турбулентности и возмущения в пограничном слое на плоской пластине. . . . .	7
2.1	Число неизвестных в системе до и после редукции, а также требуемый для расчета объем оперативной памяти для разных размеров вычислительной сетки. . . . .	71
2.2	Расчет 32-х задач для различных пар $(\alpha, \beta)$ на пространственной сетке $50 \times 11$ на ПК и в разных режимах загрузки кластеров. . . . .	72
2.3	Расчет 8-и задач для различных пар $(\alpha, \beta)$ на пространственной сетке $50 \times 11$ при разных количествах ядер, используемых для решения одной задачи. . . . .	72
3.1	Параметры критического возмущения, отвечающего $Re_E$ , для плоского канала (P) и оребренного канала при $\rho = 2$ , $\varepsilon = 0.4$ и некоторых значениях периода оребрения. . . . .	92
3.2	Параметры критических возмущений (нейтрально устойчивых мод симметрий $I$ и $II$ ) для плоского канала (P) и оребренного канала при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и некоторых значениях периода оребрения. . . . .	108
3.3	Параметры оптимального возмущения в плоском канале (P) и оребренном канале при $\varepsilon = 0.4$ , $\rho = 2$ и некоторых значениях периода оребрения. . . . .	114

# Литература

1. Schmid P. J., Henningson D. S. Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer–Verlag, 2001. 556 с.
2. Physics of transitional shear flows / A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek [и др.]. Berlin: Springer–Verlag, 2011. 271 с.
3. Transition control by riblets in a swept wing boundary layer with embedded streamwise vortex / A. V. Boiko, V. V. Kozlov, V. V. Syzrantsev [и др.] // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1997. Т. 16, № 4. С. 465–482.
4. Luchini P., Trombetta G. Effects of riblets upon stability // Appl. Sci. Res. 1995. Т. 54. С. 313–321.
5. Grek G. R., Kozlov V. V., Titarenko S. V. An experimental study on the influence of riblets on transition // J. Fluid Mech. 1996. Т. 315. С. 31–49.
6. Blackwelder R. F., Swearingen J. D. The role of inflectional velocity profiles in wall bounded flows // Near-Wall Turbulence. Proc. 1988 Zorian Zorac Memorial Conference / под ред. S. J. Kline, N. H. Afgan. New York: Hemisphere, 1990. С. 268–288.
7. The influence of free-stream turbulence and surface ribbing on the characteristics of a transitional boundary layer / V. E. Kozlov, V. R. Kuznetsov, B. I. Mineev [и др.] // Near-Wall Turbulence. Proc. 1988 Zorian Zorac



Memorial Conference / под ред. S. J. Kline, N. H. Afgan. New York: Hemisphere, 1990. С. 172–189.

8. Грек Г. Р., Козлов В. В., Титаренко С. В. Исследование влияния оребрения поверхности на процесс развития уединенного волнового пакета ( $\Lambda$ -вихря) в ламинарном пограничном слое // Сиб. физ.-техн. журн. 1993. Т. 35, № 2. С. 29–36.
9. The influence of riblets on a boundary layer with embedded streamwise vortices / G. R. Grek, V. V. Kozlov, S. V. Titarenko [и др.] // Phys. Fluids A. 1995. Т. 7, № 10. С. 2504–2506.
10. Грек Г. Р., Козлов В. В., Титаренко С. В. Исследование влияния оребрения поверхности (риблет) на процесс развития двумерных возмущений (волн Толлмина–Шлихтинга) в ламинарном пограничном слое // Сиб. физ.-техн. журн. 1993. Т. 35, № 6. С. 26–30.
11. Theofilis V. Global linear instability // Annu. Rev. Fluid Mech. 2011. Vol. 43, no. 3. P. 319–352.
12. Gómez F., Gómez R., Theofilis V. On three-dimensional global linear instability analysis of flows with standard aerodynamics codes // Aerospace Science and Technology. 2014. Vol. 32, no. 1. P. 223–234.
13. Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М. Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 10. С. 1731–1747.
14. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Технология численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов реше-

- ния задач математической физики». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. С. 30–31.
15. Nechepurenko Yu. M., Boiko A. V., Sadkane M. Computation of optimal disturbances for duct flows // 14th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR–2008) / под ред. V. M. Fomin. Novosibirsk: Parallel, 2008. Т. 1. С. 189.
  16. Нечепуренко Ю. М., Бойко А. В. Вычисление чисел Рейнольдса и оптимальных возмущений для каналов постоянного сечения // Модели и методы аэродинамики: Материалы Девятой Международной школы-семинара / под ред. И. И. Липатова. М.: МЦНМО, 2009. С. 133–134.
  17. Boiko A. V., Nechepurenko Y. M., Sadkane M. Fast computation of optimal disturbances with a given accuracy for duct flows. // Comput. Math. Math. Phys. 2010. Vol. 50, no. 11. P. 1914–1924.
  18. Nechepurenko Yu. M., Sadkane M. A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2011. Т. 32, № 2. С. 349–363.
  19. Boiko A. V., Nechepurenko Yu. M., Sadkan M. Computing the maximum amplification of the solution norm of differential-algebraic systems // Comput. Math. Model. 2012. Т. 23, № 2. С. 216–227.
  20. Нечепуренко Ю. М. О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Доклады РАН. 2012. Т. 445, № 1. С. 17–19.
  21. Demyanko K. V., Nechepurenko Y. M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Vol. 28, no. 2. P. 125–148.

22. Демьянко К. В. Быстрые методы вычисления характеристик гидродинамической устойчивости. Дисс. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. н. / Московский физико-технический институт. М., 2014. 122 с.
23. Ключнев Н. В. Высокопроизводительный анализ устойчивости поперечно-периодических течений жидкости и газа // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 111–120.
24. Григорьев О. А., Ключнев Н. В. Применение численно-аналитического метода конформного отображения для построения сетки в оребренном канале // Выч. мет. прогр. 2014. Т. 15. С. 487–498.
25. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Об устойчивости течения Пуазейля в оребренном канале // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. М., 2014. № 89. 20 с.
26. Boiko A. V., Klyushnev N. V., Nechepurenko Y. M. On stability of Poiseuille flow in grooved channels // EPL (Europhysics Letters). 2015. Vol. 111, no. 1. P. 14001.p1–14001.p6.
27. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. С. 31–32.
28. Nechepurenko Y. M., Boiko A. V., Klyshnev N. V. Effect of wavy grooves on stability of shear flows // International Conference on the Methods of Aerophysical Research: June 30–July 6, 2014, Novosibirsk, Russia. Abstracts / Ed. by V. M. Fomin. Novosibirsk: Avtograf, 2014. Vol. 1. P. 161–162.
29. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений // Модели и методы аэроди-

- намики: Материалы Тринадцатой Международной школы-семинара / под ред. И. И. Липатова. М.: МЦНМО, 2013. С. 35–36.
30. Ключнев Н. В. Высокопроизводительная реализация численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений жидкостей и газов // Труды 55-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2012. С. 164.
31. Ключнев Н. В. Влияние волнистого оребрения на устойчивость течения Пуазейля // Труды 56-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2013. С. 134.
32. Ключнев Н. В. Влияние периода оребрения на характеристики устойчивости течения Пуазейля // Труды 57-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2014. С. 65.
33. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
34. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic stability. 2nd изд. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 628 с.
35. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
36. Юдович В. И. Методы линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984. 192 с.
37. Gunzburger M. D. Finite element methods for viscous incompressible flows. London: Academic Press, 1989. 288 p.
38. Henningson D. S., Reddy S. C. On the role of linear mechanisms in transition to turbulence // Phys. Fluids A. 1994. Т. 6, № 3. С. 1396–1398.
39. Reshotko E. Transient growth: A factor in bypass transition // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, no. 5. P. 1067–1075.

40. Lin C. C. On the instability of laminar flows and its transition to the turbulence // Boundary Layer Research Symposium. Berlin: Springer-Verlag, 1958. C. 144–160.
41. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 212. P. 437–449.
42. Temam R. Navier–Stokes equations, theory and numerical analysis. Revised edition. Amsterdam–New York: North-Holland Publishing, 1979. 203 p.
43. Temam R. Navier–Stokes equations and nonlinear functional analysis. 2nd edition. Philadelphia: SIAM, 1995. 141 p.
44. Debnath L., Mikusinski P. Introduction to Hilbert spaces with applications. San Diego: Academic Press, 1990.
45. Gordon W. J., Hall C. A. Construction of Curvilinear Coordinate System and Their Applications to Mesh Generation // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1973. Vol. 7. P. 461–477.
46. Hesthaven J.S., Gottlieb S., Gottlieb D. Spectral methods for time-dependent problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 284 c.
47. Spectral methods: Fundamentals in single domains / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni [и др.]. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 581 c.
48. Berrut J. P., Trefethen L. N. Barycentric Lagrange interpolation // SIAM Rev. 2004. T. 46, № 3. C. 501–517.
49. Baltensperger R. Improving the accuracy of the matrix differentiation method for arbitrary collocation points // Appl. Num. Math. 2000. T. 33. C. 143–149.
50. Weideman J. A. C., Reddy S. C. A MATLAB Differentiation Matrix Suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. T. 26, № 4. C. 465–519.

51. Don W. S., Solomonoff A. Accuracy and speed in computing the Chebyshev collocation derivative // SIAM J. Sci. Comput. 1994. T. 6. С. 1253–1268.
52. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 561 p.
53. LAPACK users guide / E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof et al. 3rd edition. Philadelphia: SIAM, 1999. 429 p.
54. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler M. A. Computer methods for mathematical computations. New York: Prentice-Hall, 1976. 270 с.
55. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix computations. 3rd edition. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996. 694 p.
56. Higham A. V. The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 4. P. 1179–1193.
57. Sidje R. B. Software package for computing matrix exponentials // ACM Trans. Math. Softw. 1998. Vol. 24, no. 1. P. 130–156.
58. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М.: Изд-во МГУ, 2004. 71 с.
59. Boiko A. V., Nechepurenko Yu. M. Technique for the numerical analysis of the riblet effect on temporal stability of plane flows // Comput. Math. Math. Phys. 2010. T. 50, № 6. С. 1055–1070.
60. Григорьев О. А. Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 27–36.
61. Ehrenstein U. On the linear stability of channel flow over riblets // Phys. Fluids. 1996. Т. 8, № 11. С. 3194–3196.

62. Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М. Влияние оребрения на временную устойчивость плоского течения Пуазейля // Модели и методы аэродинамики: Материалы Восьмой Международной школы-семинара / под ред. И. И. Липатова. М.: МЦНМО, 2008. С. 22–23.
63. Nechepurenko Yu. M., Boiko A. V. Temporal stability of ribbed duct flow // 15th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR'2010) / под ред. V. M. Fomin. Novosibirsk: Parallel, 2010. Т. 1. С. 194–195.
64. Hall P., Horseman N. J. The linear inviscid secondary instability of longitudinal vortex structures in boundary layers // J. Fluid Mech. 1991. Т. 232. С. 357–375.
65. Исследование влияния внутренней структуры продольного вихря на развитие бегущих возмущений в нем / А. В. Бойко, В. В. Козлов, В. В. Сызранцев [и др.] // Теплофиз. аэромех. 1997. Т. 4, № 4. С. 1–13.
66. Criminale W. O., Jackson T. L., Joslin R. D. Theory and computation of hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. P. 441.