

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительной математики Российской академии наук  
(ИВМ РАН)

*На правах рукописи*

*УДК 519.65*

Григорьев Олег Александрович

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
МНОГОУГОЛЬНИКОВ: ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, в.н.с.  
Богатырев А.Б.

Москва – 2014

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Обоснование метода</b>	<b>19</b>
1.1 Основные сведения об абелевых интегралах . . . . .	22
1.2 Вычисление конформного отображения . . . . .	26
1.3 Система уравнений на вспомогательные параметры . . . . .	32
1.4 Модель пространства параметров для $n=2,3$ . . . . .	38
<b>2 Вычислительный алгоритм</b>	<b>41</b>
2.1 Пространства модулей многоугольников . . . . .	43
2.2 Влияние сгущивания на вспомогательные параметры . . . . .	50
2.3 Модулярные преобразования . . . . .	51
<b>3 Численные эксперименты и приложения</b>	<b>55</b>
3.1 Генерация ортогональных сеток. Сравнение с SCPACK . . . . .	55
3.2 Вычисление гармонических векторных полей . . . . .	59
3.3 Численные эксперименты по сравнению с Ani2D . . . . .	67
3.4 Исследование устойчивости течений . . . . .	71
<b>Заключение</b>	<b>77</b>

# Введение

## Объект исследования.

Численные методы конформных отображений - достаточно старый раздел вычислительной математики, восходящий к работам Римана [39] и Кёбе [30]. Тем не менее, этот «нелюбимый пасынок численного анализа», по выражению Тобина Дрисколла [12], долгие годы представлял собой разрозненный набор методов, точность и устойчивость которых *a priori* не гарантировалась и подтверждалась (или опровергалась) в основном экспериментально. Лишь в 1970-х годах в работах [21, 25] появилось понятие *кроудинг* [73] (crowding phenomenon) – сгущивание точек, и была признана центральная роль этого явления в вычислительных проблемах, преследующих все численные методы конформных отображений (примечательно, что в первой посвященной им монографии [31] это явление даже не было упомянуто).

Основной задачей теории является *задача Римана*, заключающаяся в следующем. Дана жорданова область  $\Omega \in \mathbb{C}$  (т.е.  $\partial\Omega$  – жорданова кривая). Необходимо найти обратимое конформное отображение  $f$  этой области на единичный круг  $\mathbb{D}$ . Поскольку искомая функция взаимно-однозначна, часто ставится также обратная задача: найти отображение  $F : \mathbb{D} \mapsto \Omega$ , обратное к  $f$ , дающему решение задачи Римана.

Базовый факт двумерной теории конформных отображений заключается в том, что любая комплексно-аналитическая функция  $g(z) : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ , взаимно-однозначная на свой образ, является конформным отображением, т.е. сохраняет углы между кривыми. Действительно,  $g'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$  (прямое следствие

взаимной однозначности), а значит,  $g(z_0 + \Delta z) = g(z_0) + |g'(z_0)|e^{i \arg(g'(z_0))} \Delta z + o(|\Delta z|^2)$ , то есть в малом  $g(z)$  действует как композиция сдвига, поворота и гомотетии, и следовательно, конформно.

Разрешимость задачи Римана гарантируется следующей теоремой, которая также дает достаточное условие единственности такого решения.

**Теорема 0.1** (Риман). *Для любой односвязной области  $\Omega$  с границей, состоящей более чем из одной точки, существует взаимно-однозначное конформное отображение*

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{D}. \quad (1)$$

*Кроме того, если задать точку  $z_0 \in \Omega$  так, что*

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0, \quad (2)$$

*то такое отображение будет единственным.*

Классическое доказательство теоремы 0.1 [39] было неконструктивным. Первое конструктивное доказательство [30] дало и первое семейство численных методов, известных как методы растяжения. [26, 38]

Для построения численных методов решения задачи Римана чрезвычайно важна следующая теорема, дающая также более удобное условие единственности.

**Теорема 0.2** (Каратеодори-Осгуд). *Пусть  $\Omega$  — жорданова область, и пусть  $f$  — конформное отображение  $\Omega$  на  $\mathbb{D}$ . Тогда  $f$  может быть продолжено до взаимно однозначного отображения на замыкание  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ . Кроме того, всегда существует и единственно такое конформное отображение  $\Omega$  на  $\mathbb{D}$ , что его продолжение переводит любые три точки на  $\partial\Omega$  в любые три точки на  $\partial\mathbb{D}$  (при согласованности ориентаций).*

В дальнейшем продолжение решения задачи Римана (1) на  $\bar{\Omega}$  мы будем обозначать через  $f$ , а продолжение решения обратной задачи на  $\bar{\mathbb{D}}$  — через  $F$ .

Важность теоремы 0.2 заключается в том, что она позволяет свести обратную задачу Римана к вычислению функции соответствия границ  $\phi(t) := F(e^{it})$ , определенную на отрезке  $[0; 2\pi]$ . Зная ее, можно вычислить образы точек внутри единичного круга с помощью интеграла Коши

$$F(w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(t) dt}{1 - w_0 e^{-it}} \quad (3)$$

Этот факт используется группой методов, называемых *методами сведения к интегральному уравнению* [56]. Один из наиболее известных представителей этой группы - метод Теодорсена [44]. Предполагается, что область  $\Omega$  звездная, и выполняются условия однозначности Римана:

$$F(0) = 0, \quad F'(0) > 0. \quad (4)$$

Поскольку действительная  $u$  и мнимая  $v$  части функции соответствия границ являются сопряженными гармоническими функциями в  $\mathbb{D}$ , они связаны соотношением [56]

$$v(e^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\vartheta}) \operatorname{ctg} \left( \frac{\phi - \theta}{2} \right) d\theta \quad (5)$$

Пусть  $\phi(t) = F(e^{it}) = \rho(t)e^{i\vartheta(t)}$ , и пусть  $H(w) = \ln \frac{F(w)}{w}$ . Поскольку  $F'(0) \neq 0$  и  $F(w) \neq 0$  при  $w \in \mathbb{D} \setminus 0$  в силу взаимной однозначности отображения  $f$ , выражение под логарифмом не имеет нулей в  $\mathbb{D}$ , т.е.  $H(z)$  голоморфна в  $\mathbb{D}$ . Ее действительная и мнимая части  $H(e^{it}) = \ln \rho(t) + i(\vartheta(t) - t)$ . Поскольку область звездная, модуль однозначно зависит от полярного угла, т.е.  $\rho(t) = b(\vartheta(t))$ . Пользуясь формулой (5), получаем интегральное уравнение на аргумент функции соответствия границ

$$\vartheta(\phi) = \phi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(b(\vartheta(\phi))) \operatorname{ctg} \left( \frac{\phi - \theta}{2} \right) d\theta \quad (6)$$

Поскольку ядро такого уравнения сингулярно, для его численного решения предпочтительно использовать не прямые итерационные методы, а метод Фурье.

Иначе используется функция соответствия границ в методе, предложенном Форнбергом в 1980 году [20]. Его идея такова: для приближенного вычисления интеграла Коши (3) достаточно знать значение подынтегрального выражения в конечном числе коллокационных точек на границе. Эти значения можно вычислить, пользуясь отсутствием главной части в разложении ряда Лорана для решения обратной задачи Римана.

Пусть граница области  $\Omega$  задаётся параметрически как  $z = \gamma(s)$ , и пусть  $s_j : \gamma(s_j) = F(e^{\frac{2ij\pi}{2N}})$ ,  $j \in \overline{1, \dots, 2N}$ , задача - найти эти числа, исходя из того, что в разложении  $\phi(t)$  в ряд Фурье отсутствуют члены с отрицательными индексами. Аппроксимируя известное выражение для коэффициентов Фурье  $a_{-k}$ ,  $k \in \overline{1, \dots, N}$  квадратурной формулой, Форнберг получил систему из  $N$  (комплексных) уравнений на  $2N$  (действительных) неизвестных вида

$$\sum_{j=1}^{2N} \gamma(s_j) e^{\frac{2\pi i k j}{2N}} = 0, \quad (7)$$

решение которой ищется следующим образом. Пусть  $s_j^{(0)}$  - начальное приближение. Строится следующий итерационный процесс:  $\Delta s_j^{(k)} = s_j^{(k+1)} - s_j^{(k)}$  ищется из системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2N} (\gamma(s_j^{(k)}) + \gamma'(s_j^{(k)}) \Delta s_j^{(k)}) e^{\frac{2\pi i k j}{2N}} = 0 \\ \sum_{j=1}^{2N} (\overline{\gamma(s_j^{(k)})} + \overline{\gamma'(s_j^{(k)})} \Delta s_j^{(k)}) e^{-\frac{2\pi i k j}{2N}} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Полученное  $s_j^{(k+1)} = \Delta s_j^{(k)} + s_j^{(k)}$  используется в качестве следующего приближения. Метод обладает линейной сходимостью [26].

При приближенном решении задачи Римана используется и другой вспомогательный объект — ядро Сегё. Оно определяется как ядро ортогонального проектора из гильбертова пространства  $L^2(\partial\Omega, ds)$  квадратично-интегрируемых функций  $\partial\Omega \mapsto \mathbb{C}$  на пространство Харди следов голоморфных в  $\Omega$  функций. Существует явная формула, выражающая решение задачи

Римана через ядро Сегё. Некоторыми авторами [29, 35] были предложены методы, в которых ядро Сегё находилось из интегральных уравнений.

Однако большинство методов решения задачи Римана направлены непосредственно на вычисление конформного отображения. Кроме уже упомянутых методов растяжения, к ним относятся методы теории потенциала [26, 72]. Они основаны на следующем простом наблюдении. Пусть функция  $f$  дает решение задачи Римана для жордановой области  $\Omega \ni 0$  и выполняются условия (2) для  $z_0 = 0$ . Тогда функция  $H(z) = \ln \frac{f(z)}{z}$  комплексно-аналитична в  $\Omega$ . Для ее продолжения на  $\partial\Omega$  (см. теорему 0.2) верно

$$\Re H(\eta(s)) = -\ln |\eta(s)|, \quad (9)$$

где  $\eta(s)$  – параметризация (необязательно натуральная)  $\partial\Omega$ .

Поскольку  $\Re H(z)$  является гармонической в  $\Omega$ , задача Римана сводится к задаче Дирихле в  $\Omega$ , которую можно приближенно решать с помощью одного из многочисленных методов интегральных уравнений [43, 47]. Для того, чтобы найти  $\Im H(z)$ , необходимо найти сопряженную к  $\Re H(z)$  гармоническую функцию. Стоит отметить, что связь между задачей Дирихле и задачей Римана используется и в обратную сторону – методы вычисления конформных отображений используют для решения задач математической физики.

Другое семейство методов основано на вариационных принципах Бибербаха и Жюлиа [5, 28, 61]. Первый из них заключается в том, что среди всех голоморфных в  $\Omega \ni \{0\}$  функций  $f : f(0) = 0, f'(0) = 1$  функция  $\check{f}$ , областью значений которой является круг, дает наименьшую площадь образа  $f(\Omega)$ . Если  $\rho$  – радиус этого круга, то  $\frac{\check{f}(z)}{\rho}$  дает решение обратной задачи Римана. Принцип Жюлиа гласит, что (при некоторых дополнительных требованиях к области  $\Omega$ ) среди всех вышеописанных функций отображение на круг дает наименьшую длину границы. Эти принципы позволяют переформулировать задачу поиска конформного отображения как проблему минимизации определенных функци-

оналов. Ее решение ищется в виде линейной комбинации аппроксимирующей системы функций: примеры таких систем приведены в [59].

Хотя перечисленные методы происходят из совершенно разных разделов математики, вычислительные проблемы, возникающие при их реализации, четко разделяются на два типа:

1. Методы решения прямой задачи нечувствительны к начальному приближению, но требуют значительных затрат для получения решения с приемлемой точностью или вообще не позволяют ее достичь. Методы, вычисляющие отображение в виде разложения по аппроксимирующей системе функции, показывают вычислительную неустойчивость при расчете старших коэффициентов этого разложения [10, 36, 73], а методы, вычисляющие значение отображения в точке, показывают очень медленную сходимость [38].
2. Методы решения обратной задачи, напротив, требуют хорошего начального приближения  $\tilde{F}(z)$ . Норма разности отклонения  $\tilde{F}(z)$  от точного решения  $\varepsilon = \|F(z) - \tilde{F}(z)\|_{L^2(\mathbb{D})}$  может быть априорно оценена; это позволяет заранее предсказать, сможет ли метод уменьшить эту разность. В том случае, однако, если необходимое значение  $\varepsilon$  меньше машинного нуля, метод становится вовсе непригоден [10, 11].

Некоторые авторы называют эти две группы методов соответственно «быстрыми» и «точными» [38, 56]. Многие численные методы являются гибридными, используя «быстрый» для генерации начального приближения [34, 38].

Исследования [21, 25] показали, что перечисленные трудности связаны в первую очередь не с особенностями конкретного метода, а со свойствами отображаемой области - локальными (особые точки границы области - для кусочно аналитической границы функция не может быть голоморфно продолжена в их окрестность) и глобальными (форма области - в малом конформное



отображение переводит диск в диск, а глобально может переводить единичный круг в вытянутый образ). Вторым фактором приводит к явлению кроудинга [73], или сгущения точек. Глобально оно проявляется в экспоненциальном сгущении образов равномерно распределенных на границе единичного круга точек возле одного или нескольких центров, локально - в несоизмеримых значениях модуля производной отображения.

После того, как было открыто явление сгущения, усилия вычислителей были брошены на поиск количественных характеристик этого явления, а также на разработку методов, позволяющих решать задачу Римана в машинной арифметике с заданной длиной мантииссы при наличии сильного сгущения [2, 10, 14, 15]. При этом важной задачей является сокращение разрыва между точностью приближенного решения, которое может дать «быстрый» метод, и точностью, которая требуется от начального приближения для «точного» метода.

Подходы, примененные разными авторами, обычно основывались на одном из трех принципов:

1. Модификация уже имеющихся методов. В частности, задачи теории потенциала, к которым сводится задача Римана, для «плохих» областей решаются методом декомпозиции [14]; предлагаются способы решения плохо обусловленных систем, возникающих при решении интегральных уравнений и т.д.
2. Вводится некая вспомогательная область, при отображении на которую образы точек  $\partial\Omega$  не сгущаются. Для нее самой отображение на круг находится с высокой точностью (предпочтительно аналитически), искомое отображение вычисляется как композиция [13, 22].
3. В качестве начального приближения для «точных» методов выбирается отображение на область  $\Omega'$ , близкую к  $\Omega$  в некоторой естественной топологии на множестве жордановых областей в  $\mathbb{C}$ . Такой областью может

быть, например, многоугольник с большим числом вершин [18, 48]. Теоретическое обоснование подобных методов было предложено В.И. Власовым [57] в его *теории деформирования*.

Замечательно, что в двух из трех основных принципов предлагается использовать вспомогательную область. В связи с этим большое значение получают методы приближенного решения задачи Римана для многоугольников: ведь для них известен полуаналитический вид этого решения, дающийся следующей теоремой.

**Теорема 0.3** (Кристоффель, Шварц). Пусть  $P$  - внутренность простого (без самопересечений) многоугольника  $\Gamma$  с вершинами  $w_1, \dots, w_n$ , пронумерованными против часовой стрелки, и углами при вершинах  $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ . Пусть  $w$  - конформное отображение верхней полуплоскости  $\mathbb{H} = \{z : \Im z > 0\}$  на  $\Gamma$ . Тогда

$$w(z) = A + C \int_0^z \prod_{i=1}^n (\xi - z_i)^{\alpha_i - 1} d\xi, \quad (10)$$

где  $w(z_i) = w_i$ . Действительные константы  $z_i$  и комплексные  $A$  и  $C$  зависят от нормировки отображения. [63]

Если задача Римана для произвольной области редуцировалась до одномерной задачи поиска функции соответствия границ, то для многоугольника она вырождается в *проблему параметров* — поиск прообразов его вершин. Помимо способа решения этой проблемы, численный метод должен включать в себя технологию вычисления интеграла (10).

Расположив прообразы трех вершин многоугольника  $z_1, z_{n-1}, z_n$  в  $0, 1$  и  $\infty$ , имеем для оставшихся  $n - 3$ -х прообразов  $n - 3$  связи вида

$$|w(z_{k+1}) - w(z_k)| = L_k, \quad k = \overline{1, n-3}, \quad (11)$$

где  $L_k$  — длина  $k$ -ой стороны многоугольника. Замкнутая (не содержащая неизвестного предынтегрального множителя) система уравнений

$$\frac{|w(z_{k+1}) - w(z_k)|}{|w(z_n) - w(z_{n-1})|} = \frac{L_k}{L_{n-1}}, \quad k = \overline{1, n-3}. \quad (12)$$

Подобные системы описаны в [26, 62] и являются стартовой точкой для практически всех специальных методов решения задачи Римана для многоугольников. Отличия этих методов состоят в методах вычисления определенных интегралов в (11) и способах генерации начального приближения.

В серии работ [3, 13, 45] Дрисколлом и Трефтенем был развит метод, реализованный затем в пакете SCPACK. Для вычисления интеграла (10) применяются квадратурные формулы Гаусса-Якоби и Клэншоу-Кёртиса, якобиан системы (12) вычисляется методом Пауэлла. Никакого механизма по устранению связанных со сгущением проблем изначально не было предусмотрено.

Исправить этот недостаток был призван метод CRDT (Cross Ratios and Delaunay Triangulation), разработанный Дрисколлом и Вавасисом [14]. Их идея состоит в том, чтобы ввести некоторое количество фиктивных вершин и после этого построить триангуляцию Делоне многоугольника с вершинами в этих точках. Разбиение сторон проводится с тем расчетом, чтобы двойное отношение вершин любого четырехугольника, составленного из двух соседних треугольников триангуляции, было ограничено известным образом, тем самым позволяя локально избежать сгущения. Затем так же, как и в методе Трефтена, строится система, связывающая эти двойные отношения. Серьезным недостатком метода является его формальная неприменимость к неограниченным областям. Метод также неприменим к многоугольникам с разрезами.

Авторами [73, 74] был предложен полуаналитический метод, основанный на вычислениях функций Лауричеллы - обобщением гипергеометрических функций. При наличии сгущения можно выбрать прообразы двух вершин так, что их разность будет малым параметром задачи; в упомянутых работах построены асимптотические разложения интеграла (0.3) по этому малому па-

раметру и приведен способ обращения отображения, основанный на теории деформирования [57].

Еще один полуаналитический подход к решению задачи Римана для многоугольников, углы которых рационально кратны  $\pi$ , был выдвинут А.Б. Богатырёвым: интеграл Кристоффеля-Шварца для таких многоугольников является абелевым на компактной римановой поверхности [6]. Метод, основанный на этом наблюдении, заключается в перепараметризации задачи: вместо прообразов вершин используются модули римановой поверхности, ассоциированной с многоугольником. Зависящие от этих параметров полуаналитические выражения, в терминах которых дается конформное отображение, могут быть эффективно вычислены. В работах [7, 54] рассмотрена подробная схема метода для случая многоугольников с 4 прямыми и входящими углами. Обобщение метода на многоугольники с числом прямых и входящих углов, не превышающим 8, является нетривиальным, и приведено в [6, 50] (6 углов) и публикациях автора [25, 71] (8 углов).

Одним из преимуществ такой перепараметризации является возможность использовать *модулярные преобразования* – своего рода нормировку вспомогательных параметров, которая позволяет обойти вычислительные трудности, связанные со скучиванием. Можно проиллюстрировать это простым примером.

Будем искать отображение верхней полуплоскости  $\mathbb{H} = \{x : \Im x > 0\}$  на прямоугольник, отношение длин сторон которого равно  $\tau$ , в виде интеграла

$$w(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}}, \quad (13)$$

где  $k \in (0; 1)$  – единственный неизвестный параметр. Исследуем зависимость  $k$  от  $\tau$ .

Прямоугольник, являющийся образом  $\mathbb{H}$  при отображении (13), вложен в  $\mathbb{C}$  как область  $R = \{w : 0 < \Re w < K, 0 < \Im w < K'\}, \frac{K'}{K} = \tau$ . Из теории

эллиптических функций известно, что функция, обратная к  $w(x)$ , может быть выражена с помощью  $\theta$ -функций Римана следующим образом [65]

$$x(w) = \left( \operatorname{sn} \frac{w}{2} \right)^2 = \left( \frac{\theta_{00}\theta_{11}\left(\frac{w}{2K}|\tau\right)}{\theta_{10}\theta_{01}\left(\frac{w}{2K}|\tau\right)} \right)^2, \quad (14)$$

Здесь  $\operatorname{sn} z$  - эллиптический синус Якоби,  $\theta_{kl}$  -  $\theta$ -функции Римана:

$$\begin{aligned} \theta_{00}(z|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n^2} e^{2\pi i n z}, \\ \theta_{kl}(z|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau\left(n+\frac{k}{2}\right)^2} e^{2\pi i\left(n+\frac{k}{2}\right)\left(z+\frac{l}{2}\right)}, \\ \theta_{kl} &= \theta_{kl}(0|\tau). \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями, можно переписать отображение (14) в виде

$$x(w) = -\exp(2\pi i z) \left( \frac{\theta_{00}(0|\tau)\theta_{00}\left(z+\frac{1+i\tau}{2}|\tau\right)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}|\tau\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}|\tau\right)} \right)^2. \quad (15)$$

В частности, выражение для образа четвертой вершины прямоугольника

$$\frac{1}{k} = e^{\pi\tau} \left( \frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}\right)} \right)^4. \quad (16)$$

Поскольку при  $\tau \gg 1$  отношение  $\frac{\theta_{00}(0)}{\theta_{00}\left(\frac{i\tau}{2}\right)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n^2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau n(n+1)}} \sim \frac{1}{2}$ , то верна асимптотика  $k \sim 16e^{-\pi\tau}$ . Следовательно,  $k$  неотлично от нуля в машинной арифметике при вычислениях с двойной точностью уже при  $\tau > 12$ . Взаимное расположение вершин прямоугольника можно описать с помощью их ангармонического отношения. Как видно из рассмотренного примера, при конформном отображении оно может уменьшаться на десятки порядков.

В то время, как вычисление отображения  $\mathbb{H}$  на  $R$  сталкивается с проблемой потери точности, обратное отображение, записанное в терминах  $\theta$ -функций (15), может быть эффективно вычислено с помощью техники модулярных преобразований, позволяющей выделить и сократить «главную часть» числителя и знаменателя в тех точках, где скучивание особенно сильно проявляется. Для римановых  $\theta$ -функций существуют алгоритмы, позволяющие вычислять их

с гарантированной машинной точностью (см., например, [9]). Суть метода, предлагаемого в данной работе, состоит в обобщении этого наблюдения на случай прямоугольного многоугольника с большим числом углов.

## **Цели диссертационной работы.**

1. Сформулировать принципиальную схему численно-аналитического метода конформного отображения верхней полуплоскости на прямоугольные многоугольники с количеством прямых и входящих углов, не превышающим 8, и обратно как обобщение схемы, предложенной в [7].
2. Исследовать точность метода в условиях скучивания при вычислениях для «вырожденных» многоугольников.
3. Программно реализовать данный метод и использовать его для тестирования пакетов, используемых для вычисления интеграла Кристоффеля-Шварца. Разработать систему тестов для методов численного решения краевых задач для эллиптических уравнений (в частном случае задачи Дирихле в прямоугольном многоугольнике с кусочно-постоянными граничными условиями).
4. Применить новый метод для автоматического построения конформных сеток в задаче исследования устойчивости пуазейлевского течения в канале с гребёнчатым оребрением.

## **Основные положения, выносимые на защиту**

Предложенный ранее полуаналитический метод вычисления конформных отображений прямоугольных (т.е. имеющих углы, кратные прямому) многоугольников расширен на многоугольники со сложной геометрией.

1. Для многоугольников, имеющих до 8 прямых углов и до 5 выходов на бесконечность, построена система уравнений на вспомогательные параметры и программно реализован алгоритм их численного решения.

2. Для приближенного решения системы из п. 1 применены модулярные преобразования и алгоритм Зигеля. Численные эксперименты показали, что использование этой методологии позволяет находить параметры отображения и вычислять само отображение с хорошей точностью даже в условиях сильного скучивания точек.
3. Предложен класс тестовых задач для проверки точности вычислительных пакетов SCPACK (вычисление конформного отображения на многоугольные области) и Ani2D (решение граничных задач для эллиптических уравнений в двумерных областях). Этот класс включает в себя многоугольники, моделирующие различные особенности плоских областей (разрезы, входящие углы, узкие перешейки, выходы на бесконечность и т.д.)
4. Для исследования задачи устойчивости течения в канале с гребенчатым оребрением предложены автоматически генерируемые конформные сетки. Сравнение результатов, полученных для гребенчатого и для волнистого оребрения, показывает адекватность использования конформной сетки в данной задаче.

## **Научная новизна.**

Исследуемый метод вычисления конформного отображения является одной из немногих существующих на сегодня подходов с апостериорной оценкой точности. Предложен оригинальный способ решения вычислительных проблем, вызываемых явлением скучивания, с помощью техники модулярных преобразований — большинство существующих методов требуют при вычислениях для сильно вырожденных многоугольников повышать размер мантисы. Выгодным отличием описываемого метода является то, что конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольник и обратно дается в терминах спецфункций, эффективный способ вычисления которых описан в литературе.

С помощью включения нового метода в технологию исследования устойчивости [52, 53, 64] впервые были построены кривые нейтральной устойчивости для каналов с гребёнчатым оребрением. Подход к построению сетки, использующий отображение Гордона-Холла [24], применяемый ранее для волнистых оребрений, был в данном случае неприменим, а существующие пакеты для построения конформных сеток (в частности, SCPACK) в ряде случаев давали неудовлетворительные результаты. Причины этих сбоев также были прояснены при сравнении с предложенным методом.

## **Научная и практическая значимость**

Ввиду связи между задачей Римана и задачами теории потенциала построенный метод может быть использован для численного решения плоских задач, возникающих в гидродинамике идеальной жидкости, электро- и магнитостатике, аэродинамике дозвуковых скоростей, теории фильтрации и т.д.

Поскольку для построенного метода существуют теоретические и экспериментальные оценки точности решения, он может быть использован для тестирования комплексов программ для приближенного построения конформных отображений и решения задач математической физики в многоугольных областях.

Результаты приближенного решения задачи Римана, полученные с помощью численно-аналитического метода, могут быть использованы как «затраченное» приближение для других методов при поиске конформного отображения на области с произвольной кусочно-аналитической границей.

## **Апробация работы и публикации автора.**

Основные результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на семинарах Института вычислительной математики РАН им. Марчука, Института прикладной математики РАН им. Келдыша, Вычислительного центра РАН им. Дородницына и на следующих конференциях: 55-я научная конференция МФТИ (ИВМ РАН, 2012); 56-я научная конференция



МФТИ (ИВМ РАН, 2013); конференция «Тихоновские чтения» (МГУ, 2013); международная конференция «Modern Problems of Applied Mathematics and Computer Science» (Дубна, ОИЯИ, 2014), «Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech-2014)» (МГТУ им. Баумана).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных работах: 2 статьи — в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК [70, 71], 4 — в трудах конференций [66–69].

## **Объем и структура работы.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 86 страниц с 19 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 77 наименований.

Глава 1 посвящена построению полуаналитических формул для конформного отображения прямоугольного многоугольника на верхнюю полуплоскость. Вводится понятие гиперэллиптической кривой, ассоциированной с многоугольником, матрицы периодов и якобиана этой кривой. Сформулирована «проблема параметров», построена система уравнений, связывающих эти параметры. Описана схема вычисления конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник и обратно.

Глава 2 содержит описание метода численного решения основной системы и нахождения начального приближения для нее, а также вычисления конформного отображения. Рассмотрено влияние сгущивания на поведение параметров. Изложена методология модулярных преобразований.

В главе 3 рассказывается о приложениях численно-аналитического метода. Приводятся результаты экспериментов по вычислению конформных модулей финитных многоугольников, позволяющих независимо оценить точность тестируемого метода, протестирован пакет SCPACK. Рассмотрены приложения метода к решению задач теории потенциала в двумерных областях, проведено сравнение результатов с работой пакета Ani2D. Также рассмотрены при-

ложения к задаче устойчивости течения в оребренном канале; сравнение результатов расчета нормальных кривых в канале с гребёнчатым и волнистым оребрениями говорят о принципиальной применимости метода.

В заключении обобщаются основные наблюдения и дается краткий обзор перспектив метода, путей его улучшения и возможных будущих приложений в прикладных задачах.

## **Благодарности.**

Я хотел бы выразить благодарность профессору Андрею Борисовичу Богатыреву за научное руководство и всестороннюю поддержку, оказанную при работе над диссертацией.

Я благодарен моим коллегам, аспирантам ИВМ РАН Никите Викторовичу Ключневу и Сергею Юрьевичу Лямаеву за плодотворное сотрудничество.

Я глубоко ценю помощь, оказанную мне сотрудниками ИВМ РАН Сергеем Анатольевичем Горейновым и Николаем Леонидовичем Замарашкиным. Вдохновляющее воздействие, которое оказывали дискуссии с их участием, трудно переоценить.

Я также признателен профессору Юрию Михайловичу Нечепуренко и аспиранту МФТИ Кириллу Вячеславовичу Демьянко за данные ими разъяснения технологии исследования устойчивости течений — одного из приложений метода, рассмотренных в моей работе.

# Глава 1

## Обоснование метода

Назовем прямоугольным простой (т.е. не имеющий самопересечений) многоугольник, все углы которого кратны  $\frac{\pi}{2}$ . Такие многоугольники могут содержать входящие углы, разрезы и выходы на бесконечность (см. рис. 1.1). В дальнейшем будет также предполагаться, что углы при бесконечно удаленных вершинах таких многоугольников равны 0 (стороны, содержащие эту вершину, представляют собой параллельные лучи), т.е. многоугольники с выходами на бесконечность как у примера 4 на рис. 1.1 рассмотрены не будут.

Выходы на бесконечность будем также называть *каналами*, а расстояние между сторонами, образующими бесконечно удаленную вершину – *шириной канала*. Число  $\epsilon = e^{i\phi}$ , где  $\phi$  – угол, образуемый сторонами канала и положительной вещественной полуосью, будем называть *направлением канала* (в частности,  $\epsilon = 1$  для канала, направленного вправо,  $\epsilon = i$  для направленного вверх и т.д.)

Введем следующие обозначения для количества различных элементов в прямоугольном многоугольнике:

- $k$  – количество прямых углов;
- $m$  – количество входящих (т.е. равных  $\frac{3\pi}{2}$ ) углов;
- $l$  – количество выходов на бесконечность;

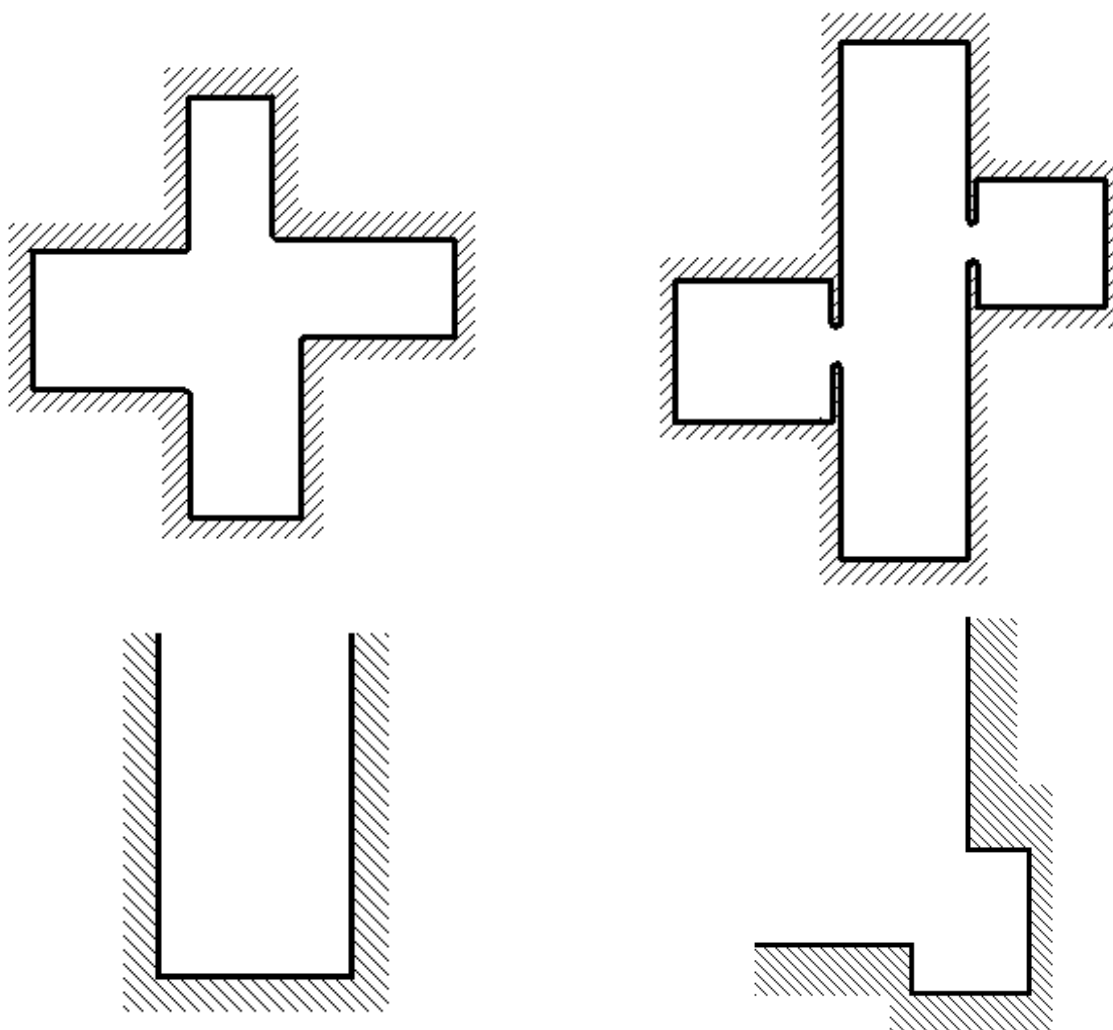


Рисунок 1.1: Прямоугольные многоугольники

- $r$  – количество разрезов (им соответствуют вершины, углы при которых равны  $2\pi$ ).

Эти числа удовлетворяют следующим соотношениям:

- $k + m = 2g + 2$ ;
- $m + r - l = g - 1$ ,

где  $g$  – целое неотрицательное число, смысл которого будет прояснен ниже.

Действительно, поскольку сумма углов в односвязном многоугольнике всегда является целым кратным  $\pi$ , то количество полуполных слагаемых в этой сумме должно быть чётным. Следовательно, число  $k + m$  всегда чётно. Поскольку  $k + m \geq 2$ , это число можно представить в виде  $2g + 2$ ,  $g \geq 0$ .

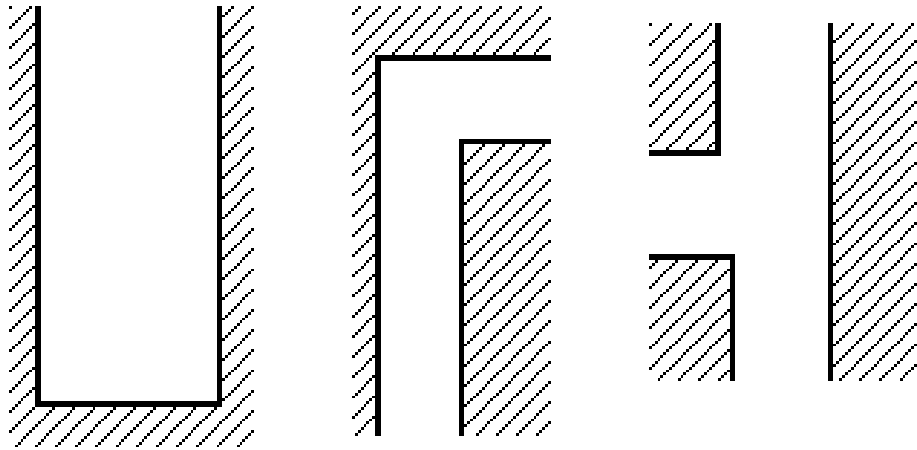


Рисунок 1.2: Неограниченные многоугольники с 2 прямыми углами

Далее, в предположении об отсутствии разрезов сумма углов при вершинах прямоугольного многоугольника равна  $\pi(k + m + l - 2)$ , следовательно

$$\frac{3\pi k}{2} + \frac{\pi(2g + 2 - k)}{2} = \pi(2g + 2 + l - 2), \quad (1.1)$$

т.е.,  $k = g - 1 + l$ , в частности,  $l \in \overline{0, g + 3}$ . На примере  $g = 0$  (рис. 1.2) можно видеть, что все возможные значения  $l$  реализуются. Для больших  $g$  многоугольники на рисунке можно использовать в качестве «строительных блоков».

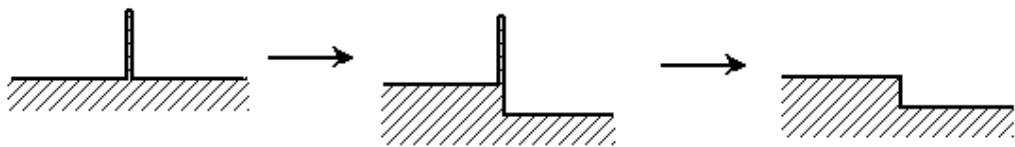


Рисунок 1.3: Деформация, переводящая разрез во входящий угол

Уберем теперь требование об отсутствии разрезов. На рисунке 1.3 изображено поведение сторон многоугольника, прилегающих к разрезу. При показанной деформации границы разрез исчезает, один из прямых углов заменяется входящим.

Из этого наблюдения следует, что число входящих углов  $m = g - 1 + l - r$ , как и утверждалось выше.

Отображение Кристоффеля-Шварца на прямоугольный многоугольник, которое согласно (10) имеет вид

$$w(x) = \alpha \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{A}_r(\xi)}{\mathcal{D}_l(\xi)} \sqrt{\frac{\mathcal{B}_m(\xi)}{\mathcal{C}_j(\xi)}} d\xi \quad (1.2)$$

можно переписать в виде

$$w(x) = \alpha \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{P}_{g+l-1}(\xi)}{\mathcal{D}_l \sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)}} d\xi, \quad (1.3)$$

где рукописным шрифтом обозначены многочлены степени, равной индексу, с таким же количеством различных вещественных корней и старшим коэффициентом, равным 1.

Построение обратного отображения к (1.3) - классический результат, восходящий к Якоби и Риману, но записать его явной формулой удастся только в частном случае  $g \leq 1$  (см. (14)).

Обозначим через  $e_j, j = 1, \dots, 2g + 2$  корни  $\mathcal{Q}_{2g+2}$ , упорядочив их по возрастанию. Подынтегральное выражение в (1.3) может быть аналитически продолжено на риманову поверхность  $\mathcal{M}$  функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$ .  $\mathcal{M}$  можно получить склеиванием двух копий области  $\bar{\mathbb{C}} \setminus ((-\infty, e_1] \cup [e_2, e_3] \cup \dots \cup [e_{2g}, e_{2g+1}] \cup [e_{2g+2}, \infty))$  по противоположным берегам выброшенных отрезков.

Интегралы вида (1.3) на поверхности  $\mathcal{M}$  называют *абелевыми*. Вычисление таких интегралов имеет исключительную важность для предлагаемого в диссертации метода, поэтому необходимо рассмотреть их отдельно.

## 1.1 Основные сведения об абелевых интегралах

Риманову поверхность  $\mathcal{M}$  функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$  удобно представлять как множество точек  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ , удовлетворяющих уравнению

$$y^2 = \mathcal{Q}_{2g+2}(x). \quad (1.4)$$

Отображение  $\mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}P^1 : (x, y) \mapsto x$  задает двулистное разветвленное накрытие римановой сферы поверхностью  $\mathcal{M}$ , корни многочлена  $\mathcal{Q}_{2g+2}(x)$  являются его точками ветвления. При этом существует два способа однозначного поднятия верхней полуплоскости  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}P^1$  в  $\mathcal{M}$ . Назовем их  $\mu$  и  $\mu'$ . Для точки  $x$ , отличной от точки ветвления,  $\mu(x) \neq \mu'(x)$ .

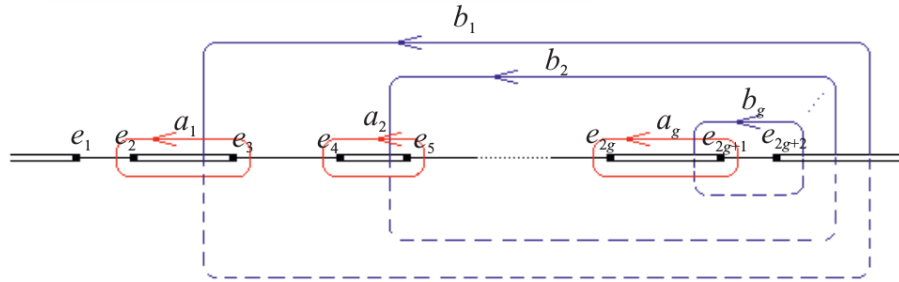


Рисунок 1.4: Циклы на римановой поверхности функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$ . Сплошной линией показаны части циклов, полностью лежащие на одном листе поверхности, пунктирной - выходящие на другой лист.

Результат интегрирования дифференциальных форм (таких, как (1.3)) на поверхности  $\mathcal{M}$  будет зависеть от пути. Интегралы по циклам вокруг отрезков  $[e_{2k-1}, e_{2k}]$ , обозначенным на рис. 1.4 как  $a_k$ , будем называть  $a$ -периодами интеграла, а по  $b$ -циклам -  $b$ -периодами.

**Определение 1.1.** Дифференциал  $\omega$  на поверхности  $\mathcal{M}$  называется абелевым I рода, если  $\forall P_0 \in \mathcal{M}$  он представляется как  $g(\zeta)d\zeta$ , где  $\zeta$  — локальная координата в точке  $P_0$ , а  $g(\zeta)$  — голоморфная функция.

Такие дифференциалы (также называемые голоморфными) описываются следующей теоремой [55, 76].

**Теорема 1.1.** Дифференциалы  $\frac{dx}{y}, \dots, \frac{x^{g-1}dx}{y}$  составляют базис в пространстве голоморфных дифференциалов на поверхности  $\mathcal{M}$  вида (1.4).

В частности, дифференциал в (1.3) (который мы в дальнейшем будем называть дифференциалом Кристоффеля-Шварца) при  $l = 0$  (т.е. для ограниченного многоугольника) является абелевым I рода.

В пространстве дифференциалов I рода удобно выбрать так называемый  $a$ -нормированный базис  $\omega_1, \dots, \omega_g$ , т.е. такой, что

$$\oint_{a_j} \omega_j = \delta_{kj}. \quad (1.5)$$

Такой базис существует, поскольку верна

**Теорема 1.2** (билинейные соотношения Римана [17]). Пусть на римановой поверхности (1.4) задан голоморфный дифференциал  $\omega$ ,  $a$ - и  $b$ -циклы расположены так, как показано на рис. 1.4,  $\oint_{a_j} \omega = A_j$ ,  $\oint_{b_j} \omega = B_j$ . Тогда

$$\Im \sum_{j=1}^g A_j \bar{B}_j \leq 0, \quad (1.6)$$

причем равенство достигается лишь если  $\omega = 0$ .

Из билинейных соотношений следует, что если все  $a$ -периоды дифференциала  $\omega$  нулевые, то  $\omega = 0$ . В частности, если  $\omega^i$  линейно независимы, то и векторы, составленные из их  $a$ -периодов, линейно независимы. Следовательно, верно

**Следствие 1.** Дифференциал Кристоффеля-Шварца для ограниченного прямоугольного многоугольника можно однозначно представить в виде линейной комбинации  $a$ -нормированных дифференциалов  $\omega_j$ .

**Определение 1.2.** Дифференциал  $\eta_{PQ}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  называется абелевым III рода, если он имеет простые полюса в точках  $P$  и  $Q \in \mathcal{M}$  с вычетами в них, равными 1 и -1. Другими словами,  $\eta_{PQ} = \frac{d\zeta}{\zeta} + g_P(\zeta)d\zeta$  для локальной координаты  $\zeta$  в окрестности  $P$ ,  $\eta_{PQ} = -\frac{d\zeta}{\zeta} + g_Q(\zeta)d\zeta$  для локальной координаты  $\zeta$  в окрестности  $Q$  (здесь  $g_P, g_Q$  - голоморфные функции).

**Определение 1.3.** Абелев дифференциал III рода  $\eta_{PQ}$  называется  $a$ -нормированным, если он имеет нулевые  $a$ -периоды.



**Теорема 1.3.** Дифференциал Кристоффеля-Шварца для неограниченного прямоугольного многоугольника в (1.3) представляется следующей суммой абелевых  $\alpha$ -нормированных дифференциалов III рода и дифференциала I рода  $\omega$

$$dw(x) = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k h_k \eta_{P_k P'_k} + \omega, \quad (1.7)$$

где  $h_k$  — ширина  $i$ -го канала,  $\varepsilon_k$  — направление  $i$ -го канала, а  $P$  и  $P'$  — поднятие прообраза  $i$ -ой бесконечно удаленной вершины в  $\mathcal{M}$ .

**Доказательство.** Если в интеграле (1.3)  $x_0$  — точка ветвления, то его поднятие на  $\mathcal{M}$  имеет вид

$$\alpha \int_{(x_0,0)}^{(x,y)} \frac{\mathcal{P}_{g-1+l}(\xi) d\xi}{\mathcal{D}_l(\xi) y}, \quad (1.8)$$

Дифференциал в (1.8) можно представить в виде следующей суммы (здесь  $\eta_{P_* P'_*}$  — нормированные абелевы дифференциалы третьего рода,  $\omega$  — некоторый голоморфный дифференциал) [60]:

$$dw(x) = \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}_{P_k} dw(x) \eta_{P_k P'_k} + \omega \quad (1.9)$$

Найдем вычет  $dw(x)$  в точке  $P_k$ , предполагая, что соответствующий ей канал направлен вправо. Для этого возьмем локальную карту, в которой лежит эта точка, и рассмотрим контур  $C_\rho$  в виде окружности радиуса  $\rho$  с центром в  $P_k$  в этой карте. Обозначим через  $C_\rho^+$  лежащую в верхней, а через  $C_\rho^-$  — в нижней полуплоскости половину контура.

Поскольку  $\int_{C_\rho^+} dw = \overline{\int_{C_\rho^-} dw}$  (т.к. дифференциал имеет вещественные коэффициенты), то  $\int_{C_\rho} dw = 2i \Im \int_{C_\rho^+} dw$ , где  $C_\rho$  — контур, составленный из  $C_\rho^+$  и  $-C_\rho^-$ .

Далее, значение  $\int_{C_\rho} dw$  не зависит от  $\rho$ , значит, и  $\Im \int_{C_\rho^+} dw$  также не зависит от  $\rho$ .

Тогда оно может быть вычислено как  $\Im(\lim_{x \rightarrow x_k-0} w(x) - \lim_{x \rightarrow x_k+0} w(x)) =$

$\Im(\pi i h_k)$ . Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{P_k} dw(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} dw = h_k.$$

Аналогично вычисляются вычеты в других точках. Окончательно имеем выражение (1.7) для дифференциала в (1.8). ■

## 1.2 Вычисление конформного отображения

После того, как мы получили представление интеграла Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников в виде суммы абелевых интегралов, необходим эффективный способ их вычисления, не использующий квадратурных формул.

**Определение 1.4.** [17, 60] Пусть  $\omega_j$  - базис  $a$ -нормированных дифференциалов на поверхности (1.4). Тогда  $\Pi_{kj} = \oint_{b_j} \omega_k$  называется матрицей периодов поверхности.

Из построения  $a$ -нормированных дифференциалов видно, что  $\Pi_{kj}$  будет чисто мнимой. Обозначим  $\Omega_{kj} = \Im \Pi_{kj}$ .

Из билинейных соотношений Римана следует, что  $\Omega_{kj}$  симметрична и положительно определена. [60]

**Определение 1.5.** Пусть  $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \Pi \mathbb{Z}^g$  - решетка в  $\mathbb{C}^g$ . Тогда комплексный тор  $\mathbb{C}^g / \Lambda$  называется якобианом кривой  $\operatorname{Jac}(\mathcal{M})$ , а отображение

$$\mathbf{u} : \mathcal{M} \mapsto \operatorname{Jac}(\mathcal{M}), \quad \mathbf{u}(x) = \int_{x_0}^x \omega \pmod{\Lambda} \quad (1.10)$$

(не зависящее от пути интегрирования) отображением Абеля-Якоби с начальной точкой  $x_0$ . Здесь  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)^T$  -  $a$ -нормированный базис дифференциалов.

Тогда следствие 1 из раздела 1.1 можно переформулировать так: конформное отображение верхней полуплоскости на ограниченный прямоугольный многоугольник представляется в виде композиции поднятия  $\mathbb{H} \mapsto \mathcal{M}$ , отображения Абеля-Якоби и линейной функции.

Для того, чтобы предложить способ вычисления отображения Абеля-Якоби без квадратур [50, 54], нужно ввести еще несколько определений.

**Определение 1.6.** [60] Пусть  $\Omega$  - симметричная, положительно определенная матрица размера  $g \times g$ . Римановой  $\theta$ -функцией с характеристикой  $\begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix}$ ,  $2\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^g$ ,  $2\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^g$  называется

$$\theta \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z}|i\Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp(-\pi(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T \Omega (\mathbf{n} + \mathbf{a})) \exp(2\pi i(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T (\mathbf{z} + \mathbf{b})). \quad (1.11)$$

**Определение 1.7.** Характеристика  $\xi = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix}$ ,  $2\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^g$ ,  $2\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^g$  называется чётной (нечётной), если число  $4(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  является чётным (нечётным).

$\theta$ -функции Римана обладают следующими свойствами квазипериодичности:

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z} + \mathbf{m}|i\Omega) &= e^{2\pi i \mathbf{a}^T \mathbf{m}} \theta \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z}|i\Omega), \\ \theta \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z} + i\Omega \mathbf{m}|i\Omega) &= e^{-2\pi i \mathbf{b}^T \mathbf{m}} e^{\pi \mathbf{m}^T \Omega \mathbf{m} - 2\pi i \mathbf{m}^T \mathbf{z}} \theta \begin{bmatrix} 2\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z}|i\Omega). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сами  $\theta$ -функции не являются однозначными на  $\text{Jac}(\mathcal{M})$ . Но из (1.12) следует, что можно построить произвольную мероморфную на  $\mathcal{M}$  функцию как композицию отображения Абеля-Якоби и некоторой комбинации отношений  $\theta$ -функций [1, 39, 60]. В частности, можно построить такую функцию  $x(\mathbf{u})$ , называемую гиперэллиптической проекцией, что ее композиция с отображением Абеля-Якоби будет совпадать с накрытием  $\mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}P^1 : (x, y) \mapsto x$ . Частным случаем этого утверждения является представление  $\text{sn}(z)$  через эллиптические  $\theta$ -функции (14).

Схема вычисления конформного отображения из  $\mathbb{H}$  на ограниченный многоугольник  $P$  и обратно может быть пояснена следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}P^1 & \xleftarrow{x(\mathbf{u})} & \mathbf{u}(\mu(\mathbb{H})^2(\mathbb{C}, \mathbf{u})) \xrightarrow{\quad} P \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{H} & & Jac(\mathcal{M})
 \end{array} \tag{1.13}$$

где  $\mathbb{C}$  - вектор констант (см. следствие 1), определяемый из геометрии многоугольника, а  $x(\mathbf{u})$  - гиперэллиптическая проекция.

Для того, чтобы «обратить» одну из горизонтальных стрелок на диаграмме (1.13), необходимо явно описать locus верхней полуплоскости  $\mathbf{u}(\mu(\mathbb{H}))$  в  $Jac(\mathcal{M})$ . Условие принадлежности точки множеству  $\mathbf{u}(\mu(\mathbb{H}))$  описано в [37, 50, 60]; в общем случае довольно громоздко, но будет сформулировано в двух частных случаях ниже.

На основе вышесказанного сформулируем

**Алгоритм вычисления конформного отображения из  $\mathbb{H}$  в  $P$ :**

1. Вычислить матрицу периодов поверхности, ассоциированной с многоугольником, и вектор констант  $\mathbb{C}$ .
2. Для вычисления образа точки  $x_0 \in \mathbb{H}$  решить систему уравнений на  $\mathbf{u}$ , состоящую из условий принадлежности точки  $\mathbf{u}$  locus верхней полуплоскости и условия  $x(\mathbf{u}) = x_0$ .
3. Результат отображения  $2(\mathbb{C}, \mathbf{u})$  и будет искомым образом  $x_0$ .

Замечательно, что из этого алгоритма *mutatis mutandis* получается и алгоритм вычисления обратного отображения. Кроме того, он позволяет с гарантированной точностью вычислять производные конформных отображений из  $\mathbb{H}$  в  $P$  и обратно.

Задача поиска параметров интеграла Кристоффеля-Шварца для  $P$ , таким образом, заменяется задачей поиска матрицы периодов поверхности, ассоциированной с многоугольником.

Несколько сложнее обстоит дело с неограниченными многоугольниками. Для того, чтобы выразить отображение из locus верхней полуплоскости в

якобиане на многоугольник, необходимо предъявить способ вычисления абелевых интегралов III рода в терминах переменных  $u_k$ .

**Теорема 1.4** (Риман). [17, 60] Пусть  $\eta_{PQ}$  -  $a$ -нормированный дифференциал третьего рода. Тогда для любой точки  $R \in \mathcal{M}$  справедливо

$$\int_*^R \eta_{PQ} = \log \frac{\theta[\xi](\mathbf{u}(R) - \mathbf{u}(P))}{\theta[\xi](\mathbf{u}(R) - \mathbf{u}(Q))} + \text{const}, \quad (1.14)$$

где  $\xi$  - некоторая нечетная характеристика.

Поскольку главная часть дифференциала Кристоффеля-Шварца является суммой абелевых дифференциалов третьего рода, можно представить интеграл от (1.3) в виде

$$w(P) = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k h_k \ln \frac{\theta[\xi](\mathbf{u}(P) - \mathbf{u}(P_k))}{\theta[\xi](\mathbf{u}(P) + \mathbf{u}(P_k))} + 2(\mathbf{C}, \mathbf{u}(P)) \quad (1.15)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$  - отображение (1.10).

Как видно из (1.15), для неограниченных многоугольников п. 1 приведенного выше алгоритма численного решения задачи Римана необходимо модифицировать: помимо матрицы периодов и вектора констант требуется вычислить образы полюсов дифференциала Кристоффеля-Шварца при отображении Абеля-Якоби (1.5).

Последнюю задачу облегчает расположение полюсов дифференциала (1.7). Введем некоторые вспомогательные определения.

**Определение 1.8.** [49] Гиперэллиптической инволюцией поверхности (1.4) называется отображение  $\iota : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} : \iota(x, y) = (x, -y)$ .

Определим отображение  $\bar{\iota} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} : \bar{\iota}(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ .

**Определение 1.9.** [49] Антиконформной инволюцией называется отображение  $J : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} : J^2 = id_{\mathcal{M}}$ , а его композиция с отображением  $\bar{\iota}$  является конформным автоморфизмом поверхности  $\mathcal{M}$ .

Очевидно, что отображения  $\bar{\iota}$  и  $\iota\bar{\iota} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} : \iota\bar{\iota}(x, y) = (\bar{x}, -\bar{y})$  являются антиконформными инволюциями.

Неподвижными точками гиперэллиптической инволюции являются точки  $(x, 0)$ , т.е. точки ветвления.

**Определение 1.10.** [49] *Компоненты связности множества неподвижных точек инволюции  $\bar{\iota}$  называют вещественными, а инволюции  $\iota\bar{\iota}$  — ковещественными овалами.*

Из определения следует, что если  $(x, y)$  лежит на вещественном овале, то  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ , т.е.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Аналогично для ковещественных  $(x, iy) \in \mathbb{R}^2$ .

Легко видеть, что поверхность (1.4) имеет  $g + 1$  вещественных и  $g + 1$  ковещественных овала, причем каждый овал содержит ровно две точки ветвления  $e_k$  и  $e_j$ , где  $j = k + 1 \pmod{2g + 2}$ . Будем обозначать их  $O_k$ , тем самым овалы с нечётным номером будут ковещественными, а чётным — вещественными.

**Утверждение 1.1.** *Пары полюсов дифференциала (1.7)  $P_k$  и  $P'_k$  лежат на овалах поверхности (1.4) и связаны гиперэллиптической инволюцией. Если в качестве начальной точки отображения Абеля-Якоби взять какую-нибудь точку ветвления, то для их образов будет верно  $\mathbf{u}(P_k) = -\mathbf{u}(P'_k) \pmod{\Lambda}$ .*

**Доказательство.** Поскольку при накрытии сферы, определенном в параграфе 1.1, полюса переходят в одну точку  $x_k \in \mathbb{R}$ , то их координаты должны быть равны  $(x_k, y_k)$  и  $(x_k, -y_k)$ , соответственно, т.е. полюса лежат на одном из овалов и связаны конформной инволюцией.

Более того, поскольку точка ветвления под действием  $\iota$  неподвижна, мы можем провести пути  $\gamma$  и  $\gamma'$  в  $P_k$  и  $P'_k$  так, что  $\iota(\gamma) = \gamma'$ . Тогда, поскольку  $\iota(\omega) = -\omega$ , получаем  $\mathbf{u}(P_k) = -\mathbf{u}(P'_k)$ . ■

**Утверждение 1.2.** При отображении Абеля-Якоби поверхности, изображенной на рис. 1.4, с начальной точкой в  $P_{2g+2}$ , образы точек ветвления равны

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(P_{2g+2}) &= 0, \\
\mathbf{u}(P_{2g+1}) &= \frac{i\Omega_g}{2}, \\
\mathbf{u}(P_{2g}) &= \frac{E_g}{2} + \frac{i\Omega_g}{2}; \\
\mathbf{u}(P_{2g-1}) &= \frac{E_g}{2} + \frac{i\Omega_{g-1}}{2}; \\
\mathbf{u}(P_{2g-2}) &= \frac{E_{g-1}+E_g}{2} + \frac{i\Omega_{g-1}}{2}; \\
&\vdots \\
\mathbf{u}(P_2) &= \frac{E_1+\dots+E_g}{2} + \frac{i\Omega_1}{2}; \\
\mathbf{u}(P_1) &= \frac{E_1+\dots+E_g}{2},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где  $\Omega_k$  –  $k$ -ый столбец мнимой части матрицы периодов,  $E_k$  –  $k$ -ый столбец единичной матрицы

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл  $\oint_{O_{2g+1}} \omega$ . В соответствии с определением  $\omega$  он равен  $i\Omega_g$ . С другой стороны, поскольку под действием гиперэллиптической инволюции дифференциалы в  $\omega$  меняют знак, а одна половина овала переводится в другую,  $\oint_{O_{2g+1}} \omega = 2 \int_{P_{2g+2}}^{P_{2g+1}} \omega$ , откуда  $\mathbf{u}(P_{2g+1}) = \frac{i\Omega_g}{2}$ .

Рассматривая интегралы вдоль остальных овалов, получаем требуемое. ■

Из теоремы 1.2 немедленно следует

**Теорема 1.5.** При отображении Абеля-Якоби кривой, изображенной на рис. 1.4, с начальной точкой в  $P_{2g+2}$  образы вещественного овала  $O_j$  и ковещественного овала  $O_k$  содержатся в вещественно  $g$ -мерных торах, реализуемых как образы аффинных гиперпространств  $\mathbf{u}(P_j) + \mathbb{R}^g$  и  $\mathbf{u}(P_k) + i\mathbb{R}^g$ , соответственно, при факторизации по решетке  $\mathbb{Z}^g + i\Omega\mathbb{Z}^g$ . Образы точек ветвления  $P_k$  определены в теореме 1.2.

## 1.3 Система уравнений на вспомогательные параметры

Схеме метода, изложенной в предыдущем разделе, недостает конкретного вида систем уравнений, из которых находятся вспомогательные параметры. Для большей наглядности представляется разумным не формулировать наиболее общий вид этих систем для прямоугольного многоугольника с произвольным количеством разрезов, выходов на бесконечность и прямых углов, а проиллюстрировать основные принципы их построения на конкретных примерах. Выбор этих примеров продиктован прикладными задачами, в которых они используются; о них речь пойдет в главе 3.

Для того, чтобы вывести конкретный вид условий принадлежности точки локусу верхней полуплоскости и гиперэллиптической проекции, сформулируем сначала известные утверждения из теории гиперэллиптических поверхностей.

**Определение 1.11.** [4, 17] Пусть  $\mathcal{M}$  – гиперэллиптическая поверхность, задаваемая (1.4),  $\mathbf{u}$  – отображение Абеля-Якоби (1.10) с начальной точкой в  $P_{2g+2} = \mu(e_{2g+2})$ . Вектором римановых констант  $\mathcal{K} \in \text{Jac}(\mathcal{M})$  будем называть сумму

$$\mathcal{K} = \sum_{k=1}^{g+1} \mathbf{u}(e_{2k}) \pmod{\text{Jac}(\mathcal{M})}. \quad (1.17)$$

**Теорема 1.6** ([60]). Пусть  $\mathcal{M}$  – гиперэллиптическая поверхность рода 2,  $\mathcal{K}$  – вектор римановых констант. Точка  $z$  якобиана кривой лежит в образе отображения Абеля-Якоби  $\mathbf{u}(\mathcal{M})$  тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\theta(z + \mathcal{K}) = 0. \quad (1.18)$$

**Теорема 1.7** ([50]). Пусть  $P$  и  $Q$  – две различные точки на гиперэллиптической поверхности  $\mathcal{M}$  рода 3,  $\mathcal{K}$  – вектор римановых констант. Тогда множе-



ство решений системы уравнений

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{u} - \mathbf{u}(P) + \mathcal{K}) &= 0, \\ \theta(\mathbf{u} - \mathbf{u}(Q) + \mathcal{K}) &= 0\end{aligned}\tag{1.19}$$

в  $\text{Jac}(\mathcal{M})$  является объединением  $\mathbf{u}(\mathcal{M})$  – образа поверхности при отображении Абеля-Якоби, и сдвинутого образа  $\mathbf{u}(\mathcal{M}) + \mathbf{u}(P) + \mathbf{u}(Q)$ .

В частности, в качестве точек  $P$  и  $Q$  удобно выбрать некоторые точки ветвления на кривой, тогда условия принадлежности точки в якобиане локусу поверхности будет задаваться обнулением  $\theta$ -функций с определенными характеристиками.

**Теорема 1.8.** [17, 60] Пусть  $\mathcal{M}$  – гиперэллиптическая поверхность,  $\mathbf{e} = \mathcal{K} + \mathbf{u}(P_1) + \dots + \mathbf{u}(P_g)$ . Пусть  $f(P)$  – мероморфная на  $\mathcal{M}$  функция, имеющая полюсы в точках  $R_1, \dots, R_k$  и нули в точках  $Q_1, \dots, Q_k$ . Тогда

$$f(P) = c \frac{\prod_{j=1}^k \theta(\mathbf{u}(P) - \mathbf{u}(Q_j) - \mathbf{e})}{\prod_{j=1}^k \theta(\mathbf{u}(P) - \mathbf{u}(R_j) - \mathbf{e})},\tag{1.20}$$

где  $c$  – некоторая константа, определяемая из нормировки функции.

Отображение (1.20) представляет собой композицию гиперэллиптической проекции из (1.13) и отображения Абеля-Якоби.

Перейдём к конкретным примерам.

Рассмотрим ограниченный многоугольник  $P_2$  с двумя разрезами и 8 прямыми углами, изображенный справа на рис. 1.5. Неизвестными параметрами ассоциированной с ним поверхности являются  $\frac{3(3+1)}{2} = 6$  членов (чисто мнимой симметричной) матрицы периодов и 6 вещественных параметров, задающих положение нулей дифференциала (1.7). Действительно, в соответствии с теоремой 1.5 образы нулей в якобиане  $\mathbf{u}(z_a) = \mathbf{v}_a + \frac{i\Omega_1}{2}$ ,  $\mathbf{u}(z_b) = \mathbf{v}_b + \frac{i\Omega_2}{2}$ ,  $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ .

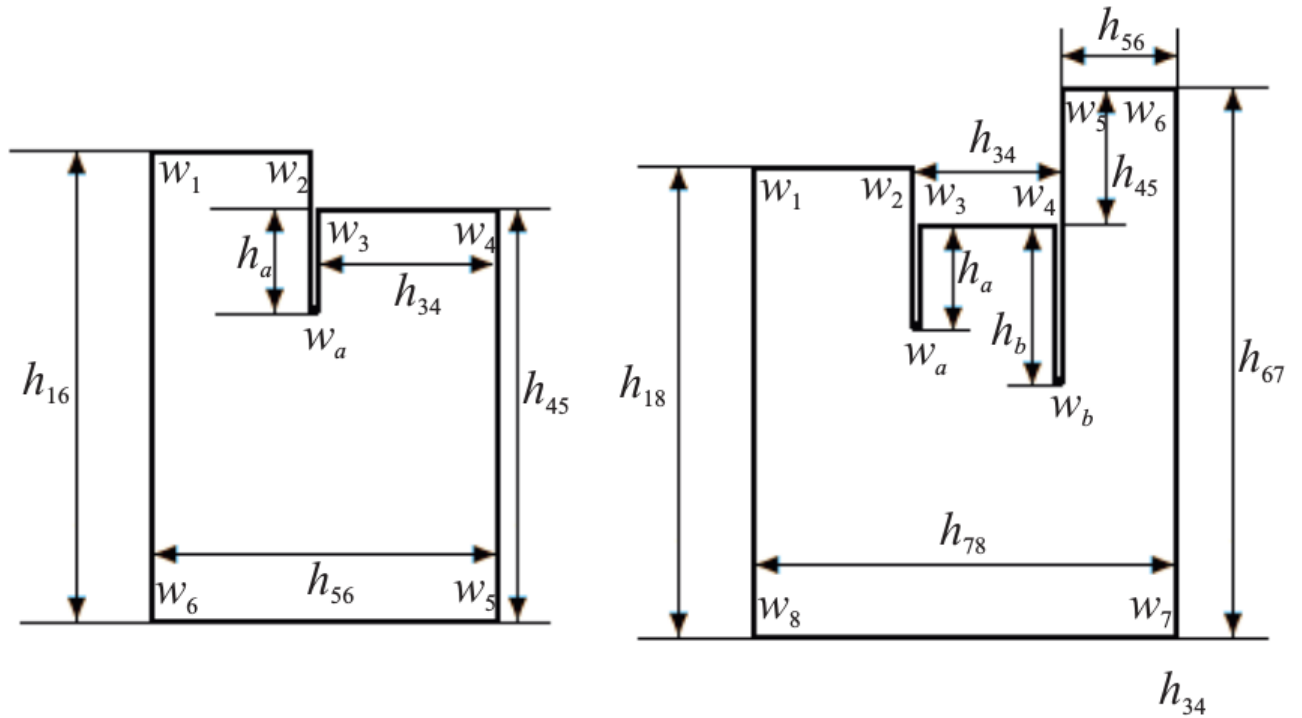


Рисунок 1.5: Ограниченные многоугольники  $P_1$  (слева) и  $P_2$ .

Вектор римановых констант в данном случае, в соответствии с (1.16) и (1.17),

$$\mathcal{K} = \frac{E_1 + E_2}{2} + i \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{2}. \quad (1.21)$$

Следовательно, гиперэллиптическую проекцию, нормированную условиями  $x(\mathbf{u}_8) = 0$ ,  $x(\mathbf{u}_7) = 1$  и  $x(\mathbf{u}_1) = \infty$ , можно с помощью  $\theta$ -функций с характеристиками записать следующим образом:

$$x(u) = \left( \frac{\theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} (u|i\Omega) \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( i\frac{\Omega_3}{2} - \frac{E_1+E_2+E_3}{2} |i\Omega \right)}{\theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( u - \frac{E_1+E_2+E_3}{2} |i\Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 001 \\ 101 \end{bmatrix} \left( i\frac{\Omega_3}{2} |i\Omega \right)} \right)^2 \quad (1.22)$$

Интегрирование дифференциала (1.3) вдоль вещественных овалов дает выражение для вектора констант

$$\mathbf{C} = i \begin{pmatrix} h_{18} + h_{45} - h_{67} \\ -h_{45} \\ h_{67} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

**Теорема 1.9.** Пусть  $z_a$  и  $z_b$  - прообразы точек  $w_a \in \partial P_2$ ,  $w_b \in \partial P_2$  соответственно. Тогда  $\mathbf{u}(z_a) = \mathbf{v}_a + i\frac{\Omega_1}{2}$ ,  $\mathbf{u}(z_b) = \mathbf{v}_b + i\frac{\Omega_2}{2}$ , где  $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ ,  $\mathbf{v}_b \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ ,  $\Omega_k$  -  $k$ -ый столбец  $\Omega$ , причем  $\mathbf{v}_a$ ,  $\mathbf{v}_b$  и мнимая часть матрицы периодов  $\Omega$  для  $P_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \begin{pmatrix} h_{18} + h_{45} - h_{67} \\ -h_{45} \\ h_{67} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{78} - h_{34} - h_{56} \\ h_{78} - h_{56} \\ h_{78} \end{pmatrix} = 0, \\ \det \begin{pmatrix} h_{18} + h_{45} - h_{67} & -h_{45} & h_{67} \\ \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_1}(\mathbf{z}|i\Omega) & \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_2}(\mathbf{z}|i\Omega) & \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix}}{\partial z_3}(\mathbf{z}|i\Omega) \\ \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix}}{\partial z_1}(\mathbf{z}|i\Omega) & \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix}}{\partial z_2}(\mathbf{z}|i\Omega) & \frac{\partial \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix}}{\partial z_3}(\mathbf{z}|i\Omega) \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{v}_a + \frac{\Pi_1}{2} \\ \mathbf{z}=\mathbf{v}_b + \frac{\Pi_2}{2}}} = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 111 \\ 101 \end{bmatrix} (0|i\Omega) = 0, \\ 2i(\mathbf{C}, \mathbf{v}_a) - h_{67} + h_{45} + h_a = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_a + \frac{\Pi_1}{2}|i\Omega) = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_a + \frac{\Pi_1}{2}|i\Omega) = 0, \\ 2i(\mathbf{C}, \mathbf{v}_b) - h_{67} + h_{45} + h_b = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_b + \frac{\Pi_2}{2}|i\Omega) = 0, \\ \theta \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_b + \frac{\Pi_2}{2}|i\Omega) = 0. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

**Доказательство.** Система содержит 12 вещественных уравнений (в самом деле, в первой строке (1.24) записано три уравнения, а во второй - два), связывающих 12 вещественных неизвестных.

Первые три (линейных) уравнения получаются при интегрировании дифференциала 1.3 вдоль ковещественных овалов. Также из интегрирования вдоль вещественных овалов от  $P_3$  до  $P_a$  и от  $P_4$  до  $P_b$  получаются седьмое и десятое уравнение, соответственно.

Шестое уравнение задает условие (известное как условие Мамфорда, [37]), которое при некоторых дополнительных условиях невырожденности, рассмот-

ренных в параграфе 1.4, является необходимым и достаточным для того, чтобы риманова матрица являлась матрицей периодов поверхности вида 1.4.

Уравнения (8-9) и (11-12) возникают из требования 1.19 принадлежности локусу верхней полуплоскости точек  $z_a$  и  $z_b$ , соответственно.

Наконец, записанные во второй строке системы уравнения означают наличие нулей дифференциала (1.3) в точках  $u_a, u_b$ . ■

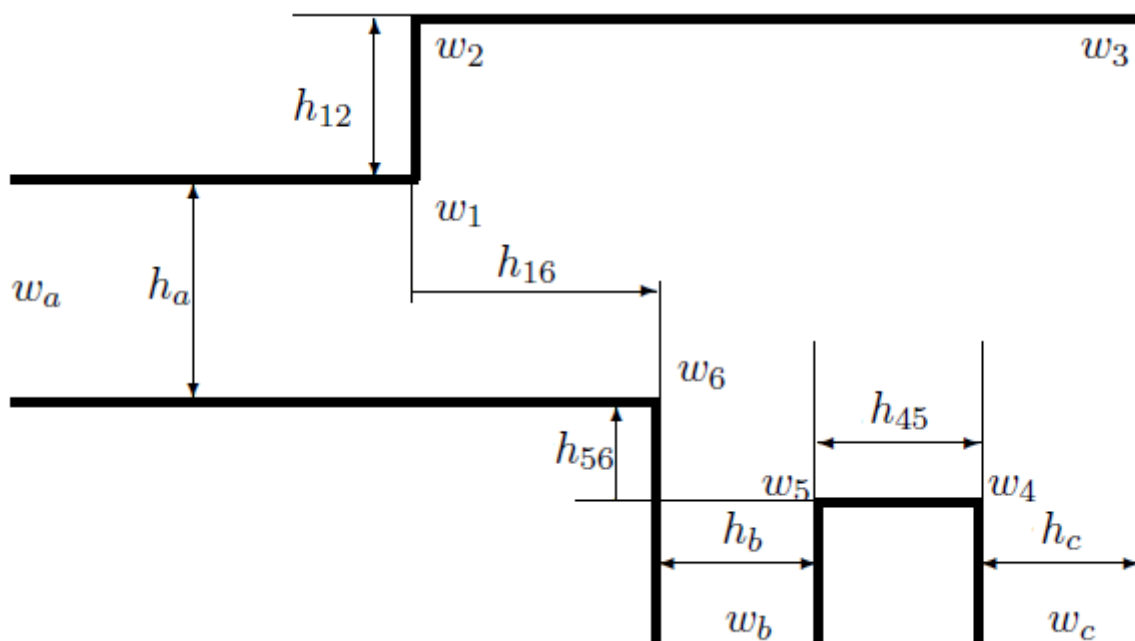


Рисунок 1.6: Прямоугольный девятиугольник  $P_0$ .

Те же рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение для многоугольника  $P_0$ , изображенного на рисунке 1.6. В этом случае неизвестны  $\frac{2(2+1)}{2} = 3$  вещественных параметра, задающих матрицу периодов, и 6, задающих положение полюсов.

Вектор римановых констант

$$\mathcal{K} = \frac{E_1}{2} + i \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}. \quad (1.25)$$

Гиперэллиптическая проекция, нормированная условиями  $x(\mathbf{u}_6) = 0$ ,  $x(\mathbf{u}_3) = 1$  и  $x(\mathbf{u}_1) = \infty$ :

$$x(u) = \left( \frac{\theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u|\Omega) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( i\frac{\Omega_2}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} |\Omega \right)}{\theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( u - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} |\Omega \right) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} \left( i\frac{\Omega_2}{2} |\Omega \right)} \right)^2 \quad (1.26)$$

Интегрирование дифференциала (1.7) вдоль вещественных овалов с учетом (1.15) дает вектор констант

$$\mathbf{C} = -\pi i \begin{pmatrix} h_{56} + h_a - ih_c \\ h_{56} + h_a + h_{12} - ih_c \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

**Теорема 1.10.** Пусть  $z_a, z_b$  и  $z_c$  — прообразы точек  $w_a, w_b$  и  $w_c \in \partial P_0$ , соответственно. Тогда  $\mathbf{u}(z_a) = v(a)$ ,  $\mathbf{u}(z_b) = i\mathbf{v}_b$ ,  $\mathbf{u}(z_c) = i\mathbf{v}_c + \frac{E_1+E_2}{2}$ , причем  $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$  и  $\mathbf{v}_c$  и мнимая часть матрицы периодов  $\Omega$  для  $P_0$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} h_a \mathbf{v}_a + h_b \mathbf{v}_b + h_c \mathbf{v}_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega_{11}(h_{56}+h_a) - \Omega_{12}(h_{56}+h_a+h_{12}) + h_c + h_{45} \\ \Omega_{22}(h_{56}+h_a+h_{12}) - \Omega_{12}(h_{56}+h_a) - h_{16} - h_c - h_b - h_{45} \end{pmatrix} \\ \theta[\zeta](\mathbf{v}_a | i\Omega) = 0 \\ \theta[\zeta](i\mathbf{v}_b | i\Omega) = 0 \\ \theta[\zeta](i\mathbf{v}_c + \frac{E_1+E_2}{2} | i\Omega) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial u_1} \frac{\partial \theta[\xi](\mathbf{u} | i\Omega)}{\partial u_2} = \frac{\partial w}{\partial u_2} \frac{\partial \theta[\xi](\mathbf{u} | i\Omega)}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{u}=0, \frac{E_1}{2}, \frac{i\Omega_1}{2}, \frac{i\Omega_1+E_1+E_2}{2}} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

**Доказательство.** Система содержит 9 вещественных уравнений (в первой строке (1.28) записано четыре уравнения, а в пятой — два), связывающих 9 вещественных неизвестных.

Первые два (линейных) уравнения получаются при интегрировании дифференциала (1.7) вдоль ковещественных овалов.

Уравнения (3-5) возникают из требования 1.18 принадлежности локусу верхней полуплоскости точек  $z_a, z_b$  и  $z_c$ , соответственно.

Наконец, записанные в последней строке системы уравнения означают наличие нулей дифференциала (1.7) в точках  $u_1, u_4, u_5$  и  $u_6$ . ■

Существование решения (1.28) почти очевидно. Действительно, рассмотрим многоугольник, изображенный на рис. 1.6. Взаимно-однозначное конформное отображение  $f$  на верхнюю полуплоскость может быть продолжено

на его границу. Тогда мы можем определить точки  $x_k$  из (1.4) как  $f$ -образы его вершин. Затем определим риманову поверхность (1.4) и построим отображение Абеля-Якоби с начальной точкой  $P_6$ . Матрица периодов такой поверхности и образы полюсов будут удовлетворять системе (1.28) по построению. Фактически, мы указали более простой для понимания, но менее конструктивный способ поиска параметров отображения.

Несколько сложнее доказать единственность решения. Сначала нужно обозначить некоторые естественные ограничения на искомые параметры, чтобы уточнить, что именно мы понимаем под единственностью.

## 1.4 Модель пространства параметров для $n=2,3$

Пусть  $\mathcal{M}$  — риманова поверхность вида (1.4),  $\mu$  — вложение верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$  в  $\mathcal{M}$ , а  $u(\mu(\mathbb{H}))$  — локус  $\mathbb{H}$  в якобиане. Рассмотрим многоугольники — образы отображений  $2u_k$  (т.е. взятие  $k$ -ой компоненты отображения Абеля-Якоби). Расстояния между их вершинами находятся из теоремы 1.2 и изображены на рисунке 1.7.

Из требования положительности длин сторон получаем следующее необходимое условие того, что риманова матрица  $i\Omega$  является матрицей периодов поверхности (1.4): её элементы должны быть положительны и подчиняться условию (для  $k = 3$ )

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{11} & > & \Omega_{12} & > & \Omega_{13} \\ & & \wedge & & \wedge \\ & & \Omega_{22} & > & \Omega_{23} \\ & & & & \wedge \\ & & & & \Omega_{33} \end{array} \quad (1.29)$$

Подобная графическая интерпретация была впервые предложена А.Б. Богатырёвым в [50].

Справедливы следующие теоремы.

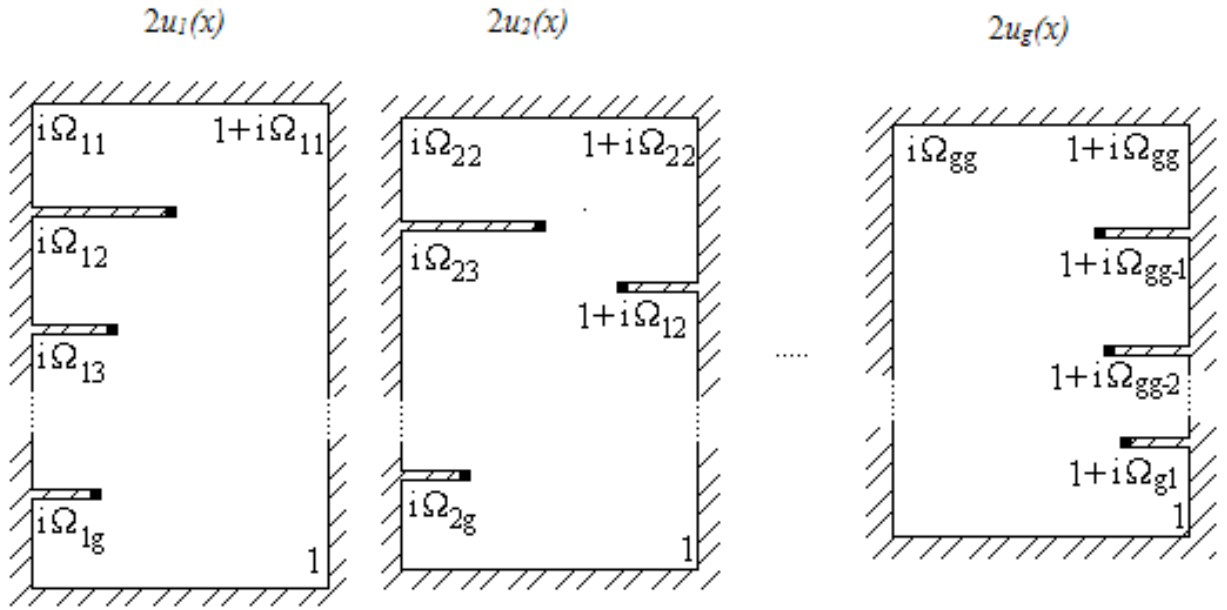


Рисунок 1.7: Графическая интерпретация ограничений, накладываемых на элементы матрицы периодов.

**Теорема 1.11** ([50], [37]). Область изменения элементов матрицы периодов для многоугольника на рис. 1.6 задается условием положительности и условием, подобным (1.29), для многоугольника  $P_2$  на рис. 1.5 - условием положительности, (1.29) и условием Мамфорда.

**Теорема 1.12** ([37]). Пусть  $\Omega$  – риманова матрица размера  $g \times g$ . Следующие два утверждения равносильны:

1.  $\Omega$  удовлетворяет условию положительности, условию типа (1.29) и условию Мамфорда;
2. существует гиперэллиптическая поверхность с  $a$ - и  $b$ -циклами, отмеченными таким образом, что ее матрица периодов относительно такой разметки равна  $\Omega$ .

Из этих двух теорем следует, что матрица периодов, удовлетворяющая системе вида (1.28), (1.24) единственна в конусе, задаваемом условиями типа (1.29) и условиями положительности.

Действительно, как обсуждалось в разделе 1.3, одна такая матрица  $\Pi$  всегда существует. Предположим, что существует другая матрица  $\Pi'$ , удовлетворяющая системе уравнений, условию типа (1.29) и условию положительности. Тогда по теореме 1.12 существует гиперэллиптическая поверхность  $\mathcal{M}$ , такая что  $\Pi'$  является ее матрицей периодов, причем корни многочлена в ее алгебраической модели будут прообразами вершин рассматриваемого многоугольника по построению. Поскольку набор этих корней определен с точностью до дробно-линейного преобразования из  $PSL_2(\mathbb{R})$  (по теореме Римана), то, с учетом условия (1.29), матрицы периодов таких поверхностей должны совпадать.



## Глава 2

# Вычислительный алгоритм

При поиске приближенного решения систем (1.28) или (1.24) и вычислении конформного отображения необходимо предложить способ генерации начального приближения и численный метод решения нелинейных систем. Как уже было сказано выше, основные трудности численных методов конформных отображений вызваны явлением сгущивания. Данный раздел посвящен описанию влияния, которое оказывает это явление на вспомогательные параметры выражений вида (1.22), (1.26) и обусловленность систем вида (1.28), (1.24), и построению метода, учитывающего это влияние.

Как отмечалось в ранних работах, посвященных сгущиванию [15,21], особенно сильно оно проявляется при отображении  $\mathbb{H}$  на области с «заливами» или узкими «каналами». Чтобы выделить те особенности многоугольников, на которые следует обратить внимание вычислителю, необходимо понять физический смысл этого явления.

Природа сгущивания заключается в том, что конформное отображение в общем случае не сохраняет жорданову меру. Правильно будет измерять дуги границ односвязных областей с помощью другой меры, называемой *гармонической*. Приведем здесь определение гармонической меры, проясняющее ее физический смысл.

**Определение 2.1.** Пусть  $\Omega \in \mathbb{C}$  - односвязная область,  $z_0 \in \Omega$ , а  $\xi(t)$  - случайное блуждание, начинающееся в точке  $z_0$ . Тогда на  $\partial\Omega$  определена вероятностная мера, позволяющая определить плотность вероятности обрыва случайного блуждания в некоторой точке границы. Ее называют гармонической с центром в точке  $z_0$  и обозначают  $\omega(z_0, \alpha, \Omega) = \int_{\alpha} \rho_0(\phi) d\phi$ , где  $\alpha$  - дуга  $\partial\Omega$ .

Конформные отображения сохраняют гармоническую меру в том смысле, что  $\omega_{f(\Omega)}(f(z_0), f(\alpha), f(\Omega)) = \omega_{\Omega}(z_0, \alpha, \Omega)$  [15]. Учитывая это, ее можно легко вычислить. Этот факт можно использовать и в обратную сторону, определяя меру численно методами типа Монте-Карло, а затем, сопоставляя ее с мерой прообраза - единичной окружности, вычислять конформное отображение [23].

Хотя понятие гармонической меры кажется интуитивно очевидным, оценить ее в областях сложной формы может быть достаточно тяжело. В частности, сгущивание, возникающее в областях с „заливами“ может быть устранимым [11], а в других областях, граница которых помещается в узкое кольцо (например, граница снежинки Коха [40]) - неустранимым и серьезно осложнять вычисления. Однако, можно утверждать [38], что при наличии конечного числа изломов границы их вклад существенно ниже, чем вносимый формой области в целом. Типичным примером является упомянутое во введении отображение прямоугольника на единичный круг.

Вернемся к конформным отображениям многоугольников. Представление конформного отображения на многоугольник в виде интеграла Кристоффеля-Шварца параметризуется дробно-линейными функциями от гармонических мер его сторон. В том случае, если соответствие «жордановы меры сторон  $\longleftrightarrow$  гармонические с центром в некоторой точке меры сторон» является плохо обусловленным, мы попадаем в ситуацию сильного сгущивания. Если сдвиг центра меры улучшает обусловленность, говорят об *устранимом* (или *алгебраическом*) сгущивании [26].

Выбор полуаналитического представления вида (1.22), (1.26), зависящего от другого набора параметров, продиктован желанием улучшить обусловленность соответствия «многоугольник  $\longleftrightarrow$  параметры полуаналитического представления конформного отображения на него». Остановимся на этом подробнее.

## 2.1 Пространства модулей многоугольников

Прежде всего отметим, что как методы, сводящиеся к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля-Шварца, так и метод, рассматриваемый в данной диссертации, сводится к построению отображения из пространства многоугольников в пространство параметров одного из полуаналитических представлений решения задачи Римана для многоугольника. От аналитических свойств такого отображения зависит эффективность численных методов, используемых для его вычисления.

**Пространство допустимых многоугольников.** Прямоугольный многоугольник заданного комбинаторного типа может быть описан с помощью конечного числа  $n$  своих линейных размеров, т.е. каждому многоугольнику можно сопоставить некоторую точку в  $n$ -мерном пространстве. Но не любой точке соответствует прямоугольный многоугольник: необходимо, чтобы он был связным и несамопересекающимся. Например, для многоугольника типа изображенного на рис. 1.6 нужно задать 7 параметров  $h_{12}, h_{45}, h_{56}, h_{16}, h_a, h_b, h_c$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} h_{12}, h_a, h_b, h_c, h_{45} > 0 \\ h_{56} + h_a + h_{12} > 0 \\ h_{16} + h_b < 0 \Rightarrow h_{56} + h_a > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Далее, будем считать эквивалентными многоугольниками, отличающиеся друг от друга гомотетией. В каждом классе эквивалентности существует един-

ственный представитель, удовлетворяющий  $h_a = 1$  – это равенство можно выбрать как условие нормировки.

**Определение 2.2.** Область в  $\mathbb{R}^6$ , задаваемая системой уравнений (2.1), в которых полагается  $h_a = 1$ , назовем пространством модулей прямоугольных девятиугольников конфигурации, показанной на рис. 1.6 или просто пространством девятиугольников и будем обозначать  $P_{perm}$ .

Пространство девятиугольников линейно связно, но не выпукло. Однако любые две точки можно соединить двухзвенной ломаной, лежащей в  $P_{perm}$  (последний факт следует из того, что  $P_{perm}$  линейно связно и является объединением двух множеств, которые задаются системами линейных неравенств, а значит, выпуклы). Несложно видеть, что для прямоугольных многоугольников более сложного комбинаторного типа любые две точки в  $P_{perm}$  также можно соединить конечнозвенной ломаной.

Определим теперь **пространство модулей гиперэллиптических кривых** рода 2, конформно эквивалентных кривым вида (1.4), с отмеченной точкой на каждом из овалов  $O_6$ ,  $O_5$  и  $O_3$ . Координаты на этом пространстве можно ввести естественным образом, взяв в их качестве нули многочлена в правой части (1.4) и три действительных числа  $x_a, x_b, x_c$ , расположенных в циклическом порядке

$$(x_3, x_2, x_1, x_a, x_6, x_b, x_5, x_4, x_c) \quad (2.2)$$

на границе верхней полуплоскости, с точностью до некоторого отношения эквивалентности. Поскольку эквивалентные наборы точек должны отвечать конформно эквивалентным кривым, то вышеупомянутые наборы чисел необходимо рассматривать с точностью до дробно-линейных преобразований из  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Это требование можно убрать, если зафиксировать положение трех точек (например,  $x_1, x_6, x_3$  в  $0, 1$  и  $\infty$ ). Получаем

**Определение 2.3.** Рассмотрим шестимерное вещественное координатное пространство, координаты в котором обозначим через  $x_2, x_a, x_b, x_5, x_4, x_c$ .

Область в  $\mathbf{R}^6$ , задаваемая неравенствами

$$x_2 < 0 < x_a < 1 < x_b < x_5 < x_4 < x_c \quad (2.3)$$

назовем пространством модулей  $M_2\mathbb{R}_3$ .

**Утверждение 2.1.** *Решение задачи Римана для многоугольника, приведенного на рисунке 1.6, с произвольными геометрическими размерами, задает взаимно-однозначное отображение из  $P_{perm}$  в  $M_2\mathbb{R}_3$ .*

**Доказательство.** Отображение инъективно, поскольку двум различным многоугольникам может соответствовать один и тот же упорядоченный набор прообразов вершин лишь в том случае, когда они связаны гомотетией, а эта неоднозначность уже учтена при определении  $P_{perm}$ .

Докажем сюръективность отображения.

Приращение конформного отображения (1.3) из поднятия  $\mu(\mathbb{H})$  верхней полуплоскости на риманову поверхность на границе  $\mu(\mathbb{H})$  является вещественным на вещественных овалах и чисто мнимым на ковещественных овалах. При этом оно монотонно на отрезках, соединяющих точки ветвления (кроме отрезков  $P_1P_6$ ,  $P_5P_6$  и  $P_3P_4$ , на которых есть полюсы дифференциала; здесь монотонность нарушается в окрестности полюсов). Следовательно, любой точке из  $M_2\mathbb{R}_3$  соответствует интеграл Кристоффеля-Шварца, продолжение которого на границу  $\mu(\partial(\mathbb{H}))$  переводит эту границу в ломаную с той же последовательностью углов, что и у любого многоугольника из  $P_{perm}$ . Эта ломаная не может иметь самопересечений, поэтому она ограничивает многоугольник из  $P_{perm}$ . Итак, отображение  $P_{perm} \mapsto M_2\mathbb{R}_3$  инъективно. ■

Традиционные подходы к решению задачи сводились к построению такого отображения. Идеология метода, развиваемого в этой диссертации, состоит в введении более естественной системы координат на  $M_2\mathbb{R}_3$ .

Пусть задана кривая (1.4) с тремя отмеченными точками, лежащими на овалах  $O_6$ ,  $O_5$  и  $O_3$ . По ней можно вычислить шесть параметров - три из

них будут задавать матрицу периодов, а три - положение образов отмеченных точек при отображении Абеля-Якоби.

Определим следующие параметры

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 2 \int_{x_6}^{x_b} \omega_1, \\ \nu_2 = 2 \int_{x_6}^{x_c} \omega_2, \\ \nu_3 = \frac{2}{i\Pi_{11}} \int_{x_6}^{x_a} \omega_1. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Эти параметры однозначно задают положение отмеченных точек, причем  $\nu_i \in [0; 1]$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Действительно, ноль дифференциала  $\omega_1$  лежит на овале  $O_3$  (это следует из условия нормировки), значит,  $I_1(x) \int_{x_6}^x \omega_2$ ,  $x \in [x_6; x_5]$  является возрастающей функцией, причем  $2I_1(x_5) = 1$  также из условия нормировки. Поскольку функция монотонна, она задает взаимно однозначное соответствие между точками на овале и единичным отрезком.

Рассмотрим шестимерное вещественное координатное пространство, координаты в котором обозначим через  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{22}$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ . Область в  $\mathbf{R}^6$ , задаваемую неравенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \Omega_{12} < \min(\Omega_{11}, \Omega_{22}) \\ 0 < \nu_k < 1, \quad k = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

обозначим через  $A$ .

Верно следующее

**Утверждение 2.2** ([50]). Пусть координаты в  $M_2\mathbf{R}_3$  обозначают отмеченные точки и точки ветвления, координаты в  $A$  обозначают, соответственно, мнимые части  $\Omega$  и значения интегралов (2.4). Тогда естественное отображение  $M_2\mathbf{R}_3 \rightarrow A$ , вычисляющее эти параметры, является вещественно-аналитическим диффеоморфизмом.

Хотя это утверждение и не потребуется в дальнейшем, оно чрезвычайно важно, т.к. показывает, что выбранные параметры однозначно характеризуют кривую.

Кроме того, все построенные пространства модулей имеет чрезвычайно простую геометрию - они являются многогранниками с конечным числом граней.

Алгоритм решения систем вида (1.28), (1.24) выглядит так:

1. Каким-либо образом находятся параметры для некоторого фиксированного многоугольника  $\mathcal{P}_0$ . Один из способов, использованный в программной реализации метода, таков: выбрав некоторые допустимые параметры, вычислить размеры соответствующего им многоугольника, и зафиксировать его как  $\mathcal{P}_0$ .
2. Затем точки, соответствующие в  $P_{perm}$  искомому многоугольнику  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_0$ , соединяются ломаной.
3. Ломаная разбивается точками  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ . Если уже известно решение системы для многоугольника  $\mathcal{P}_i$ , оно используется как начальное приближение при ее решении для  $\mathcal{P}_{i+1}$ . Для приближенного решения системы используется метод Ньютона. При этом на каждом шаге метода контролируется выполнение неравенств типа (2.5, 1.29).
4. Если метод Ньютона не позволяет достичь желаемой точности за фиксированное число шагов  $N$ , оставшиеся отрезки разбиваются пополам, далее см. п.3. При поиске параметров для промежуточных многоугольников можно ради экономии времени предъявлять более низкие требования к точности.

Поскольку алгоритм Деконинка-Бобенко вычисления  $\theta$ -функций [9] позволяет вычислять с машинной точностью и их производные любого порядка, матрица Якоби системы может быть вычислена также с машинной точностью.

Описанная процедура известна как метод Ньютона с продолжением по параметру [62] и неоднократно применялась при решении задач комплексного анализа [56, 74]; ключевым в ней является способ построения начального приближения.

Численные эксперименты показывают, что отображение  $M_2\mathbb{R}_3 \mapsto A$  и подобные ему для многоугольников, рассматриваемых в данной диссертации, являются хорошо обусловленными вдали от границ пространства модулей. Однако могут возникать проблемы с обусловленностью систем вида (1.28, 1.24). Рассмотрим возникающие вычислительные трудности на конкретном примере.

Рассмотрим многоугольник, представленной на рис. 2.1 (см. также рис. 1.5), с параметрами  $h_{12} = 0.25$ ,  $h_{23} = 2$ ,  $h_{45} = 2$ ,  $h_{56} = 0.25$ ,  $h_{67} = 0$ ,  $h_{78} = 0.5$ ,  $h_a = 1.999$ ,  $h_b = 0.1$ .

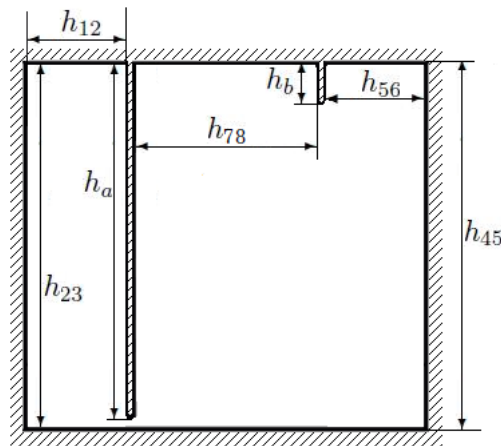


Рисунок 2.1: Рассматриваемый многоугольник.

Потребовав от нормы невязки значения, не превосходящего  $10^{-15}$ , получаем матрицу периодов

$$\begin{pmatrix} 7.999933986662755 & 0.000021986487772 & 0.000000026936965 \\ 0.000021986487772 & 3.321082479002113 & 0.981634711747055 \\ 0.000000026936965 & 0.981634711747055 & 1.472452054152100 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$



При вычислении решения, однако, метод Ньютона требует значительно большего количества итераций, чем для менее «вырожденных» многоугольников. Дальнейшие численные эксперименты показывают, что это связано с частым выходом приближенного решения за пределы области допустимых значений (1.29). Вычисляя спектр матрицы Якоби в точке решения, получаем

$$[-3.5435; 2.5397; 1.1796; -0.9291; -0.5015 \pm 0.1072i; \\ 0.25 \pm 6.3323 \times 10^{-8}i; -6.7466072 \times 10^{-6}; 5.2093827 \times 10^{-7}; \\ -3.12 \times 10^{-7}; -6.19607 \times 10^{-8}]$$

т.е. для заданной нормы невязки невозможно гарантировать точность приближенного решения выше  $10^{-7}$ .

Поскольку отображение гиперэллиптической проекции позволяет найти прообразы вершин многоугольника при конформном отображении из  $\mathbb{H}$ , можно убедиться в том, что подход решения проблемы параметров потерпел в данном случае еще большую неудачу. Выберем нормировку  $x_3 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \infty$ .

Таблица 2.1: Прообразы вершин многоугольника.

$x_4$	$8.58 \times 10^{-11}$
$x_5$	$8.585 \times 10^{-11}$
$x_6$	$8.586 \times 10^{-11}$
$x_a$	$8.59 \times 10^{-11}$
$x_7$	$8.61 \times 10^{-11}$
$x_8$	$2.7864 \times 10^{-5}$
$x_b$	$1 - 1.853 \times 10^{-10}$

Из таблицы видно, что в данном случае прообразы вершин многоугольника скучиваются возле двух центров – имеет место неустранимое скучивание. Необходимо понять, каким образом скучивание влияет на обусловленность системы вида (1.28, 1.24).

## 2.2 Влияние сгущивания на вспомогательные параметры

Рассмотрим еще раз многоугольник  $P$ , изображенный на рис. 2.1. Приведенная физическая интерпретация сгущивания позволяет предсказать, что в данном случае мы столкнемся с этим явлением; необходимо понять, как при этом ведет себя матрица периодов поверхности, ассоциированной с  $P$ .

Алгебраическая модель такой поверхности

$$y^2 = \mathcal{Q}_{2g+2}(x), \quad (2.7)$$

где среди корней многочлена  $\mathcal{Q}_{2g+2}(x)$  есть по меньшей мере две группы корней, сгущенных возле двух точек, расстояние между которыми велико по сравнению с расстоянием между точками группы (т.е. есть по меньшей мере два различных «почти кратных» корня).

Изучением асимптотик матриц периодов подобных поверхностей занимался А. Лейбовиц [32, 33], доказавший, что имеет место следующая связь.

**Теорема 2.1.** [32] *Рассмотрим риманову поверхность функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_6(x)}$ .*

- 1. Пусть имеются две группы сгущенных корней, содержащие по 3 корня каждая (не ограничивая общности, можно считать, что они сгущены возле 0 и 1, т.е.  $|x_i| < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $|x_i - 1| < \varepsilon$ ,  $i = 4, 5, 6$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ). В таком случае в пределе матрица периодов имеет вид  $\begin{pmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}$  (т.е., поверхность вырождается в два тора, склеенных по точке).*
- 2. Пусть имеется две группы сгущенных корней, содержащих 2 и 4 корня соответственно (т.е.  $|x_i| < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2$ ,  $|x_i - 1| < \varepsilon$ ,  $i = 3, \dots, 6$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ). Тогда число обусловленности матрицы периодов  $\|\Omega^{-1}\| \times \|\Omega\| \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (геометрически это соответствует «перетяжке» ручки, т.е. вырождению поверхности в тор с двумя склеенными точками).*

Для матриц периодов поверхностей при  $g > 2$  возникают аналогичные проблемы (разложимость либо плохая обусловленность).

Необходимо понять, какие вычислительные трудности возникают при решении системы (1.28) в случае многоугольников, близких к вырождению.

1. Пусть  $\Omega$  – блочно-диагональная матрица вида  $\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \varepsilon z^T \\ \varepsilon z & \Omega' \end{pmatrix}$ , тогда  $\theta$ -константа

$$\theta \begin{bmatrix} 111 \\ 101 \end{bmatrix} (0|\Omega) = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0|\Omega_{11})\theta \begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix} (0|\Omega') + O(\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) является одним из уравнений системы (1.28). Следовательно, близость матрицы периодов к блочно-диагональной вызывает плохую обусловленность матрицы Якоби системы (1.28).

2. Если же матрица периодов является плохо обусловленной, это вызывает проблемы с вычислением левой части систем (1.24, 1.28).

## 2.3 Модулярные преобразования

Вспомним рассмотренный во введении пример конформного отображения удлиненного прямоугольника на  $\mathbb{H}$ .

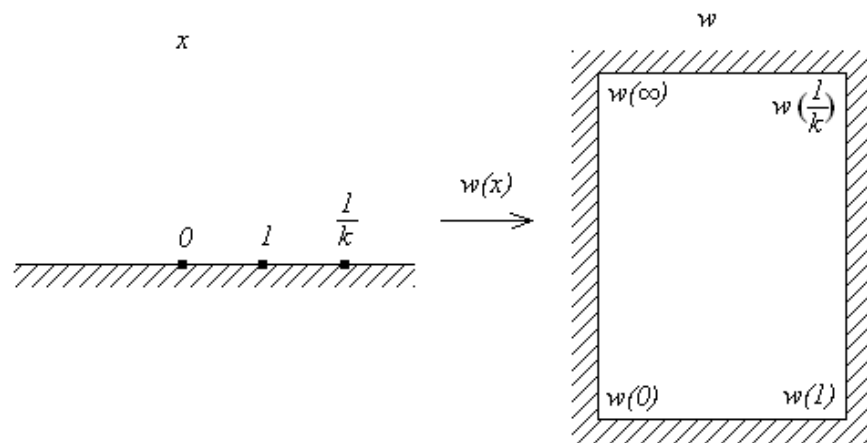


Рисунок 2.2: Отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость

При  $\tau \gg 1$  выражение (15) представляет собой отношение исключительно быстро сходящихся рядов. Тем не менее, как следует из оценок для (16),

вычисление этого отношения может столкнуться с проблемой потери точности в связи с возникновением неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  в машинной арифметике.

С другой стороны, при  $\tau \ll 1$  для достижения достаточной точности необходимо вычислить большое количество элементов суммы, но не возникает неопределенностей. Однако выражения для конформных отображений прямоугольников с отношением сторон  $\tau$  и  $\tau^{-1}$  будут совпадать с точностью до постоянного множителя, поскольку они совмещаются композицией поворота и растяжения, следовательно,  $\theta_{kl}(z|\tau)$  выражается через  $\theta_{mn}(\tau^{\pm 1}z|\tau^{-1})$ .

Для выражения (15) можно получить множество других представлений, используя модулярные преобразования вида  $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ ,  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Подбрав подходящую замену, вычислитель может избавиться от трудностей, вызванных медленной сходимостью  $\theta$ -рядов.

Определим модулярные преобразования в более общей ситуации.

**Определение 2.4.** [60] Пусть определена риманова поверхность (1.4) с выбранным определенным образом базисом циклов, относительно которого ее матрица периодов равна  $\Pi$ . Пусть произведена замена канонического базиса циклов на поверхности (1.4); тогда матрица периодов относительно нового базиса циклов называется модулярным преобразованием матрицы  $\Pi$ .

Замена базиса циклов на поверхности должна быть целочисленным линейным преобразованием, сохраняющим каноническую форму пересечения, поэтому верна следующая

**Теорема 2.2** ([9]). Любому модулярному преобразованию можно взаимнооднозначно сопоставить симплектическую матрицу  $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  размера  $2g \times 2g$  с целыми элементами, то есть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_g & I_g \\ -I_g & 0_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_g & I_g \\ -I_g & 0_g \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где  $a, b, c, d$  - целочисленные матрицы размера  $g \times g$ ,  $I_g, 0_g$  - единичная и нулевая матрицы размера  $g \times g$ , соответственно. Действие этого преобра-

зования на матрицу периодов поверхности будет задаваться формулой

$$\Pi \mapsto (a\Pi + b)(c\Pi + d)^{-1}. \quad (2.10)$$

По аналогии с группой дробно-линейных преобразований и  $\theta$  функциями Якоби, рассмотренными выше, можно описать, как изменяются  $\theta$ -функции Римана при действии модулярной группы.

**Теорема 2.3** ([17]). *Модулярная группа порождается генераторами*

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} a & 0_g \\ 0_g & (a^T)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} I_g & b \\ 0_g & I_g \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0_g & -I_g \\ I_g & 0_g \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $b = b^T \in GL_g(\mathbb{Z})$ ,  $a \in SL_g(\mathbb{Z})$ . При действии генераторов  $\theta$ -функция изменяется следующим образом

$$\begin{aligned} \theta(az|ia\Pi a^T) &= \theta(z|\Pi), \\ \theta(z|\Pi + b) &= \theta\left(z + \frac{1}{2}\text{diag}(b)|\Pi\right), \\ \theta(\Pi^{-1}z|-\Pi^{-1}) &= \sqrt{\det(-\Pi)}e^{\pi iz\Pi^{-1}z}\theta(z|\Pi), \end{aligned}$$

где  $\text{diag}(b)$  – вектор, составленный из диагональных элементов матрицы  $b$ .

Переобусловить систему позволяет следующая

**Теорема 2.4** (Редукция Зигеля). [9, 17] *Любая риманова матрица  $\Pi$  размера  $g \times g$  может быть сведена с помощью модулярных преобразований к римановой матрице  $\hat{\Pi} = \hat{X} + i\hat{Y}$ ,  $\hat{Y} = T^T T$ , где  $T$  – верхнетреугольная матрица, такой, что выполнены условия*

1.  $|\hat{X}_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ ;
2. самый короткий вектор решётки, порожденной столбцами  $T$ , имеет длину, не меньшую  $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Для поиска модулярного преобразования для конкретной матрицы используется алгоритм Зигеля (он же реализован в процедурах для вычисления  $\theta$ -функций и их производных в среде Maple [9]).

Модифицированный алгоритм для решения системы на вспомогательные параметры «проблемных» многоугольников выглядит так:

- для очередного ньютоновского приближения с помощью алгоритма Зигеля строится модулярное преобразование  $\Gamma$ , описанное в теореме 2.4;
- уравнения системы, полученные интегрированием по базисным циклам на поверхности (в основном линейные) преобразуются в соответствии с действием  $\Gamma$ ;
- продолжается поиск решения уже для модифицированной системы.

Численные эксперименты показывают, что подобная модификация алгоритма помогает избежать плохой обусловленности матрицы Якоби систем вида (1.28), (1.24).

К недостатком такого алгоритма является малая скорость его работы, поэтому его стоит применять при неудовлетворительной работе обычного численно-аналитического метода.

## Глава 3

# Численные эксперименты и приложения

### 3.1 Генерация ортогональных сеток. Сравнение с SCРАСК

Одним из важных приложений численных методов конформных отображений является генерация ортогональных сеток. [18, 19, 27, 75]. В физических приложениях область определения отображения, используемого для генерации сетки, называют *вычислительной*, а область значений – *физической*. Поскольку конформное отображение  $f$  сохраняет углы, ортогональная сетка в вычислительной области отображается с помощью  $f$  на сетку, линии которой также ортогональны.

Среди преимуществ ортогональных сеток можно указать следующие [27]:

- проще построить дискретный аналог эллиптических дифференциальных операторов;

- при решении гидродинамических задач наибольшая густота сетки достигается в «интересных» частях физической области — вблизи тонких перешейков, на остриях и т.д.;
- приближенное решение дифференциальных задач (например, задачи Дирихле) в слабой постановке требует высокоточного вычисления производных отображения физической области на вычислительную. При использовании полуаналитических методов значения производных любого порядка от  $f$  в узлах сетки могут быть даны явными формулами;
- кроме того, якобиан отображения  $f$  в узлах сетки задается 2 числами, а не 4, вследствие выполнения условий Коши-Римана, а значит, при вычислениях затрачивается вдвое меньше памяти.

Серьезным недостатком конформных сеток является их жесткость — для получения сетки с нужными свойствами необходимо понять, какие условия они накладывают на ее прообраз в вычислительной области.

Проще всего построить ортогональную сетку в прямоугольнике  $R_\tau = [-\tau; \tau] \times [-1; 1]$ , поэтому выберем его в качестве вычислительной области. Рассмотрим в качестве примера способ построения конформной сетки в многоугольнике  $D_1$ , изображенном слева на рис. 3.1. Естественно потребовать (см. параграф 3.4), чтобы левая и правая границы  $D_1$  сами являлись линиями сетки: для этого необходимо построить такое конформное отображение, при котором вершины прямоугольника  $R_\tau$  переходят в соответствующие вершины  $D_1$ .

Описанное отображение имеет четыре вещественные «степени свободы» (нормировка конформного отображения и параметр  $\tau$ ), на которые накладываются четыре связи (заданы прообразы четырех вершин  $D_1$ ). Можно ожидать, что задача будет иметь единственное решение, в частности, параметр  $\tau$  будет однозначно определен.



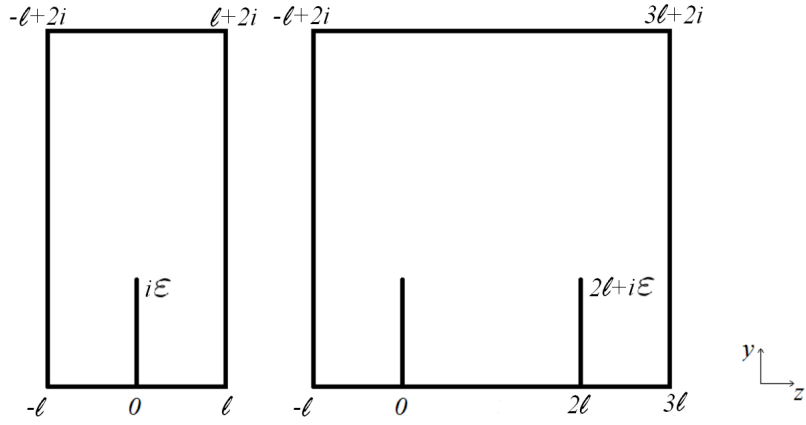


Рисунок 3.1: Многоугольники  $D_1$  и  $D_2$ .

Действительно, пусть  $D \subset \mathbb{C}$  - односвязная область с кусочно гладкой ориентированной границей,  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \partial D$  (перечисленные в порядке следования при обходе по границе). Необходимо построить конформное отображение  $D$  на прямоугольник, переводящее отмеченные точки в вершины.

Рассмотрим решение обратной задачи Римана  $F$  для области  $D$ , нормированное условиями  $F(z_3) = 0$ ,  $F(z_1) = 1$ ,  $F(z_2) = \infty$ . Пусть  $\kappa = F(z_4)$ , тогда композиция отображения  $F$  и эллиптического интеграла  $g(w) = \int_0^w \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)(\xi-\kappa)}}$  даст требуемое отображение области  $D$  на прямоугольник (заметим, что из принципа соответствия границ  $0 < \kappa < 1$ ). Из построения видно, что подобное отображение можно построить лишь для прямоугольника с определенным отношением сторон, которое называется *конформным модулем* области с отмеченными точками на границе и обозначается  $c(D, z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

Ортогональная сетка в  $D_1$  строится так:

1. Вычисляется конформный модуль  $\tau = c(D, -l, l, l + 2i, -l + 2i)$ .
2. В прямоугольнике  $R_\tau = [-1; 1] \times [-1; 1]$  генерируется прямоугольная сетка с заданными свойствами.
3. В соответствии с алгоритмом, изложенным в главе 1, для узлов сетки в  $R_\tau$  последовательно вычисляются образы при конформных отображениях  $R_\tau \mapsto \mathbb{H}$  и  $\mathbb{H} \mapsto D_1$ .

Следуя схеме, изложенной в 1.3, нормируем отображение  $D_1 \mapsto \mathbb{H}$  условиями перехода вершин  $-l$ ,  $l$  и  $-l + 2i$  в  $0$ ,  $1$  и  $\infty$ , соответственно, тогда образ четвертой вершины  $\kappa$  вычисляется с помощью гиперэллиптической проекции (ср. (1.26)):

$$\kappa = \left( \frac{\theta \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} (i\frac{\Omega_2}{2}|\Omega) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix} (i\frac{\Omega_2}{2}|\Omega)}{\theta \begin{bmatrix} 01 \\ 11 \end{bmatrix} (i\frac{\Omega_2}{2}|\Omega) \theta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (i\frac{\Omega_2}{2}|\Omega)} \right)^2 \quad (3.1)$$

Зная  $\kappa$ , вычисляем конформный модуль  $\tau$  как следующее отношение двух гипергеометрических функций [65]:

$$\tau = \frac{\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)(\xi-\kappa)}}}{\int_0^\kappa \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)(\xi-\kappa)}}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{\kappa}\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \kappa\right)}. \quad (3.2)$$

Согласно принципу симметрии Римана [63], описанное отображение  $f_\tau : R_\tau \mapsto D_1$  можно продолжить до конформного отображения прямоугольника  $[-\tau; 3\tau] \times [-1; 1]$  на область  $D_2$ , изображенную справа на рисунке 3.1 причем  $f_\tau(-\tau - i) = -l$ ,  $f_\tau(3\tau - i) = 3l$ ,  $f_\tau(3\tau + i) = 3l + 2i$ ,  $f_\tau(-\tau + i) = -l + 2i$ . Отсюда по определению конформного модуля

$$c(D_2, -l, 3l, 3l + 2i, -l + 2i) = 2c(D_1, -l, l, l + 2i, -l + 2i).$$

Поскольку область  $D_2$  является частным случаем многоугольника  $P_2$  на рис. 1.5, ее конформный модуль можно независимо вычислить с помощью численно-аналитического метода. Проведем эксперимент по сравнению численного метода, предложенного в данной работе, с методом, реализованным в пакете SCPACK. Зафиксируем параметр  $\epsilon = 0,2$  и будем, изменяя параметр  $l$ , вычислять отношение конформных модулей многоугольников  $D_2$  и  $D_1$  с отмеченными углами.

Таблица 3.1: Результаты вычисления с помощью SCPACK.

$l$	$c(D_1)$	$c(D_2)$	$\frac{c(D_2)}{c(D_1)} - 2$
0,4	0,4148486615	0,8296973231	$5,06 \times 10^{-10}$
0,35	0,3645440784	0,7290881302	$-0,729 \times 10^{-8}$
0,3	0,2936817197	0,6282059311	0,139070
0,25	0,2453633693	0,5268922096	0,147395
0,2	0,1968842981	0,4248838133	0,158038
0,15	0,1481818216	0,3217583553	0,171375

Таблица 3.2: Результаты вычисления с помощью численно-аналитического метода.

$l$	$c(D_1)$	$c(D_2)$	$\frac{c(D_2)}{c(D_1)} - 2$
0,4	0,4148486621	0,8296973242	$1,52 \times 10^{-10}$
0,35	0,364544065	0,7290881310	$2,34 \times 10^{-9}$
0,3	0,3141029547	0,6282059317	$7 \times 10^{-9}$
0,25	0,2634460886	0,5268922094	$1,22 \times 10^{-8}$
0,2	0,2124419008	0,4248838139	$5,81 \times 10^{-8}$
0,15	0,1608790191	0,3217584678	$2,67 \times 10^{-6}$

Результаты говорят о предпочтительности использования численно-аналитического метода к задаче построения сетки в рассмотренных многоугольниках.

## 3.2 Вычисление гармонических векторных полей

Результат переноса гармонической функции с помощью конформного отображения сам будет гармонической функцией. В связи с этим численные методы конформных отображений применяются в двумерных задачах гидродинамики идеальной жидкости [46], аэродинамики дозвуковых скоростей [42], теории фильтрации [77], теории теплопроводности и теории электромагнитно-

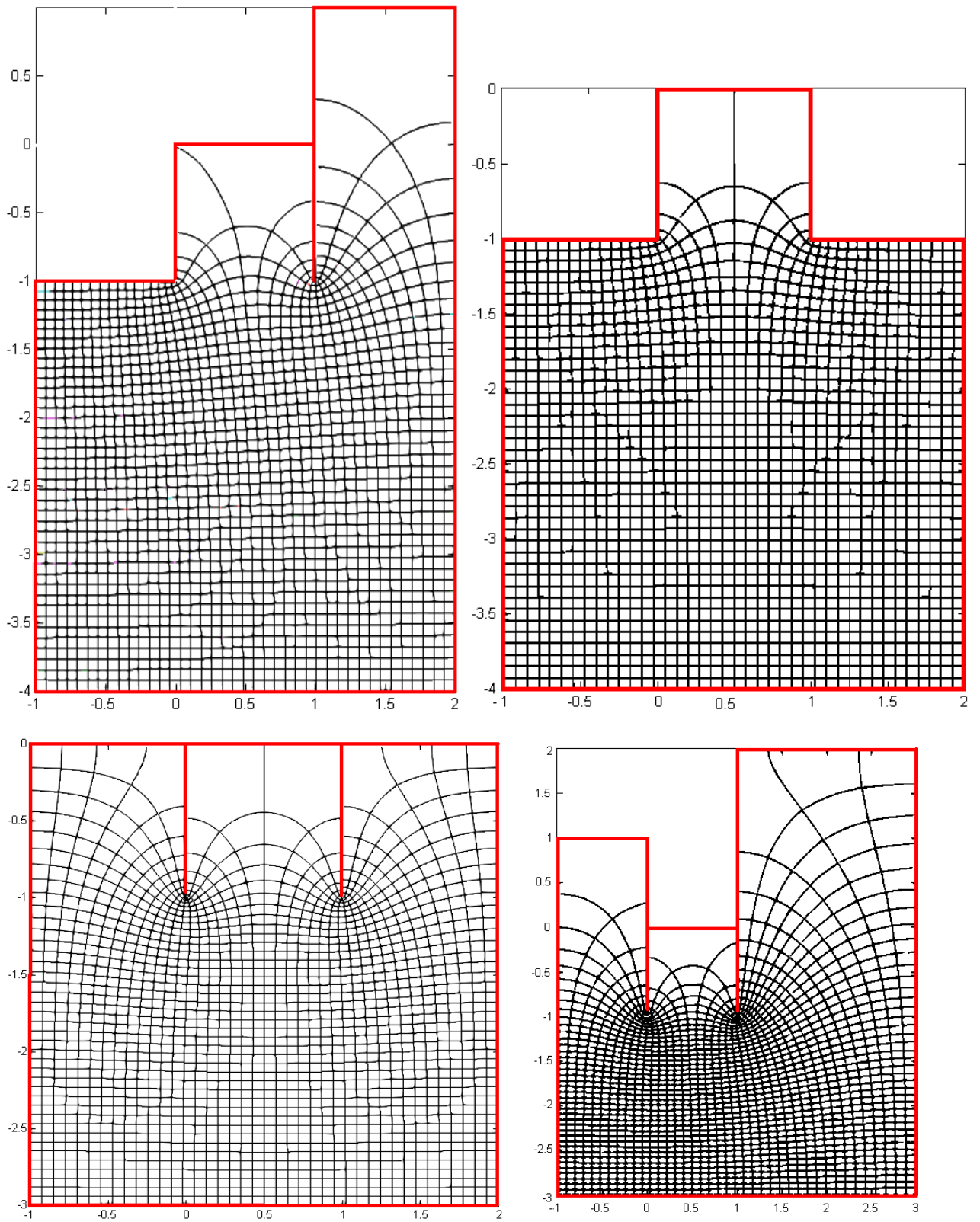


Рисунок 3.2: Примеры расчета ортогональных сеток в финитных прямоугольных многоугольниках. Образы равномерных сеток  $40 \times 40$  в квадрате.

го поля [7], где одной из основных областей их приложения является расчет плоских гармонических векторных полей.

**Функция Грина задачи Дирихле.** Существует связь функции Грина в некоторой односвязной области  $\Omega$ , ограниченной жордановой кривой, и конформного отображения  $\Omega$  на внутренность единичного круга  $\mathbb{D}$ . Справедлива следующая

**Теорема 3.1.** [63] Пусть  $w$  - взаимно-однозначное конформное отображение из области  $\Omega$  в  $\mathbb{D}$ . Тогда функция Грина  $G_{\Omega}(z, \xi)$  равна  $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z)-w(\xi)}{1-\overline{w(z)}w(\xi)} \right|$

В подавляющем большинстве случаев удобнее находить функцию Грина области по ее конформному отображению на  $\mathbb{D}$ , а не наоборот, и таким образом применять численные методы конформных отображений к решению уравнений в частных производных. Тем не менее, в случае удлиненных областей или областей с «заливами» и «перетяжками» для решения задачи Дирихле можно воспользоваться методами декомпозиции области и таким образом избежать потери точности в результате сгущивания. [36]

**Гармонические векторные поля. Комплексный потенциал** Пусть  $A = (P(x, y), Q(x, y), 0)$  - плоское векторное поле, определенное в цилиндре  $\Omega \times \mathbb{R}$ , где  $\Omega$  – двумерная односвязная область. Оно называется потенциальным, если  $\text{rot}A = 0$ , соленоидальным, если  $\text{div}A = 0$ , и гармоническим, если оба условия выполняются. Для плоского векторного поля эти условия означают

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

т.е. условия Коши-Римана для функции  $F(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$ , где  $z = x + iy$ . Первообразная функции  $F(z)$  называется *комплексным потенциалом* (обозначается  $G(z)$ ), а ее действительная и мнимая части  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  - соответственно *скалярным потенциалом* и *функцией тока*.

**Расчет гармонических векторных полей.** Силовой линией (или интегральной кривой) векторного поля  $A$  будем называть кривую, которой в любой

точке касается  $A$ . Эквипотенциали - ортогональное к силовым линиям семейство. Несложно показать, что для гармонического поля  $A$  на эквипотенциалах  $\Re G = const$ , а на силовых линиях  $\Im G = const$ , где  $G$  - комплексный потенциал. Построение такой сети будем называть *визуализацией поля*. [58]

Обычно требуется рассчитать поле, заданное значением потенциала на  $\partial\Omega_1$   $U(x, y)|_{(x,y) \in \partial D_1} = u_0(x, y)$ , т.е. решить задачу Дирихле в области  $\Omega_1$ . Здесь следующим образом применяются конформные отображения. Пусть  $\Omega_2$  - другая односвязная область, в которой проще решить задачу Дирихле (например, единичный круг). Вычисляем конформное отображение  $\phi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$  и обратное к нему. Затем находим комплексный потенциал  $G$ , соответствующий скалярному потенциалу в  $\Omega_2$ , значение которого на границе равно  $u_0(\phi(x, y))$ , и строим сеть, узлы которой получены пересечением линий уровня действительной и мнимой частей  $G$ . Затем отображаем ее обратно.

Примеры расчетов линий тока для гармонических в многоугольнике полей с кусочно-постоянными условиями на его границе для изображены на рис. 3.3, 3.5.

На рис. 3.5 изображены линии уровня функции  $\psi(z)$ , являющейся решением задачи Дирихле в 7-угольнике с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 0, z \in [-i; 0] \cup [0; 4] \cup [4; 4 - 2i] \cup [4 - 2i; +\infty - 2i] \\ \psi(z) &= 1, z \in [-2i; -i], \\ \psi(z) &= 2, z \in [-3i; -2i], \\ \psi(z) &= 3, z \in [-4i; -3i], \\ \psi(z) &= 4, z \in [-5i; -4i], \\ \psi(z) &= 5, z \in [-6i; -5i] \cup [-6i; 2 - 6i] \cup [2 - 6i; 2 - 4i] \cup [2 - 4i; +\infty - 4i]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Значения  $\psi(z)$  на  $i$ -й линии уровня, считая от "верхней" границы многоугольника, равно  $\frac{i}{5}$ . Физический смысл линий, на которых  $\psi(z)$  принимает дробное значение (обозначены синим) – линии тока при истечении идеальной жидкости из источников одинаковой мощности, расположенных в точках

$-i, -2i, -3i, -4i, -5i$ . Линии, на которых  $\psi(z)$  принимает целое значение (обозначены красным) соответствуют линиям отрыва струи при таком течении.

На рис. 3.3 изображены линии уровня гармонической в одиннадцатиугольнике функции  $\phi(z)$  (значения  $\phi(z)$  на  $i$ -й снизу линии равно  $\frac{i}{31}$ ), обращаемой в 0 на части границы, окрашенной красным, и в 1 – на части, окрашенной зелёным. Они получены как образы линий уровня гармонической в  $\mathbb{H}$  функции  $\varphi(w) = \frac{1}{\pi} \ln w$ , при конформном отображении, переводящем 0 и  $\infty$  в бесконечно удаленные вершины.

Расчеты выполнены с помощью программной реализации изложенного в главе 1 алгоритма конформного отображения в среде GNU Octave.

**Дизайн областей и потоков.** Пусть рассматривается следующая задача: при течении идеальной жидкости в области, имеющей форму многоугольника, представленного на рис. 1.6, необходимо таким образом изменить ширину канала  $h_b$  (при условии, что все прочие размеры многоугольника и мощности источников остаются фиксированными), чтобы отрыв струи происходил в точке  $w_6$ .

Переведем эту задачу на язык теории потенциала. Рассмотрим гармонический в  $\mathbb{H}$  потенциал  $\phi(z) = \ln(z - 1) + m \ln z$ ,  $m > 0$ . Ему соответствует течение с источниками мощностью 1 и  $m$  в точках 1 и 0, соответственно, и стоком в точке  $\infty$ . Линия отрыва струи (т.е. кривая, на которой скорость жидкости обращается в 0), пересекает действительную ось в точке  $x_0 = \frac{1}{1+m}$ . Чтобы удовлетворить требованиям задачи, необходимо перенести потенциал конформным отображением, нормированным так, как описано в разделе 1.3. Условие попадания точки отрыва струи в  $w_6$  обозначает

$$x(\mathbf{u}_6) = \frac{1}{1+m}, \quad (3.4)$$

где  $x(u)$  – гиперэллиптическая проекция (1.26), а  $\mathbf{u}_6$  – образ  $w_6$  в якобиане.



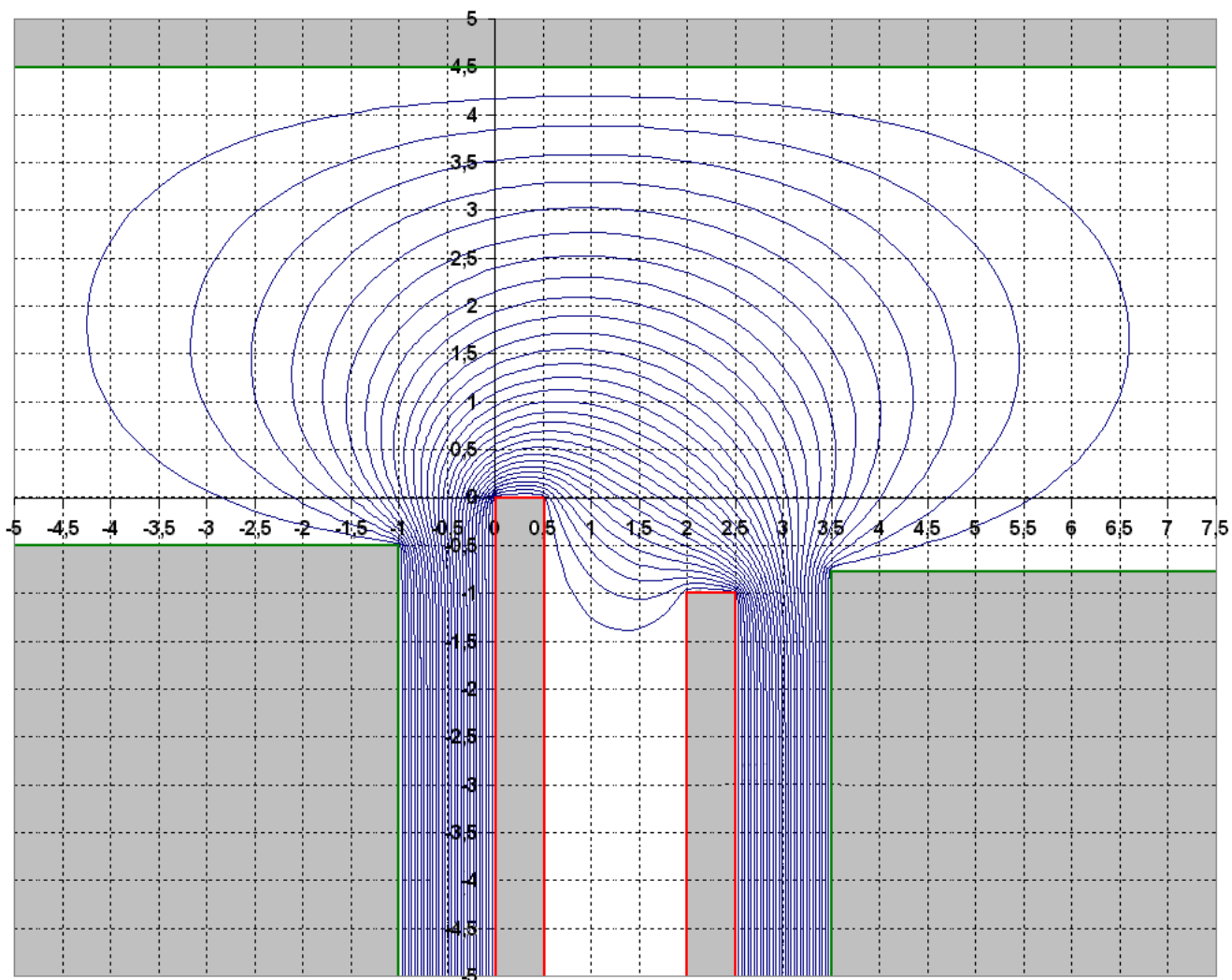


Рисунок 3.3: Течение идеальной жидкости в прямоугольном одиннадцатиугольнике.

Добавив уравнение (3.4) к системе (1.28), и считая  $h_b$  переменной величиной, получим систему уравнений, из которой находится ширина канала области и вспомогательные параметры решения задачи Римана для нее.

На рис. 3.4 показано решение задачи дизайна области для  $m=2$ .

Также можно оставить все параметры многоугольника фиксированными, а изменять мощности источников с тем, чтобы некоторая точка попала на линию отрыва струи.



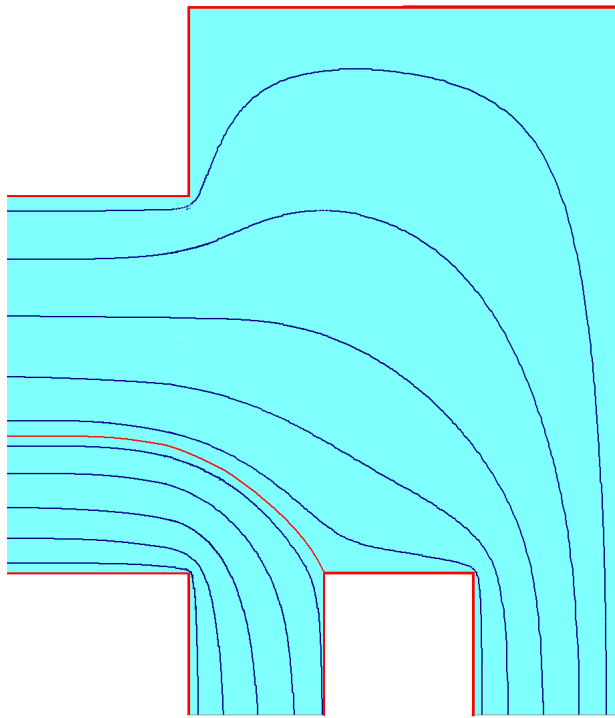


Рисунок 3.4: Дизайн области.

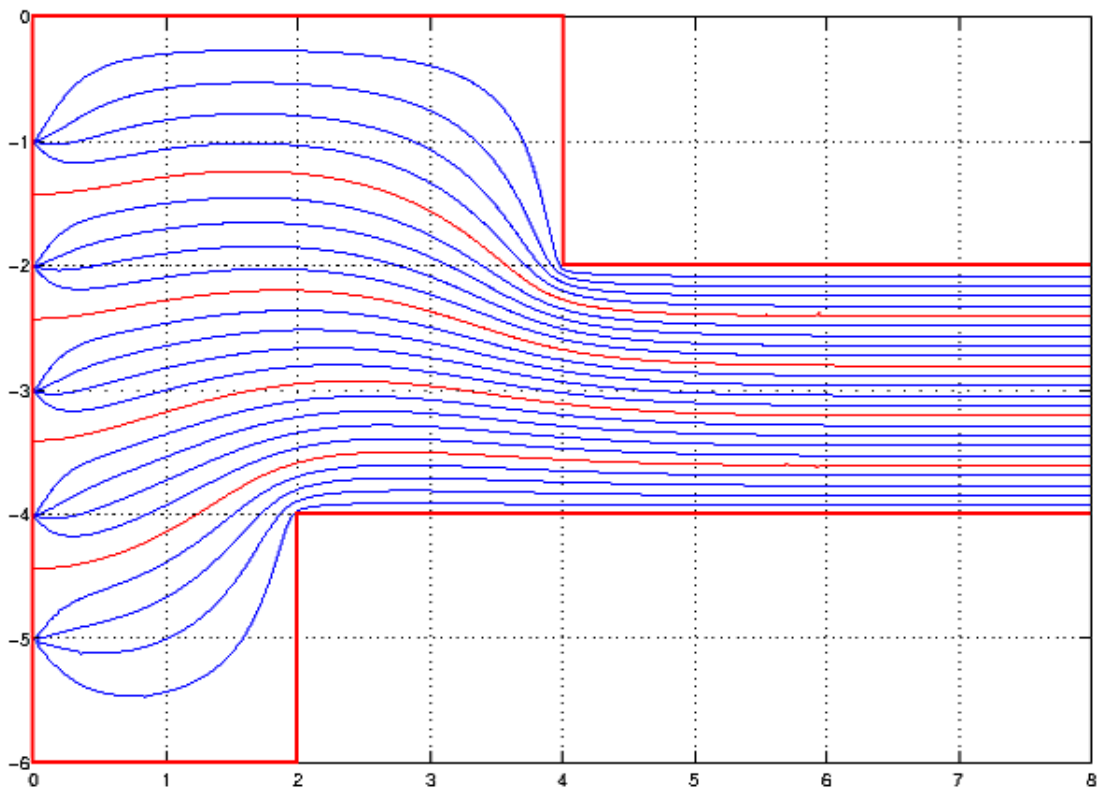


Рисунок 3.5: Область с пятью источниками и одним стоком.

**Гармонические векторные поля в математической физике.** Потребность построения векторного поля возникает в следующих задачах математической физики.

- **Гидродинамика.** При движении несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности следует, что поле скоростей удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Если течение потенциально, то  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$  - поле скоростей гармоническое. Плоское гармоническое поле возникает, к примеру, при потенциальном обтекании неподвижного цилиндра или движении в канале постоянной глубины. Поле скоростей на поверхности удовлетворяет условию  $v_n = 0$ .
- **Теория фильтрация, теория теплопроводности.** Скорость движения жидкости в пористой среде описывается законом Дарси  $\vec{v} = -D \nabla p$ , где  $p$  - давление, а  $D$  - константа, характеризующая пористую среду, т.е. поле скоростей потенциально. Если пористая среда и жидкость несжимаемы, то оно и соленоидально.

Похожие задачи возникают и при решении любого уравнения переноса, например, для уравнения теплопроводности  $\vec{q} = -\lambda \nabla T$ , где  $T$  - температура,  $q$  - вектор плотности потока тепла, а  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности. В случае, если в среде нет объемных источников тепла, поле  $q$  соленоидально, и следовательно, является гармоническим. Типичным примером является задача о распространении тепла от некоторой трансляционно-симметричной пластинки, распределение источников тепла на которой известно.

- **электро- и магнитоэстатика** Здесь уравнение Лапласа возникает как следствие уравнений Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} E = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{div} H = 0, \\ \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J; \end{array} \right.$$

В случае однородной среды, в которой присутствуют лишь точечные заряды, для стационарных задач с трансляционной симметрией электрическое и магнитное поля являются гармоническими с особенностями.

Примером плоского электрического поля является создаваемое бесконечным заряженным проводящим цилиндром произвольного сечения. Поле тока, текущего вдоль такого же цилиндра, дает пример плоского магнитного поля.

Решению магнитостатической задачи посвящена работа [7], развитием которой является метод, изложенный в диссертации.

### 3.3 Численные эксперименты по сравнению с Ani2D

Возможность решать задачу Дирихле в многоугольных областях с кусочно-постоянными граничными условиями с помощью описанного в диссертационной работе метода позволяет использовать его для тестирования других известных пакетов для решения этой задачи.

В этом разделе изложены результаты совместной с С.Ю. Лямаевым работы по тестированию решений, полученных с помощью Ani2D (Advanced Numerical Instruments). В этом пакете, написанном Ю.В. Василевским, В.Н. Чугуновым, А.А. Даниловым и К.Н. Липниковым, реализован конечно-элементный метод решения граничных задач для эллиптических уравнений.

Конечно-элементные функции строятся на адаптивной неструктурированной сетке. Есть возможность многоуровневого локального измельчения и разгрубления сетки, что позволяет достигать более точного решения в «проблемных» частях области. [78]

Эксперимент ставился следующим образом. С помощью пакета Ani2D находилась неструктурированная сетка для решения задачи Дирихле с постоянными граничными условиями в многоугольнике, показанном на рис. 1.6:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0, \quad \phi(w) = -1, \quad w \in [w_c, w_6] \cup [w_6, w_a], \\ \phi(w) &= 0, \quad w \in [w_b, w_4] \cup [w_4, w_5] \cup [w_5, w_c], \\ \phi(w) &= 1, \quad w \in [w_a, w_1] \cup [w_1, w_2] \cup [w_2, w_3] \cup [w_3, w_b]\end{aligned}\tag{3.5}$$

Сетки, построенные в Ani2D, представлены на рисунке 3.6.

В первом многоугольнике треугольная сетка была выбрана измельченной к сужению между вершинами  $w_8$  и  $w_1$  и содержала около 7500 узлов.

В случае второго многоугольника была выбрана близкая к равномерной триангуляция, содержащая порядка 10000 узлов.

Затем с помощью алгоритма из главы 1 вычислялось значение конформного отображения  $z(w)$  многоугольника на верхнюю полуплоскость в узлах сетки.

Функция  $\phi(z(w)) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z(w)-z_a}{z(w)-z_b} \right|$ , где  $z_a, z_b$  — прообразы соответствующих выходов на бесконечность, является решением задачи Дирихле в многоугольнике. Она сравнивалась с приближенным решением, предоставляемым Ani2D.

На рис. 3.7 показано поле разности между конечно-элементным и численно-аналитическим решениями. Видно, что наибольших значений разность достигает вблизи особенностей решения.

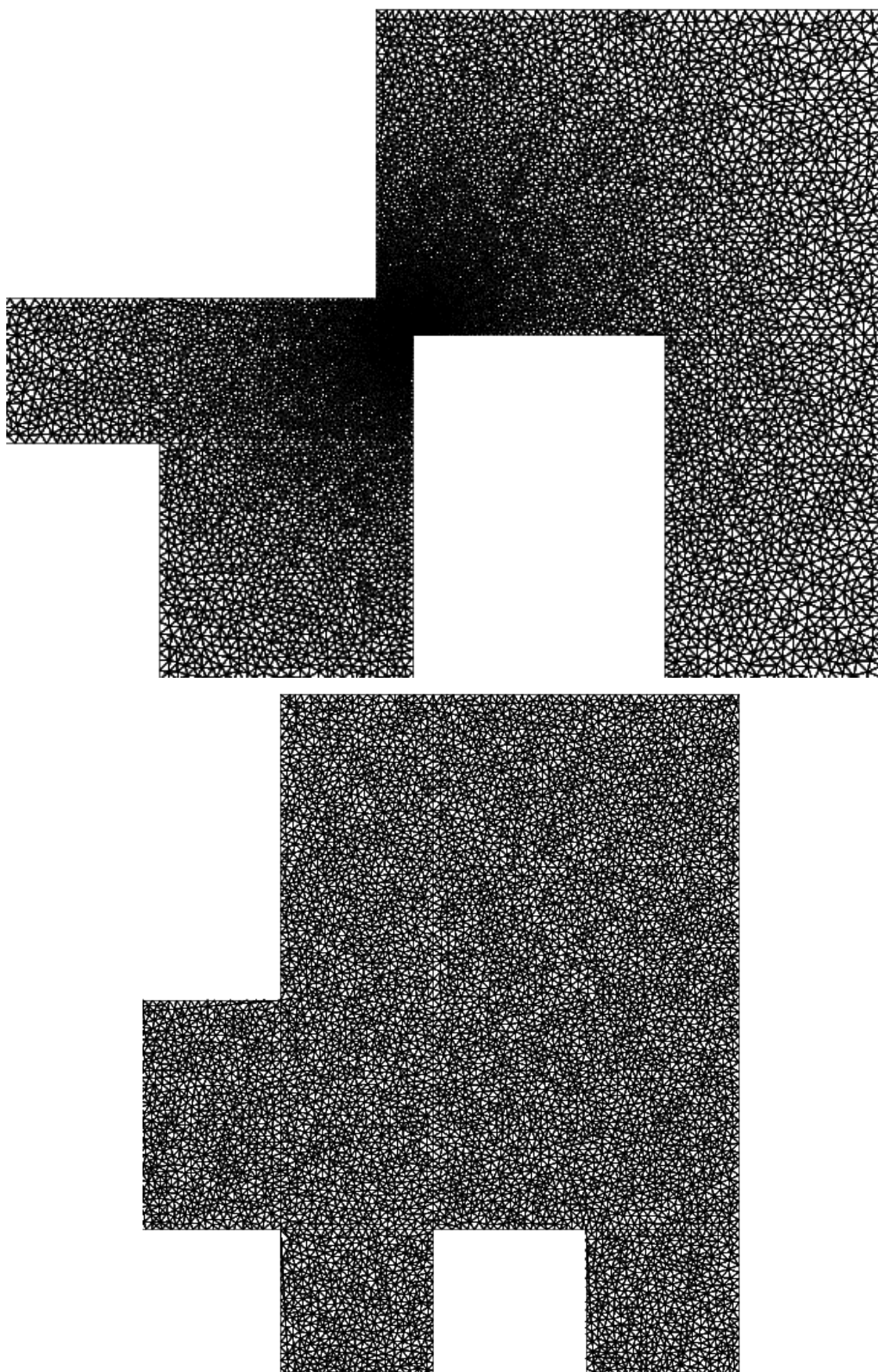


Рисунок 3.6: Сетки в многоугольных областях

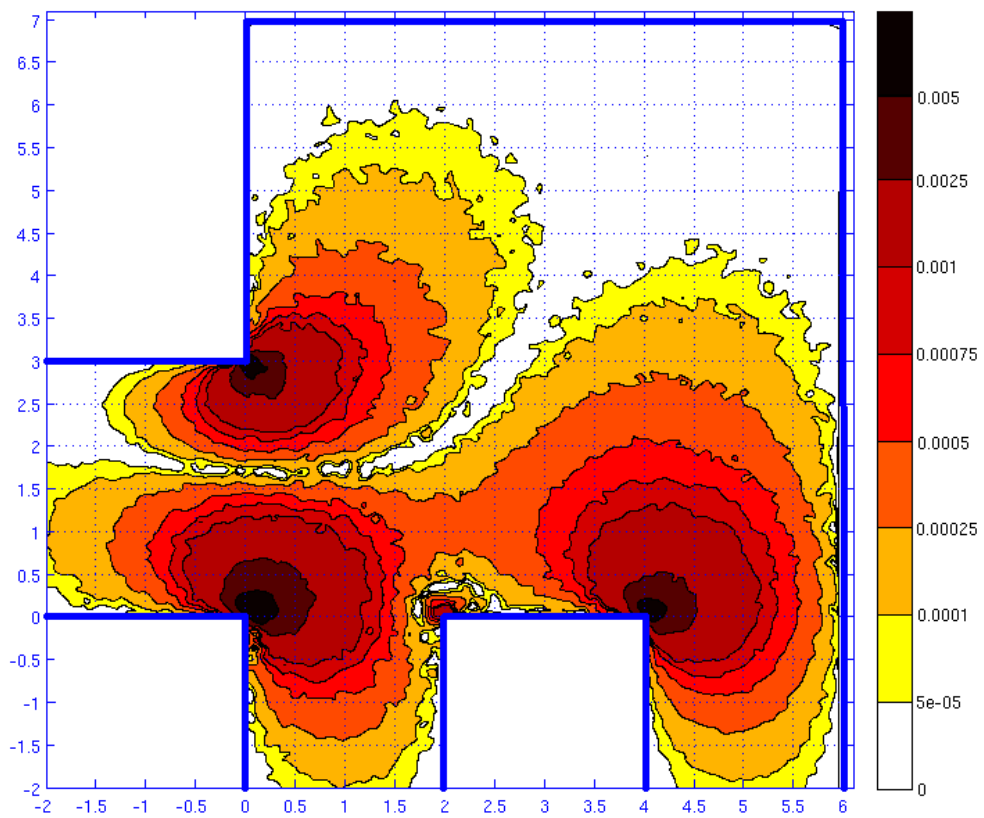
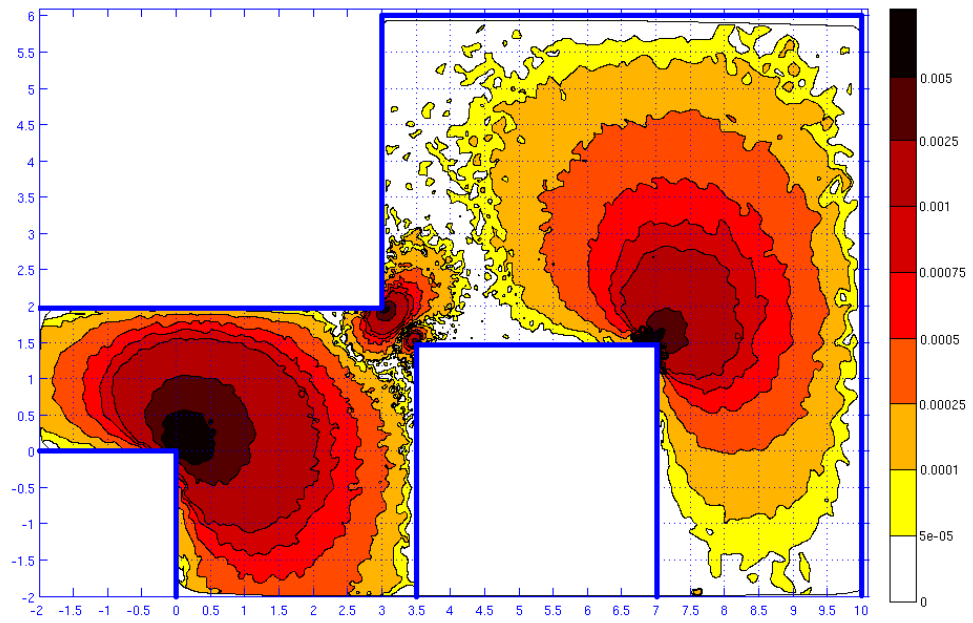


Рисунок 3.7: Поле ошибок

### 3.4 Исследование устойчивости течений

В этом параграфе изложены результаты совместной с Н.В. Ключневым работы [71].

Исследование с помощью технологии, описанной в [52, 53, 64], влияния продольного волнистого оребрения [51] на устойчивость течения Пуазейля в канале постоянного сечения (будем называть это течение основным) сводится к решению двух двумерных задач. Эти задачи – уравнение Пуассона для вычисления профиля основного течения и частичные проблемы собственных значений для расчета кривых нейтральной устойчивости. При этом для построения расчетной сетки используется отображение Гордона-Холла [24]. Наряду с волнистым оребрением интерес представляет также гребенчатое оребрение, имеющее вид бесконечно тонких продольных пластин. Однако такое оребрение не может быть задано функцией от координат, и, следовательно, для него неприменимо отображение Гордона-Холла. Было предложено применить численно-аналитический метод конформного отображения для автоматического построения расчетной сетки в случае гребенчатого оребрения.

Идея использования конформной сетки не является новой - этот подход к решению гидродинамических задач методом коллокаций был развит в [18] для непериодических и в [19] для периодических каналов, причем в последнем случае задача построения конформной сетки сводится к построению конформного отображения прямоугольника на период канала.

**Описание задач.** Пусть в бесконечном в продольном и поперечном направлениях канале с гребенчатым оребрением нижней стенки задано стационарное течение Пуазейля. Поперечное сечение такого канала представляет собой периодическую область, элементарной ячейкой которой является многоугольник, изображенный слева на рис. 3.1. Обозначим через  $x$ ,  $y$  и  $z$  продольное, вертикальное и поперечное направления, соответственно. Среднюю скорость основного течения положим равной 1.

Для вычисления профиля основного течения  $U = U(y, z)$  нужно решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -1 \quad (3.6)$$

с нулевыми граничными условиями на верхней и нижней границах периода поперечного сечения канала и  $2l$ -периодичностью по  $z$ , и нормировать полученное решение на его среднее значение.

В работе [53] показано, что расчет кривых нейтральной устойчивости для течения Пуазейля в орребренном канале сводится к решению частных проблем собственных значений следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda u &= -i\alpha U u - \frac{\partial U}{\partial y} v - \frac{\partial U}{\partial z} w - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - i\alpha p, \\ \lambda v &= -i\alpha U v - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 v - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \lambda w &= -i\alpha U w - \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}, \\ i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

рассматриваемых в элементарной ячейке с нулевыми граничными условиями на верхней и нижней границах и  $2l$ -периодичностью по  $z$ . Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $p$  – компоненты скорости и давление, соответственно,  $\alpha \geq 0$  – продольное волновое число, а через  $\text{Re}$  обозначено число Рейнольдса основного течения. Для фиксированного параметра  $\alpha$  будем обозначать через  $\text{Re}_L(\alpha)$  такое минимальное число Рейнольдса  $\text{Re}$ , при котором проблема собственных значений (3.7) имеет чисто мнимые решения. Кривой нейтральной устойчивости называют построенную в плоскости  $(\alpha, \text{Re})$  зависимость  $\text{Re}_L(\alpha)$ .

Уравнение (3.6) и проблему собственных значений (3.7) аппроксимируем методом Галеркина-коллокаций, который состоит в аппроксимации слабой постановки методом коллокаций. Для построения сетки в расчетной области используем образ сетки, построенной в квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , при отображе-



ние Гордона-Холла в случае волнистого оребрения, а в случае гребенчатого – при конформном отображении.

**Численные эксперименты.** Приведены результаты расчетов основного течения и кривых нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением при  $2l = 1$  и  $\varepsilon = 0.4$  (см. раздел 2), а также для каналов с волнистым оребрением. Расчеты были проведены Н.В. Ключневым на кластерах "МВС100к" (МСЦ РАН) и "Ломоносов" (МГУ) с помощью технологии [53,64].

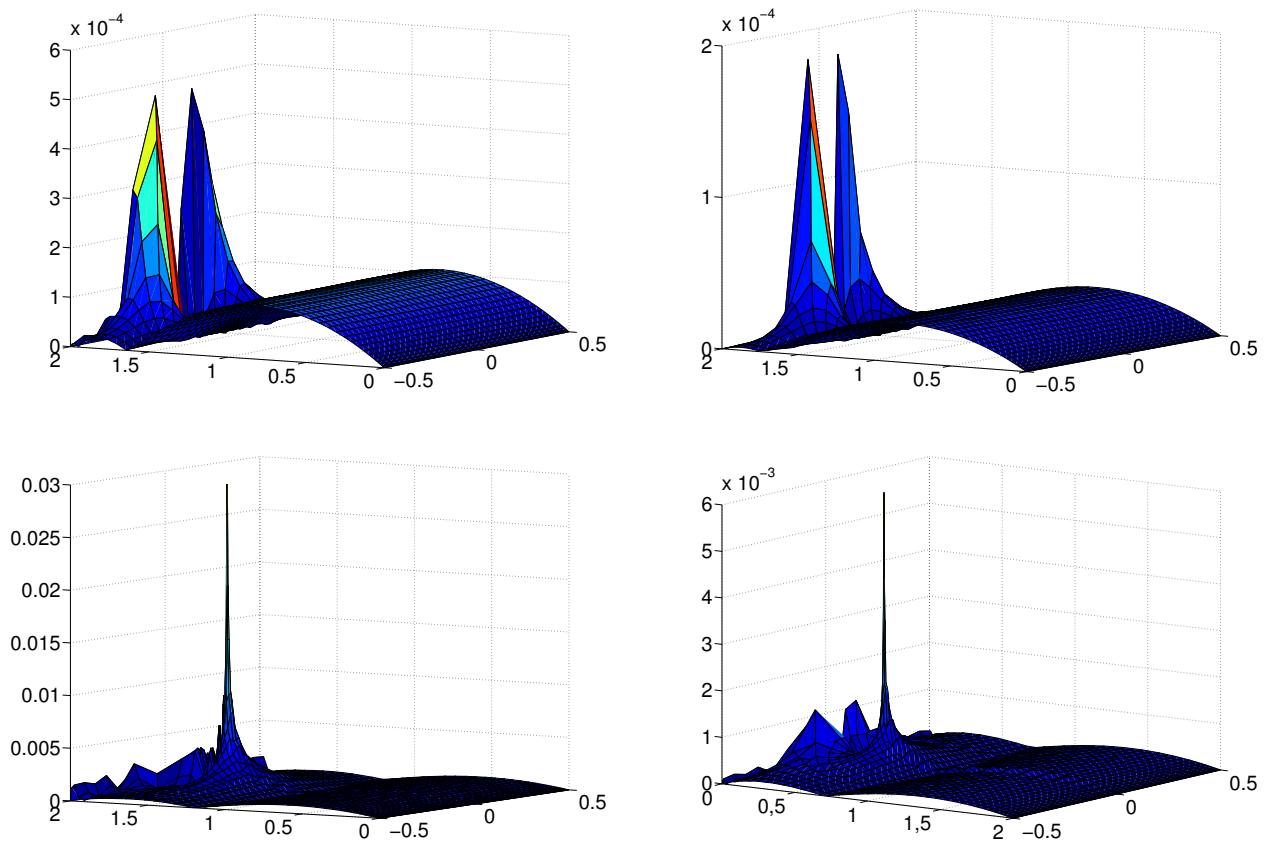


Рисунок 3.8:  $|U_{35 \times 40} - U_{105 \times 40}|$  и  $|U_{105 \times 40} - U_{315 \times 40}|$ , рассчитанные с использованием аналитического вычисления производных отображения (сверху слева и сверху справа, соответственно), и те же результаты, полученные при вычислении производных методом коллокаций (снизу слева и снизу справа, соответственно).

Обозначим через  $n$  и  $m$  числа узлов расчетной сетки по вертикали и горизонтали, соответственно. Через  $U_{n \times m}$  обозначим профиль основного течения, рассчитанный для гребенчатого оребрения на сетке размера  $n \times m$ .

В технологии [53] производные отображения, используемого для построения расчетной сетки, находятся численно методом коллокаций. В случае конформного отображения эти производные можно вычислить аналитически. На рис. 3.8 сверху слева и сверху справа изображены, соответственно,  $|U_{35 \times 40} - U_{105 \times 40}|$  и  $|U_{105 \times 40} - U_{315 \times 40}|$ , рассчитанные с использованием аналитического вычисления производных отображения. Снизу слева и снизу справа на этом рисунке изображены те же результаты, полученные при вычислении производных методом коллокаций. Видно, что при использовании аналитического вычисления производных сходимость решений по шагу сетки лучше на порядок.

На рис. 3.9 представлены кривые нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением ( $2l = 1$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ), рассчитанные на сетках размеров  $n \times m = 14 \times 13$  (синяя кривая),  $27 \times 23$  (черная) и  $54 \times 45$  (красная). Видна хорошая сходимость по шагу сетки, особенно в области больших  $\alpha$ , что позволяет вычислять глобальное критическое число Рейнольдса с хорошей точностью.

Кривую нейтральной устойчивости для канала с гребенчатым оребрением можно получить предельным переходом при  $\gamma \rightarrow \infty$ , рассматривая каналы с волнистым оребрением, профиль нижней стенки которых задается функцией

$$y(z) = 1 - \varepsilon \left( \left| \cos \frac{\pi z}{2l} \right|^\gamma - h_\gamma \right), \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon$  такое же, как для гребенчатого оребрения, а  $h_\gamma$  выбирается так, чтобы обеспечить единичную полувысоту канала. На рис. 3.10 изображены зависимости  $\text{Re}_L(\alpha)$  для волнистого оребрения с  $\gamma = 2$  (синяя кривая), 6 (зеленая), 10 (черная), а также зависимость  $\text{Re}_L(\alpha)$  для гребенчатого оребрения (красная кривая). Видно, что кривые нейтральной устойчивости для волнистого

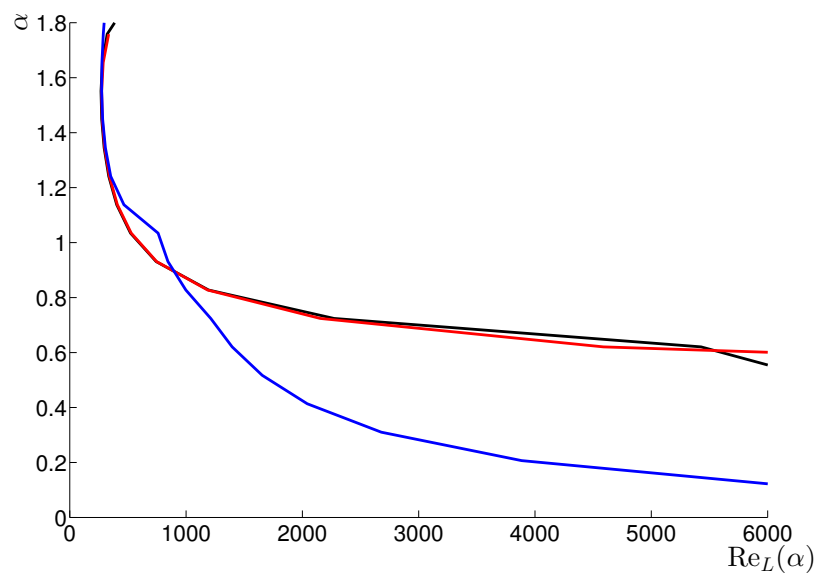


Рисунок 3.9: Зависимость  $Re_L(\alpha)$ , вычисленная на сетках размеров  $n \times m = 14 \times 13$  (синяя кривая),  $27 \times 23$  (черная) и  $54 \times 45$  (красная).

оробрения с ростом  $\gamma$  приближаются к кривой нейтральной устойчивости для гребенчатого оробрения.

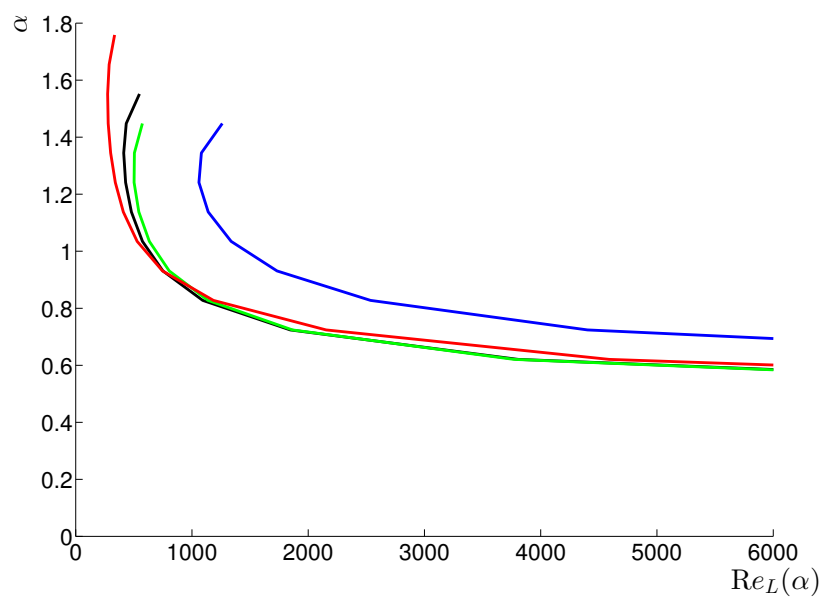


Рисунок 3.10: Зависимость  $Re_L(\alpha)$  для канала с гребенчатым оребрением (красная кривая) и для канала с волнистым оребрением при  $\gamma = 2$  (синяя кривая), 6 (зеленая) и 10 (черная).

# Заключение

В данной диссертации был рассмотрен численно-аналитический метод решения задачи Римана для прямоугольных многоугольников. Был предложен способ разрешения вычислительных трудностей, связанных с явлением скупивания. Приведены результаты сравнения работы программной реализации метода с пакетами SCPACK и ani2d.

Среди приложений метода рассмотрена задача построения сетки в канале с гребёнчатым оребрением, возникающая при изучении устойчивости течений, и задача вычисления гармонических функций в областях многоугольной формы.

Среди перспектив развития метода можно выделить следующие:

- реализовать предложенную во введении идею получения «затравочного» приближения к решению задачи Римана, используя многоугольную область, близкую к данной;
- дальнейшая апробация метода в решении прикладных задач – в частности, нахождения ёмкости конденсаторов специальной формы [41];
- строгое обоснование метода и его программная реализация для многоугольников с числом прямых углов, большим 8;
- обобщение метода на многоугольники с внутренним ветвлением;
- использование описанной технологии для вычисления абелевых интегралов, возникающих в задачах, не требующих поиска конформных отображений.

ражений (в частности, в задачах ОТО [16] или поиска струнных амплитуд [8]).

# Литература

1. Baker H.F. Abelian Functions: Abel's Theorem and the Allied Theory, Including the Theory of the Theta Functions. New York, Cambridge University Press, 1995.
2. Banjai L. Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz-Christoffel mapping. // SIAM J. Sci. Comput. 2008. Vol. 30. P. 618–636.
3. Banjai L., Trefethen L. A multipole method for Schwarz-Christoffel mapping of polygons with thousands of sides. // SIAM J. Sci. Comput. 2003. Vol. 25. P. 1042–1065.
4. Bertola M. Riemann surfaces and theta functions. Quebec, Concordia University Press, 2006.
5. Bieberbach L. Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung // Rendiconti dei Circ. Mat. di Palermo. 1914. Vol. 38. P. 98–112.
6. Bogatyrev A. Analytic method for computation of magnetic field in complex domain. // II International conference on matrix methods and operator equations. Book of Abstracts. 2007.
7. Bogatyrev A., Hassner M., Yarmolich D. An exact-analytical expression for the read sensor signal in magnetic data storage channels // Contemporary Mathematics. 2010. Vol. 528. P. 155–160.

8. D. Dalmazi M.C.B. Abdalla E. A. On the amplitudes for non-critical  $N=2$  superstrings. // *Phys. Let. B.* 1992. Vol. 291. P. 32–38.
9. Deconinck B., Heil M., Bobenko A. et al. Computing Riemann theta functions // *Math. Comput.* 2004. Vol. 73. p. 1417–1442.
10. DeLillo T. The accuracy of numerical conformal mapping methods: a survey of examples and results. // *SIAM J. Numer. Anal.* 1994. Vol. 31. P. 788–812.
11. DeLillo T., Pfaltzgraff J. Extremal distance, harmonic measure and numerical conformal mapping // *J. Comp. and Appl. Math.* 1993. Vol. 46. P. 103–113.
12. Driscoll T. Review of *Computational Conformal Mapping* by Prem K. Kythe // *SIAM Review.* 1999. Vol. 41. P. 832–834.
13. Driscoll T., Trefethen L. Schwarz-Christoffel mapping. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
14. Driscoll T., Vavasis S. Numerical conformal mapping using cross-ratios and Delaunay triangulation // *SIAM J. Sci. Comput.* 1998. Vol. 19. P. 1783–1803.
15. Dubiner M. Theoretical and numerical analysis of conformal mapping. Ph.D. thesis: MIT, Department of Mathematics. Cambridge, MA, 1981.
16. Enolski V., Hackmann E., Kagramanova V. et al. Inversion of hyperelliptic integrals of arbitrary genus with application to particle motion in general relativity // *Journal of geometry and physics.* 2011. Vol. 61. P. 899–921.
17. Farkas H., Kra I. Riemann surfaces. Heidelberg – Berlin, Springer Verlag, 1980.
18. Floryan J. Conformal-mapping-based coordinate generation method for channel flows // *Journal of Computational Physics.* 1985. Vol. 58. P. 229–245.



19. Floryan J. Conformal-mapping-based coordinate generation method for flows in periodic Configuration // *Journal of Computational Physics*. 1986. Vol. 62. P. 221–247.
20. Fornberg B. A numerical method for conformal mappings // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1980. Vol. 1. P. 386–400.
21. Gaier D. Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden. // *Numer. Math.* 1972. Vol. 19. P. 145–148.
22. Gaier D., Haymann W. Moduli of long quadrilaterals and thick ring domains. // *Rend. Mat. Appl.* 1990. Vol. 10. P. 809–834.
23. Gipson G. *Boundary elements fundamentals: Basic concepts and recent development in the Poisson equation*. Southampton: Computational Mechanics Publishers, 1987.
24. Gordon W., Hall C. Construction of curvilinear coordinate system and their applications to mesh generation. // *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 1973. Vol. 7. P. 461–477.
25. Grassmann E. Numerical experiments with a method of successive approximation for conformal mapping // *Z. angew. Math. Phys.* 1979. Vol. 30. P. 873–884.
26. Henrici P. *Applied and computational complex analysis*. London: John Wiley and Sons, 1986.
27. Ives R., Zacharias R. Conformal mapping and orthogonal grid generation. // *J. Propulsion*. 1989. Vol. 5. P. 327–333.
28. Julia G. Sur une suite double de polynomes liée à la représentation conforme des airs planes simplement connexes // *J. Liouville*. 1928. Vol. 7. P. 381–407.
29. Kerzman N., Trummer M. Numerical conformal mapping via the Szegő kernel // *J. Comp. Appl. Math.* 1986. Vol. 14. P. 111–123.

30. Köbe P. Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. // Göttinger Nachrichten. 1907. Vol. 1. P. 191–210.
31. Kythe P. Computational conformal mapping. Boston: Birkhauser, 1998.
32. Lebowitz A. A remark on degeneration of a compact Riemann surface of genus 2 // Israel J. Math. 1974. Vol. 18. P. 349–351.
33. Lebowitz A. Some degenerations of a compact Riemann surface of genus 4 // Bulletin of the AMS. 1975. Vol. 81. P. 495–499.
34. Nummelin M. Solving Schwarz-Christoffel parameter problem by osculation algorithm // Helsinki Analysis seminar. 2007.
35. O’Donnell S., Rokhlin V. A fast algorithm for the numerical evaluation of conformal mappings // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1989. Vol. 10. P. 475–487.
36. Papamichael N., Stylianopoulos N. Numerical conformal mapping. Domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. Singapore: World Scientific, 2010.
37. Poor C. Schottky’s form and the hyperelliptic locus // Proceedings of the AMS. 1996. Vol. 124. P. 1987–1991.
38. Porter R. History and recent development in techniques for numerical conformal mapping // Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal mappings and their applications. (IWQCMA05). 2005.
39. Riemann B. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen complexen Grösse, Inaugural-dissertation. Göttingen, 1851 // Gesammelte Mathematische Werke. Springer-Verlag, Berlin, 1990. P. 3–48.
40. Riera G., Carrasco H., Preiss R. The Schwarz-Christoffel conformal mapping for “polygons” with infinitely many sides // Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales. 2005. Vol. 36. P. 1–24.

41. Sebbar A., Falliero T. Capacité d'une union de trois intervalles et fonctions thêta de genre 2 // J. Math. Pures Appl. 2001. Vol. 18. P. 409–443.
42. Skulsky R. A conformal mapping method to predict low-speed aerodynamic characteristics of arbitrary slender re-entry shapes // J. Spacecraft and Rockets. 1966. Vol. 3. P. 247–253.
43. Symm G. An integral equation method in conformal mapping // Numer. Math. 1966. Vol. 9. P. 250–258.
44. Theodorsen T. Theory of wing sections of arbitrary shape: Tech. Rep.: 411: NACA, 1931.
45. Trefethen L. Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. Vol. 1. P. 82–102.
46. Warnstrath J. Nearshore numerical storm surge and tidal simulation model: Tech. Rep.: 17. Vicksburg, MS: U.S. Army engineer waterways experiment station, 1977.
47. Warschawsky S. On a problem of L. Lichtenstein // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5. P. 835–839.
48. Woods L. Some generalizations of the Schwarz-Christoffel mapping formula // Applied Scientific Research. 1959. Vol. 7. P. 89–101.
49. А.Б. Богатырёв. Экстремальные многочлены и римановы поверхности. М., МЦНМО, 2005.
50. А.Б. Богатырёв. Конформные отображения прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. Т. 203. С. 35–56.
51. А.В. Бойко, Н.В. Ключнев, Ю.М. Нечепуренко. Влияние волнистого орбления на устойчивость сдвиговых течений // Материалы XIII международной школы семинара «Модели и методы аэродинамики». 2013.

52. А.В. Бойко, Ю.М. Нечепуренко. Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. с. 1731–1747.
53. А.В. Бойко, Ю.М. Нечепуренко. Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. С. 1109–1125.
54. А.Г. Асфандияров. Вычисление наилучшего многочлена устойчивости при помощи тэта-функций: Master's thesis: ИВМ РАН. 2007.
55. В. Драгович, М. Раднович. Интегрируемые билиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. Ижевск, РХД, 2010.
56. В. Коппенфельс, Ф. Штальман. Практика конформных отображений (пер. с нем.). М., Издательство иностранной литературы, 1963.
57. В.И. Власов. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М., Вычислительный центр АН СССР, 1987.
58. В.И. Иванов, В.Ю. Попов. Конформные отображения и их приложения. М., Едиториал УРСС, 2002.
59. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1966.
60. Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. М., Мир, 1988.
61. Л.В. Канторович. Эффективные методы в теории конформных отображений // Изв. АН СССР. 1937. Т. 1. С. 79–90.
62. Л.В. Канторович, В.И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Л., Физматгиз, 1962.

63. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.
64. Н.В. Ключнев. Высокопроизводительный анализ устойчивости поперечно-периодических течений жидкости и газа // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. с. 111–120.
65. Н.И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
66. О.А. Григорьев. Построение конформных сеток в прямоугольных многоугольниках // Тихоновская конференция: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 октября - 1 ноября 2013 г.
67. О.А. Григорьев. Численно-аналитический метод генерации ортогональных сеток в прямоугольных многоугольниках // Современные проблемы прикладной математики и информатики (MPAMCS'2014): тезисы докладов международной конференции (Дубна, 25-29 августа 2014 г.).
68. О.А. Григорьев. О методе нахождения параметров интеграла Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников // Труды 55-й научной конференции МФТИ. 2012.
69. О.А. Григорьев. О численно-аналитическом алгоритме конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник с восемью прямыми углами // Труды 56-й научной конференции МФТИ. 2013.
70. О.А. Григорьев. Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. с. 27–36.
71. О.А. Григорьев, Н.В. Ключнев. Применение численно-аналитического метода конформного отображения для построения сетки в орбренном кана-

- ле // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 487–498.
72. П.Н. Вабищевич, С.И. Пулатов. Вычислительные алгоритмы конформного отображения // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. С. 132–139.
73. С.И. Безродных, В.И. Власов. Задача Римана-Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // ЖВМ и МФ. 2002. Т. 42. С. 277–312.
74. С.И. Безродных, В.И. Власов. Сингулярная задача Римана-Гильберта в сложных областях // Spectral and Evolution problems: Proceedings of the 16th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. 2006.
75. С.К. Годунов, Г.П. Прокопов. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7. С. 1031–1059.
76. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. М., Мир, 1982.
77. Э.Н. Береславский, Л.А. Александрова, Е.В. Пестерев. О режиме грунтовых вод при фильтрации под гидротехническими сооружениями // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. С. 27–40.
78. Ю.В. Василевский, А.А. Данилов, К.Н. Липников [i dr.]. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. М., Физматлит, 2013.