

«Утверждаю»  
Директор  
Федерального государственного  
Бюджетного учреждения науки  
Вычислительного центра им. А.А. Дородницына  
Российской академии наук

Академик  
Ю.Г. Евтушенко



28 марта 2015 г.

## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного учреждения науки  
Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук  
на диссертационную работу Григорьева Олега Александровича «Конформные отображения  
прямоугольных многоугольников: численно-аналитический метод», представленную на  
соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.07 - «Вычислительная математика»

Диссертационная работа О.А. Григорьева посвящена разработке, обоснованию и реализации численно-аналитического метода конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольные области специального вида.

**Содержание.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, изложена на 86 страницах, включает 19 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 78 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель, основные элементы новизны и теоретической и практической значимости диссертационной работы. Перечислены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе изложен численно-аналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольники специальных типов, все углы которых кратны прямому. Этот метод разработан в рамках предложенного ранее А.Б. Богатыревым подхода, главной идеей которого является использование связи между интегралом Кристоффеля-Шварца для многоугольников, все углы которых соизмеримы с  $\pi$ , и абелевыми интегралами на определенной римановой поверхности. Получено полуаналитическое параметрическое представление конформного отображения многоугольников на полуплоскость в виде комбинации тэта-функций Римана на ассоциированных с ними поверхностях. Эти представления зависят от набора параметров (модулей) гиперэллиптической поверхности. Исследован вопрос об области изменения этих величин. Показано, что эта область задается набором линейных неравенств. Выведены системы уравнений, связывающие параметры отображения с геометрическими размерами рассматриваемых многоугольников. Показано, что решения данных систем существует и единственны в своем пространстве параметров.

Вторая глава посвящена разработке численного метода решения приведенных в первой главе нелинейных систем, связывающих вспомогательные параметры. Экспериментально исследовано влияние явления кроудинга (скупивания) на эти параметры при вырождении многоугольников. Сформулирован метод приближенного решения полученных в первой главе

нелинейных систем, являющийся вариантом метода Ньютона с продолжением по параметру. Предложен способ нахождения начального приближения для этого метода.

Третья глава посвящена различным приложениям метода. Предложены и обоснованы методы построения гармонических векторных полей в многоугольных областях специального вида, основанные на результатах первой главы. Построены интегральные кривые этих полей. Приведен метод вычисления конформного модуля для одного из типов областей, рассмотренных в главе 1. Проведенные с помощью этого метода вычисления сопоставлены с результатами одного из известных программных пакетов, решающих задачу параметров для интеграла Кристоффеля-Шварца – SCPACK. Также приводятся результаты совместной с Н.В. Ключневым работы по исследованию характеристик гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в трехмерном канале, поперечное сечение которого является периодической многоугольной областью. Период такой области — многоугольник одного из двух специальных типов, рассмотренных в первой главе. Такие области известны как *каналы с гребенчатым оребрением*. Для отображения расчетной области (прямоугольник) на физическую применяется конформное отображение, вычисленное с помощью изложенного в первой главе метода. Приведены результаты вычисления основного течения и кривых нейтральной устойчивости.

**Актуальность.** Многие краевые задачи математической физики в областях сложной формы могут быть решены с использованием конформных отображений. Например, задачу Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области можно трансформировать в задачу Дирихле в стандартной области (например, верхней полуплоскости). С XIX века известно интегральное представление Кристоффеля-Шварца для конформного отображения полуплоскости на (возможно неограниченный) многоугольник. Для вычисления отображения необходимо найти неизвестные параметры этого представления. Традиционный подход сводится к построению системы, связывающей параметры интеграла Кристоффеля-Шварца – прообразы вершин многоугольника. Актуальной проблемой является выбор хорошего начального приближения для итерационного решения системы на искомые параметры, а также обеспечение высокой точности вычисления интегралов, фигурирующих в этой системе.

Трудности, возникающие при вычислении параметров интеграла Кристоффеля-Шварца, значительно возрастают при появлении эффекта кроудинга. Этот эффект заключается в экспоненциальном сближении (скупивании) прообразов вершин (в метрике римановой сферы), при том, что сами вершины находятся далеко друг от друга. Поиск способов преодоления трудностей, порождаемых этим эффектом, является еще одной актуальной проблемой.

**Новизна исследования и полученных результатов, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.** Научная новизна работы состоит в новом подходе к решению означенных выше задач для многоугольников специального вида, все углы которых кратны прямому. Предложенный в работе метод позволяет избежать описанных выше вычислительных проблем, поскольку уравнения системы, связывающие параметры ассоциированной с многоугольником римановой поверхности, даются в терминах быстро сходящихся тэта-рядов, для вычисления которых существуют методы с априорной оценкой точности. Кроме того, часть уравнений для определения вспомогательных параметров линейна. Новая параметризация задачи отчасти уменьшает влияние кроудинга, что показано на численном эксперименте.

С помощью включения нового метода в технологию исследования гидродинамической устойчивости впервые были построены кривые нейтральной устойчивости для каналов с гребенчатым оребрением.

**Значимость для науки и производства полученных автором диссертации результатов.** Каждый новый метод конформного отображения имеет ценность, т.к. области



их применения дополняют друг друга. Предложенный метод вычисления конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольники специального вида является еще одним приложением классической теории тэта-функций, развитой в трудах Якоби, Розенхайна, Римана и других ученых.

Практическая значимость работы заключается во включении программной реализации метода конформного отображения в технологию исследования гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в оребренном канале, построенную Ю.М. Нечепуренко, А.В. Бойко и Н.В. Ключневым. Это позволило построить кривые нейтральной устойчивости для каналов с т. н. гребенчатым оребрением.

**Рекомендации по использованию результатов и выводов диссертации.** Методы, приведенные в диссертационной работе, могут быть использованы для высокоточного построения конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольники, все углы которых кратны прямому. Ввиду связи между задачей о конформном отображении и задачами теории потенциала, они могут применяться для решения некоторых плоских задач математической физики в многоугольных областях.

Использование и дальнейшее развитие полученных в диссертационной работе результатов можно осуществлять в академических институтах, таких, как Институт вычислительной математики РАН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Институт прикладной механики им. М.В. Келдыша РАН, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Институт вычислительного моделирования СО РАН. Результаты работы могут быть также использованы для исследования существующих вычислительных алгоритмов и библиотек стандартных программ, включающих в себя алгоритмы поиска конформного отображения многоугольных областей на полуплоскость; в частности, алгоритмы поиска параметров интеграла Кристоффеля-Шварца.

В целом, работа выполнена на высоком уровне, все ее положения, выводы и рекомендации обоснованы. Достоверность основных результатов, сформулированных в заключении, не вызывает сомнений. Разработанные автором методы и программы являются новыми и эффективными. Основные результаты диссертации опубликованы в открытой печати, в том числе, две публикации есть в журналах из перечня ВАК, результаты обсуждались на различных конференциях и семинарах. Содержание диссертации достаточно полно отражено в автореферате.

**Замечания.** По диссертации и автореферату можно сделать следующие замечания:

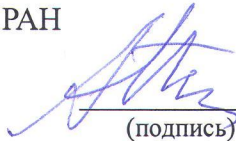
1. Недостаточное внимание уделено исследованию влияния различных вырождений многоугольников на значение вспомогательных параметров конформного отображения на эти многоугольники. В частности, в первой главе построены методы вычисления конформных отображений верхней полуплоскости на два типа многоугольников, в то время как численные исследования во второй главе посвящены только одному из них.
2. Целесообразность представления результатов численных экспериментов по расчету гармонических полей в многоугольных областях в виде изображения интегральных кривых этих полей представляется сомнительной. Для возможности воспроизвести результаты автора, было бы лучше указать коэффициенты интенсивности возле особых точек границы области (вершин многоугольника).

Перечисленные замечания и наличие вопросов дискуссионного характера не снижают общей высокой оценки диссертационной работы и не влияют на научную значимость и практическую ценность полученных результатов. Таким образом, работа полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК Минобрнауки России, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная

математика», а ее автор, Григорьев Олег Александрович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Отзыв на диссертационную работу был обсужден и утвержден на заседании научного семинара ВЦ РАН под руководством академика РАН Ю.Г. Евтушенко 6 марта 2015 года, протокол №3.

Заведующий отделом прикладной  
математической физики, ВЦ РАН  
д.ф.-м.н., профессор




(подпись)

Толстых Андрей Игоревич

(расшифровка подписи,  
фамилия, имя, отчество — полностью)

Подпись А.И. Толстых удостоверяю:  
Ученый секретарь ВЦ РАН, к.т.н.



(подпись)

Трусова Юлия Олеговна

(расшифровка подписи,  
фамилия, имя, отчество — полностью)

Почтовый адрес: 119333, Москва, ул. Вавилова, 40

Телефон 8(499)135-04-40

Адрес электронной почты [wcan@ccas.ru](mailto:wcan@ccas.ru)

Организация — место работы: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук



Подпись руки тов. Толстых А.И.  
**УДОСТОВЕРЯЮ**  
Ученый секретарь ВЦ РАН  
10 марта 2015 г.