

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
ГРИГОРЬЕВА ОЛЕГА АЛЕКСАНДРОВИЧА
«Конформные отображения прямоугольных
многоугольников: численно-аналитический метод»
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 – вычислительная математика

Диссертационная работа О. А. Григорьева «Конформные отображения прямоугольных многоугольников: численно-аналитический метод» посвящена разработке нового численно-аналитического метода отыскания конформных отображений верхней полуплоскости на многоугольники специального вида.

Обсудим кратко *содержание* рассматриваемой диссертации, состоящей из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 86 страницах и содержит 19 рисунков и 2 таблицы. Список литературы включает 78 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы его основные цели и задачи, выделены основные элементы новизны и теоретической и практической значимости. Кроме того, во введении приведены формулировки основных результатов диссертации, выносимых на защиту.

Первая глава диссертации посвящена изложению численно-аналитического метода отыскания конформных отображений верхней полуплоскости на многоугольники специального вида (все углы которых кратны $\pi/2$). Предлагаемый соискателем метод разработан в рамках общего подхода, недавно сформулированного А. Б. Богатыревым (научным руководителем соискателя). Этот подход основан на идее использования связи между интегралами Кристоффеля–Шварца для многоугольников рассматриваемого типа и абелевыми интегралами на римановых поверхностях специального вида (гиперэллиптических). Важно отметить, что в рамках этого подхода для каждого комбинаторного типа многоугольника (под которым понимается порядок чередования входящих углов, разрезов и выходов на бесконечность при обходе границы многоугольника в положительном направлении) возникает необходимость нахождения и решения специальных систем нелинейных уравнений для определения параметров конформного отображения. Эти системы существенно отличаются для различных комбинаторных типов и в каждом конкретном случае приходится разрабатывать и использовать свой метод решения. В

рассматриваемой работе для двух конкретных комбинаторных типов многоугольников соискателем получено представление конформного отображения соответствующего многоугольника на полуплоскость в виде комбинаций тета-функций Римана на специальной, ассоциированной с рассматриваемым многоугольником, римановой поверхности. Надо отметить, что эти комбинаторные типы являются наиболее сложными и общими из изученных в настоящее время в рамках обсуждаемого подхода.

Полученное автором представление зависит от набора специальных параметров, которыми являются: элементы матрицы периодов римановой поверхности, ассоциированной с рассматриваемым многоугольником и образы нулей и полюсов дифференциала Кристоффеля–Шварца при отображении Абеля–Якоби. Соискателем выведены системы уравнений на эти параметры и показано, что решения этих систем существуют и единственны в определенных областях соответствующих пространств параметров.

Во второй главе диссертации разрабатывается численный метод решения полученных в первой главе систем нелинейных уравнений на параметры искомого конформного отображения. Этот метод является вариантом метода Ньютона с продолжением по параметру. В нем использована оригинальная идея, основанная на комбинации применения модулярных преобразований и алгоритма Зигеля. Хорошо известно, что большинство известных методов численного нахождения конформных отображений сталкиваются с существенными вычислительными трудностями из-за эффекта, выражающегося в сближении (скупивании) прообразов вершин многоугольника (в метрике сферы) при том, что сами вершины находятся далеко друг от друга. Это явление называется «кроудингом». Поиск более или менее общих методов преодоления трудностей, создаваемых этим эффектом, является важной и актуальной задачей вычислительной теории конформных отображений. Приведенные автором результаты численных экспериментов позволяют судить о том, что предложенный метод позволяет находить параметры отображения и вычислять само отображение с хорошей точностью даже в условиях кроудинга.

Третья глава диссертации посвящена приложениям полученного метода. Одним из наиболее важных и значимых приложений, с моей точки зрения, является тестирование других существующих методов вычисления конформных отображений и методов приближенного решения задачи Дирихле с кусочно-постоянными граничными данными в многоугольных областях. Кроме в третьей главе диссертации приводятся результаты совместной работы автора и Н. В. Ключнева по исследованию характеристик гидродинамической устойчивости течения

Пуазейля в трехмерном канале, поперечное сечение которого является периодической областью рассматриваемого типа.

В заключении в краткой форме сформулированы основные результаты диссертации и изложены перспективы развития полученного метода и развития используемого подхода в целом.

Рассмотрение диссертации позволяет сделать следующие выводы:

Конформные отображения являются одним из мощных инструментов решения задач математической физики в областях со сложной геометрией. Поэтому развитие численных и численно-аналитических методов отыскания конформных отображений различных областей является важной и актуальной задачей, лежащей на стыке вычислительной математики и комплексного анализа. Несмотря на то, что представление Кристофеля–Шварца конформного отображения полуплоскости на многоугольник хорошо известно уже более 100 лет, задача численного определения параметров такого отображения для конкретных многоугольников является трудной задачей, не имеющей пока адекватного по широте применимости общего решения. Таким образом, создание новых подходов и методов (особенно, подходов и методов, позволяющих преодолевать сложности связанные с эффектом кроудинга) в этом направлении является актуальным. *Таким образом, тема диссертации является актуальной.*

Основным достижением диссертации, определяющим ее *научную новизну*, является новый полуаналитический метод отыскания конформных отображений многоугольников специальных комбинаторных типов с углами, кратными прямому, на полуплоскость. Этот метод получен в рамках подхода, недавно предложенного А. Б. Богатыревым и позволяет избежать ряда вычислительных проблем, так как он основан на использовании быстро сходящихся тета-рядов, для вычисления которых существуют методы с априорной оценкой точности. Кроме того, этот метод позволяет в некоторых случаях уменьшить влияние кроудинга.

Полученный в диссертации метод отыскания конформных отображений многоугольников специального вида на полуплоскость является существенным вкладом в теорию численных методов конформных отображений и ее применения. Результаты диссертации можно рассматривать и как еще одно интересное применение теории тета-функций. Это определяет *теоретическую ценность* результатов диссертации. *Практическая значимость* результатов диссертации уже подтверждена их использованием для тестирования имеющихся пакетов прикладных программ и при исследовании задачи устойчивости течения Пуазейля в канале с оребрением.

Считаю, что полученные результаты диссертации найдут дальнейшее применение в исследованиях, проводимых специалистами Института вычислительной математики РАН, Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН, Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, других научных центров в России и за рубежом. Материалы диссертации могут быть использованы в специальных курсах по теории и практике конформных отображений.

Результаты диссертации своевременно опубликованы автором в 6 работах, включая 2 статьи в журналах из перечня ВАК и были представлены на ряде конференций и семинаров. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания. По диссертации имеется ряд замечаний. Не останавливаясь подробно на заметном количестве опечаток, мелких неточностей и не вполне аккуратных формулировок (неизбежных в работах достаточно большого объема), сформулируем те замечания, которые представляются наиболее значимыми:

- (1) Схема метода, являющегося основным результатом работы, дается диаграммой (1.13) без необходимых для аккуратной формулировки и четкого понимания метода пояснений. Эти пояснения могут быть восстановлены из окружающего текста, но они должны были быть явно приведены в работе.
- (2) В разделе 1.3 диссертации, в Утверждении 2.1 (это один из основных результатов диссертации) используются формулировки типа «для многоугольника, приведенного на рисунке...». Считаю, что в соответствующих утверждениях надо четко определять класс многоугольников, для которых они верны. Это можно делать, например, в терминах комбинаторного типа или других подходящих характеристик. Приводимые рисунки могут служить лишь удобной иллюстрацией формулировок.
- (3) Представляется, что основные результаты диссертации могут быть без существенных усилий распространены на другие комбинаторные типы (по крайней мере в случае, когда род возникающей римановой поверхности не выше 3). Но это, к сожалению, не вошло в работу.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы и на научную значимость и практическую ценность полученных результатов. Таким образом считаю, что диссертация О. А. Григорьева «Конформные отображения прямоугольных многоугольников: численно-аналитический метод» соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК

Минобразования России, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика», а ее автор, Григорьев Олег Александрович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры Прикладной математики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего
профессионального образования «Московский
государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана»

/ Федоровский Константин Юрьевич /

Почтовый адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, стр. 1.

Телефон: (499) 263-63-26

Адрес электронной почты: fn2@bmstu.ru

В Е Р Н О:

