На правах рукописи

Корнев Андрей Алексеевич

Глобальный численный анализ полудинамических систем седлового типа

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика
01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в
Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова и
Институте вычислительной математики Российской Академии Наук

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Агошков В.И.
доктор физико-математических наук,
доцент Даутов Р.З.
доктор физико-математических наук,
профессор Сатаев Е.А.

Ведущая организация: Вычислительный центр РАН
им. А.А. Дородницына.

Защита состоится "27" апреля 2006г. в 15.00 часов
на заседании диссертационного совета Д 002.45.01 в Институте
вычислительной математики РАН по адресу: 119991, г. Москва,
ГСП-1, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан 27.03. 2006г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Г.А. Бочаров

Актуальность темы. Глобальное численное исследование нелинейного нестационарного процесса (полудинамической системы, ПДС) предполагает изучение эволюции системы с конкретными начальными условиями (и близкими к ним), а также описание качественного поведения системы для некоторого достаточно широкого множества начальных условий. Эффективное решение данных задач имеет важное теоретическое и прикладное значение, так как позволяет не только анализировать и предсказывать динамику конкретной траектории, но и управлять динамикой, а также моделировать качественные глобальные изменения динамики в случае возмущения оператора эволюции. Работа направлена на разработку теоретических и прикладных методов решения данных задач.

Изучение системы с известным оператором эволюции $S(t,\cdot)$ для конкретного начального условия z_0 заключается в построении в окрестности $\mathcal{O}_{z_0}$ устойчивого $\mathcal{W}^-(z_0)$ и неустойчивого $\mathcal{W}^+(z_0)$ многообразий, определяющих качественную локальную картину динамики близких к $S(t,z_0)$ траекторий: каждая траектория $S(t,m^-)$, $m^- \in \mathcal{W}^-(z_0)$ сближается с течением времени с траекторией $S(t,z_0)$; все траектории $S(t,a_0)$, $a_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ локально притягиваются с течением времени к множеству $S(t,\mathcal{W}^+(z_0))$. Построение многообразий $\mathcal{W}^\pm$ позволяет не только предсказывать эволюцию конкретной траектории, но и управлять динамикой.

Задача описания динамики близких траекторий более ста лет привлекает внимание исследователей. Основополагающие результаты для конечномерных пространств были получены А.М. Ляпуновым, H. Poincare, в работах G. Darboux, J. Hadamard'a, O. Perron'a. В нашей стране данной тематикой занимались А.А. Андронов, В.В. Немыцкий, И.Г. Петровский, А.Н. Колмогоров, Д.В. Аносов, Я.Б. Песин, Л.П. Шильников, Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, за рубежом – S. Smale, J.K. Hale, M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub. Для банаховых пространств соответствующие результаты были получены в работах В.И. Юдовича, О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова. Построенная к настоящему моменту теория охватывает класс траекторий $\{S(t,z_0)\}$ полно либо частично гиперболического типа. Вопрос об устойчивости движений в негиперболическом случае рассматривался в диссертации и последующих работах А.М. Ляпунова, позднее нетривиальные результаты получены в работах Я.Б. Песина,

А.И. Рейзиня, C. Coleman'a, С.Ю. Пилюгина, И.Н. Костина. Однако, рассматриваемые схемы доказательств существенно опирались либо на свойство частичной гиперболичности, либо на особенности конкретной задачи, либо на одномерность негиперболического подпространства разрешающего оператора, и возможность обобщения имеющихся результатов на существенно негиперболический случай до конца не изучена.

Алгоритмы численного построения многообразий начали разрабатываться начиная с шестидесятых годов. Отметим работы Г. Гукенхемера, А. Владимирского, Л.П. Шильникова, M.L. Brodzik'a, M. Dellnitz'a, A. Hohmann'a, L. Dieci'a, J. Lorenz'a, R.D. Russell'a. Однако, численные аспекты решения соответствующих задач (даже в пространствах малой размерности) весьма далеки от завершения. При этом методы проектирования на многообразия в окрестности нестационарной (непериодической) точки z_0, а так же для уравнений в частных производных, видимо, ранее не рассматривались.

Если данные вопросы по сути сводятся к исследованию устойчивости отдельных траекторий, то задача качественного глобального анализа полудинамической системы для некоторого достаточно широкого множества начальных условий $B_a \subset H$ заключается в исследовании глобального аттрактора $\mathcal{M}$ – предельного (по времени) множества всех траекторий.

Дело в том, что при численном моделировании исходный оператор $S(t,\cdot)$ и начальные данные a_0 заменяются на приближенные $S_\lambda(t,\cdot)$ и a_0^λ, где параметр λ отвечает за точность приближения. В связи с этим моделируемая $a_t^\lambda = S_\lambda\big(t,a_0^\lambda\big)$ и истинная $a_t = S\big(t,a_0\big)$ траектории начинают с течением времени расходиться. Это приводит к тому, что точность моделирования $\|a_t - a_t^\lambda\| \le \varepsilon$ можно гарантировать на некотором конечном отрезке времени $[0,T(\varepsilon)]$. Для многих реальных процессов суммарная погрешность модели, аппроксимации начальных данных, форсинга имеет практически неустранимый характер. В итоге время моделирования $T(\varepsilon)$ с гарантированной точностью оказывается много меньше интересующего. Это верно, например, при расчете неустойчивых течений жидкости, газа, в общей теории климата. Однако, для подобных задач наибольший интерес обычно представляет не поведение конкретной траектории, а некоторое типичное состояние, которое может наблюдаться в системе. Строгое определение типичности зависит от задачи. В связи с этим возникает проблема описания всех возможных предельных состояний $\mathcal{M}$ исходной системы, которые реализуются при больших временах. Данной тематикой занимались G.D. Birkhoff, В.В. Немыцкий, J. Lorenz, О.А. Ладыженская, А.В. Бабин, М.И. Вишик, В.В. Чепыжов, С. В. Зелик, Л.В. Капитанский, И.Н. Костин, В.П. Дымников, А.С. Грицун, А.Н. Филатов, J.K. Hale, R. Temam. Полный список исследователей весьма обширен.

Теория глобального аттрактора эффективно применяется при исследовании широкого класса уравнений в частных производных. В том числе, на ее основе строятся глобально устойчивые разностные схемы, формально пригодные для численных расчетов решений нестационарных уравнений на сколь угодно больших временных отрезках. Сходимость в этом случае понимается в смысле близости аттракторов дифференциальной $\mathcal{M}$ и разностной $\mathcal{M}_\lambda$ задач. Всвязи с этим представляет существенный интерес проблема численного построения множества $\mathcal{M}_\lambda$, оценка близости $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_\lambda$, метод исследования полной непрерывности $\mathcal{M}_\lambda$ по параметру возмущения λ, проверка условий полунепрерывности $\mathcal{M}_\lambda$ для конкретных задач.

Цель работы. Главной целью диссертационной работы является разработка и обоснование методов глобального численного исследования динамики нестационарной системы с конкретными начальными условиями (и близкими к ним), а также методов изучения качественного поведения системы для некоторого достаточно широкого множества начальных условий. Главными требованиями к полученным результатам являются: строгая обоснованность каждого алгоритма, эффективность для многомерных нестационарных уравнений в частных производных, независимость от специфики конкретной задачи. Также важным является исследование различных теоретических вопросов данной тематики – получение конструктивных доказательств теорем существования и асимптотически неулучшаемых условий существования многообразий, обобщение известных результатов на ранее нерешенные классы задач, представляющих как отдельный научный интерес, так и необходимых для построения и обоснования соответствующих численных алгоритмов.

Методика исследования основывается на классических результатах: методе сжимающий отображений, обобщенной теореме Адамара – Перрона, У–условиях гиперболичности, общей теории глобального аттрактора, дополненных и расширенных с учетом специфики решаемых задач.

Научную новизну диссертационной работы составляют:

1. Построение, математическое обоснование и практическая реализация эффективных численных алгоритмов проектирования на устойчивые и неустойчивые многообразия в окрестности точки и траектории седлового типа для широкого класса задач.

2. Обобщение теоремы Адамара–Перрона на случай существенно негиперболической точки и траектории, получение асимптотически неулучшаемых условий существования локальных устойчивых и неустойчивых многообразий, методика построения доказательства.

3. Сведение проблемы непрерывности глобального аттрактора и его аппроксимации к исследованию функции времени притяжения к аттрактору, получение критерия полной непрерывности аттрактора.

В прикладном аспекте новыми являются:

получение априорных оценок, позволяющих доказать глобальную устойчивость широкого семейства разностных аппроксимаций для модифицированных (в смысле Ладыженской) уравнений Навье–Стокса в трехмерных областях,

численное решение задачи проектирования на устойчивое и неустойчивое многообразия для системы Лоренца, многомерных уравнений типа Чафе–Инфанта, Бюргерса, Навье–Стокса, аппроксимация нетривиальных траекторий глобального аттрактора сложных многомерных полудинамических систем, решение задачи асимптотической стабилизации по начальным данным в окрестности неподвижной точки и в окрестности траекторий седлового типа, численное исследование скорости притяжения к глобальному аттрактору для различных полудинамических систем.

Достоверность, теоретическая и практическая значимость. Достоверность проведенного исследования основана на изложении всего материала в виде последовательности лемм и теорем, тщательном анализе численных экспериментов для широкого класса полудинамических систем, замыкании результатов диссертации на результаты других авторов, полученные другими методами. Теоретическая ценность заключается в развитии метода сжимающих отображений и его адаптации для рассматриваемых задач, в получении конструктивного метода исследования глобального аттрактора и структуры устойчивых и неустойчивых многообразий для полудинамических систем седлового типа. Практическая ценность содержится в новом подходе к решению задач проектирования на инвариантные многообразия, позволившем не только сравнить известные алгоритмы, применимые в окрестности гиперболической неподвижной точки, но и предложить новые, эффективно решающие соответствующие задачи, в том числе, в окрестности траектории седлового типа. Построенные алгоритмы не зависят от специфики конкретной полудинамической системы, что позволяет применять разработанный подход для решения задач численной стабилизации и аппроксимации глобального аттрактора для широкого класса нестационарных уравнений математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались и докладывались на:

-научно-исследовательском семинаре мех.-мат. ф-та МГУ под руководством академика РАН Н.С. Бахвалова;

-научно-исследовательском семинаре мех.-мат. ф-та МГУ под руководством академика РАН Д.В. Аносова и проф. А.М. Степина;

-научно-исследовательском семинаре Института вычислительной математики РАН под руководством академика РАН В.П. Дымникова;

-научно-исследовательском семинаре Института вычислительной математики РАН под руководством проф. Г.М. Кобелькова, проф. А.В. Фурсикова, проф. В.И. Лебедева;

-научно-исследовательском семинаре института им. Стеклова под руководством академика РАН Д.В. Аносова и проф. Ю.С. Ильяшенко;

-научно-исследовательском семинаре мех.-мат. ф-та МГУ под руководством проф. М.И. Вишика;

-научно-исследовательском семинаре ф-та прикладной математики МЭИ под руководством проф. Ю.А. Дубинского и проф. А.А. Амосова;

-международной конференции И.Г. Петровского (Москва, 2001, 2004)

-Российско–Голландском семинаре "Численные методы и их приложения"(Наймеген, 1997, 1999, 2001; Москва, 2003, 2005);

-международной конференции В.М. Алексеева (Москва, 2002)

-ежегодной конференции "Ломоносовские чтения"(Москва, 2000-2005)

-ежегодной отчетной конференции ИВМ РАН (Москва, 2002-2005)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 15 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы из 105 названий и заключения, содержит 51 иллюстрацию и три таблицы. Текст работы изложен на 228 страницах.

Содержание работы

Во введении обсуждаются постановки рассматриваемых задач, приводится обзор работ по данной тематике, кратко формулируются основные полученные результаты.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, рассматривается вопрос о качественном поведении при больших временах близких траекторий. В работе почти всюду рассматриваются дискретные ПДС. Время задается полугруппой $\mathcal{T}_+ = \{i = 0, 1, \ldots\}$. Переход от оператора задачи $S(t, u)$ с непрерывным временем формально осуществляется следующей заменой $S^i(u) := S(\tau i, u)$ с некоторым, не обязательно малым, $\tau > 0$.

Параграф 1.1 содержит терминологию и основные понятия первой главы. Пусть $S(\cdot) : H \to H$ непрерывное отображение, определенное на банаховом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$, и пусть 0 является неподвижной точкой отображения, т.е. $S(0) = 0$. Далее будем считать выполненными следующие условия (a):

a_0) определены два оператора проектирования $P_+, P_- : H \to H$, ограниченный линейный оператор $L : H \to H$, непрерывное отображение $R(u) = S(u) - Lu$ такие, что имеют место следующие неравенства:

a_1) $\quad P_+ + P_- = I, \quad \|P_+\| = \|P_-\| = 1;$

a_2) $\quad L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H;$

a_3) $\quad \|Lv\| \geq \mu_+\|v\|, \quad \forall v \in P_+H, \quad \mu_+ = 1 + \delta_+ \geq 1;$

a_4) $\quad \|Lw\| \leq \mu_-\|w\|, \quad \forall w \in P_-H, \quad \mu_- = 1 - \delta_- \leq 1;$

a_5) $\quad \|R(u_1) - R(u_2)\| < \theta\Big(\max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}\Big)\|u_1 - u_2\|, \ \forall u_i \in H$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta(\cdot)$:
$$\theta(0) = 0,\ \max_{u\in\mathcal{O}}\theta(\|u\|) = \bar\theta < 1/2.$$
В данных неравенствах v, w, u_i – произвольные элементы некоторой окрестности нуля $\mathcal{O} \subset H$, внутри которой ведутся все последующие рассуждения. Запишем оператор $S(u) = Lu + R(u)$ для $u = v + w$, $v \in P_+\mathcal{O}$, $w \in P_-\mathcal{O}$, в виде $S(u) = S_+(u)+S_-(u)$, где $S_\pm(u) = P_\pm S(u)$, $L_\pm\cdot = P_\pm L\cdot$, $R_\pm(\cdot) = P_\pm R(\cdot)$.

Основными объектами исследования в первой главе являются устойчивое многообразие $\mathcal{W}^- = \mathcal{W}^-(S,\mathcal{O})$, т. н. "входящий ус Адамара", подмножества $\mathcal{O}$:
$$\mathcal{W}^-(S,\mathcal{O}) = \{m_0 \in \mathcal{O} : \exists m_{i+1} \in \mathcal{O}, m_{i+1} = S(m_i), \quad i = 0, 1, 2, ..\},$$
и неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^+ = \mathcal{W}^+(S,\mathcal{O})$, или "исходящий ус Адамара":
$$\mathcal{W}^+(S,\mathcal{O}) = \{m_0 \in \mathcal{O} : \exists m_{i+1} \in \mathcal{O}, m_i = S(m_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, ..\}.$$
Если в условиях (a_3), (a_4) норма оператора L отделена от единицы (т.е. $\mu_+, \mu_- \neq 1$), то точка 0 называется гиперболической, иначе — негиперболической. Согласно теореме Адамара–Перрона в некоторой окрестности гиперболической точки существуют устойчивое $\mathcal{W}^-$ и неустойчивое $\mathcal{W}^+$ многообразия. Точку z_0 будем называть седловой, если в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ существуют многообразия $\mathcal{W}^\pm$, т.е. качественная картина динамики близких к z_0 траекторий напоминает движение в окрестности седла.

В **параграфе 1.2** получены достаточные условия существования устойчивого и неустойчивого многообразий в окрестности существенно негиперболической неподвижной точки. Соответствующие результаты получены на основе метода слабо сжимающих отображений.

Отображение F метрического пространства U в себя будем называть слабо сжимающим отображением (отображением полиномиального сжатия), если существуют такие числа $\alpha > 0$, $p \geq 1$, что для любых двух точек $u_1, u_2 \in U$ выполняется неравенство:
$$\rho(F(u_1), F(u_2)) \leq \frac{\rho(u_1, u_2)}{(1 + \alpha\rho^p(u_1, u_2))^{1/p}}. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Всякое слабо сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку: $F(u) = u$. Итерационный процесс $u_{n+1} = F(u_n)$ сходится к неподвижной точке с любого начального приближения u_0, при этом выполняется следующая оценка:* $\rho(u, F^n(u_0)) \leq \dfrac{\rho(u, u_0)}{(1 + n\alpha\rho^p(u, u_0))^{1/p}}$.

В разделах 1.2.1, 1.2.2 приводятся известные результаты (теорема Адамара-Перрона) о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий в окрестности гиперболической точки.

В разделе 1.2.3 получено обобщение теоремы Адамара–Перрона о существовании устойчивого многообразия в окрестности седловой точки. Выберем $0 < r < \infty$, $0 \leq \gamma < \infty$ и определим окрестность $\mathcal{O} = \{u = v + w : \|w\| \leq r,\ \|v\| \leq \gamma r\}$. Устойчивое многообразие будем строить в классе $B_\gamma(\mathcal{O})$ всех непрерывных отображений $f(w) : P_-\mathcal{O} \to P_+\mathcal{O}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$, $\|f(w_1) - f(w_2)\| \leq \gamma\|w_1 - w_2\|$.

Далее будем также считать, что

a_6) Операторы $S_-(w + f(w)) : P_-\mathcal{O} \to P_-\mathcal{O}$, $\forall f \in B_\gamma(\mathcal{O})$ и $S_+^{-1}(w + v) : P_+\mathcal{O} \to P_+\mathcal{O}$, $\forall w \in P_-\mathcal{O}$ являются вполне непрерывными.

Данное требование является естественным и выполняется для всех рассматриваемых далее задач. Имеет место следующая теорема существования в классе $B_\gamma(\mathcal{O})$ устойчивого многообразия в окрестности негиперболической точки.

Теорема 1.2. *Пусть отображение $S(\cdot)$ в $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям (a). Пусть $0 < r < \infty$, $0 \leq \gamma < \infty$ такие, что $\theta(2r(\gamma + 1)) \leq 1/2$. При этом для $\forall w, \tilde w \in P_-\mathcal{O}$, $\forall v, \tilde v \in P_+\mathcal{O}$ и произвольных функций $f, \tilde f \in B_\gamma(\mathcal{O})$ имеют место следующие оценки (c):*

c_1) $$\|S_-(f(w) + w) - S_-(f(\tilde w) + \tilde w)\| + \frac{1}{\gamma}\|S_+(v + w) - S_+(v + \tilde w)\| \leq \|w - \tilde w\|,$$

c_2) $$\|S_+(v + w) - S_+(\tilde v + w)\| \geq \|v - \tilde v\|.$$

Тогда

1. Существует многообразие $\mathcal{W}^- = \{f(w) + w, w \in P_-\mathcal{O}\}$ задаваемое функцией $f : P_-\mathcal{O} \to P_+\mathcal{O}$ из $B_\gamma(\mathcal{O})$.

2. Многообразие является инвариантным множеством $S(\mathcal{W}^-) = \mathcal{W}^-$, при этом $S^n(m) \subset \mathcal{O}$, n=1,2,... для $\forall m \in \mathcal{W}^-$.

Если же дополнительно имеют место оценки

$$c_{3_1})\quad \|S_-(f(w)+w)\| \le \|w\|(1-\beta\|w\|^p),\ \beta > 0,\ p \ge 1,$$

$$c_{3_2})\quad \|S_+(f(w)+w) - S_+(\tilde f(w)+w)\| - \gamma\|S_-(f(w)+w) - S_-(\tilde f(w)+w)\| \ge \|f(w) - \tilde f(w)\|,$$

тогда

3. Многообразие $\mathcal{W}^-$ определяется однозначно.

Следствие 1.1. *Пусть в предположениях теоремы 1.2 для оператора $S(\cdot)$ выполняется следующее неравенство*

$$c_4)\quad \|S_-(f(w)+w)\| \le \|w\|(1-\beta\|w\|^p),\quad \beta > 0,\ p \ge 1.$$

Тогда для любого $m \in \mathcal{W}^-$ траектория $S^n(m) \to 0$ при $n \to \infty$.

В разделе 1.2.4 получено обобщение теоремы Адамара–Перрона о существовании неустойчивого многообразия в окрестности седловой точки. Выберем $0 < r < \infty$, $0 \le \gamma < \infty$, определим $\mathcal{O} = \{u = v + w : \|v\| \le r,\ \|w\| \le \gamma r\}$. Искомое многообразие будем искать в классе $A_\gamma(\mathcal{O})$ всех непрерывных отображений $g(v) : P_+\mathcal{O} \to P_-\mathcal{O}$, удовлетворяющих условиям: $g(0) = 0$, $\|g(v_1) - g(v_2)\| \le \gamma\|v_1 - v_2\|$. В случае $u = v + g(v)$ оператор $S_\pm(u)$ далее будем обозначать следующим образом: $S_\pm(v + g(v)) = S_{\pm,g}(v)$.

Имеет место следующая теорема о существовании в классе $A_\gamma(\mathcal{O})$ неустойчивого многообразия в окрестности негиперболической точки и слабого притяжения к нему произвольной траектории.

Теорема 1.3. *Пусть отображение $S(\cdot)$ в окрестности $\mathcal{O}'$ удовлетворяет условиям (a). Пусть для $0 < r < \infty$, $0 \le \gamma < \infty$ найдутся числа $\alpha > 0, p \ge 1$ такие, что для $\forall v, \tilde v \in P_+\mathcal{O}'$ и произвольных функций $g, \tilde g \in A_\gamma(\mathcal{O}')$ выполнены следующие оценки:*

$$b_1)\quad \|S_{-,g}(v) - S_{-,\tilde g}(v)\| + \gamma\|S_{+,g}(v) - S_{+,\tilde g}(v)\| \le \le \Big(1 - \alpha\|g(v) - \tilde g(v)\|^p\Big)\|g(v) - \tilde g(v)\|,\quad 1 - 2\alpha\gamma r^p > 0,$$

$$b_2)\quad \|S_{-,g}(v) - S_{-,g}(\tilde v)\| \le \gamma C\|v - \tilde v\|,$$

$$b_3)\quad \|S_{+,g}(v) - S_{+,g}(\tilde v)\| \ge C\|v - \tilde v\|,\quad C \ge 1.$$

Тогда

1. В некоторой окрестности $\mathcal{O}$ существует неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^+$, задаваемое функцией $g : P_+H \to P_-H$, принадлежащей классу $A_\gamma(\mathcal{O})$, т.е. $\mathcal{W}^+ = \{v + g(v), v \in P_+H\}$.

2. Данное многообразие локально инвариантно относительно оператора S. На многообразии определены обратные степени оператора S^{-i}, т.е. для произвольного $m \in \mathcal{W}^+$ существует $S^{-i}(m), i = 1, 2, ...$, при этом $S^{-i}(m) \subset \mathcal{O}$.

3. В окрестности $\mathcal{O}$ произвольная точка и притягивается к многообразию $\mathcal{W}^+$ с полиномиальной скоростью:

$$\mathrm{dist}(S^i(u), \mathcal{W}^+) \le \frac{2r\gamma}{(1 + i\alpha(2r\gamma)^p)^{1/p}},\ \text{если } S^k(u) \in \mathcal{O}, 0 \le k \le i.$$

Прямым следствием теоремы является

Лемма 1.1. *Пусть в условиях теоремы 1.3 оператор $S_{+,g}(v)$ является слабо растягивающим для $\forall v \in \mathcal{O}$:*

$$b_4)\quad \|S_{+,g}(v)\| \ge \Big(1 + \beta\|v\|^q\Big)\|v\|\quad \beta > 0, q \ge 1.$$

Тогда найдется такая подокрестность $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ и такое $\tilde\beta > 0$, что для произвольного $m \in \mathcal{W}^+$ имеют место оценки:

$$\|S_+^i(m)\| \ge \frac{\|v\|}{(1 - i\tilde\beta\|v\|^q)^{1/q}},\quad \text{если } S^k(m) \in \mathcal{O},\ 0 \le k \le i,$$

$$\|S_+^{-i}(m)\| \le \frac{r}{(1 + i\tilde\beta r^q)^{1/q}},\quad i = 1, 2, ...,$$

$$\|S^{-i}(m)\| \to 0\quad \text{при}\quad i \to \infty.$$

В **параграфе 1.3** получено обобщение теории устойчивых и неустойчивых многообразий на случай траектории $\{S^i(z_0)\}$ седлового типа. Отметим, что А.М. Ляпунов в своей диссертации впервые разработал метод исследования подобного рода задач. Рассматриваемый далее метод ориентирован на построение численных алгоритмов, однако позволяет доказать существование устойчивого и неустойчивого многообразий не только для частично неравномерно гиперболических траекторий, но и для траекторий седлового типа.

Пусть $S(\cdot) : H \to H$ отображение банахова пространства H с нормой $\|\cdot\|$ и $z_0, a_0 \in H$. Будем считать, что имеется либо полная траектория для точки z_0: $\Gamma(z_0) = \{z_i = S^i(z), i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \ldots\}$, либо некоторый отрезок положительной полутраектории: $\Gamma_n^+(z_0) = \{z_i = S^i(z), i = 0, 1, \ldots, n\}$, либо отрицательной: $\Gamma_n^-(z_0) = \{z_i = S^i(z), i = 0, -1, \ldots, -n\}$. Предположим, что отображение S достаточно гладкое, и в окрестности $\mathcal{O}_{z_i}$ каждой точки z_i можно построить линеаризацию оператора S: $S(z_i+u)=S(z_i)+L^{(i)}u+R^{(i)}(u)$. При этом для ограниченного линейного оператора $L^{(i)}:H\to H$ и непрерывного отображения $R^{(i)}(u)=S(z_i+u)-S(z_i)-L^{(i)}u$ найдутся операторы проектирования $P_\pm^{(i)}$ и числа $\mu_-^{(i)}$, $\mu_+^{(i)}$, $r^{(i)}>0$ такие, что в окрестности $\mathcal{O}_{z_i}=\{u:\|P_\pm^{(i)}(z_i-u)\|\le r^{(i)}\}$ выполнены следующие условия гиперболичности

$A_1)$ $\quad P_+^{(i)}+P_-^{(i)}=I,\ \|P_+^{(i)}\|=\|P_-^{(i)}\|=1,$

$A_2)$ $\quad L^{(i)}\big(P_+^{(i)}H\big)=P_+^{(i+1)}H, \qquad L^{(i)}\big(P_-^{(i)}H\big)\subset P_-^{(i+1)}H,$

$A_3)$ $\quad \|L^{(i)}w\|\le\mu_-^{(i)}\|w\|, \quad \forall w\in P_-^{(i)}H, \quad \mu_-^{(i)}<1,$

$A_4)$ $\quad \|L^{(i)}v\|\ge\mu_+^{(i)}\|v\|, \quad \forall v\in P_+^{(i)}H, \quad \mu_+^{(i)}>\mu_-^{(i)},$

$A_5)$ $\quad \|R^{(i)}(u_1)-R^{(i)}(u_2)\|<\theta^{(i)}\Big(\max\{\|u_1\|,\|u_2\|\}\Big)\|u_1-u_2\|,$
$\qquad \forall u_{1,2}:z_i+u_{1,2}\in\mathcal{O}_{z_i},\ \theta^{(i)}(0)=0,$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta^{(i)}$.

Пусть условия (A) выполняются для всех точек $\Gamma_{n-1}(z_0)$, $n\ge1$, а условие (A_1) верно также и для точки z_n. Пусть a_0 принадлежит некоторой окрестности $\mathcal{O}_{z_0}$ точки z_0, и задано конечномерное подпространство $\mathcal{L}=<e_1,\dots,e_{i_0}>$. Рассмотрим метод построения такого вектора u, что

$$u=a_0+\sum_{i=1}^{i_0}c_ie_i,\ u\in\mathcal{O}_{z_0},\quad c_i\in R, \tag{1.2}$$

$$\|S^i(u)-S^i(z_0)\|\le Cq^i\|u-z_0\|,\quad 0\le i\le n,\ q<1. \tag{1.3}$$

Заметим, что рассмотренный далее метод допускает естественное замыкание на случай бесконечного n, и по сути является конструктивным доказательством существования устойчивого многообразия $\mathcal{W}^-(z_0,f)$.

Для каждого $i=0,\dots,n$ рассмотрим класс $B_{\gamma^{(i)}}\left(\mathcal{O}^{(i)}\right)$ всех непрерывных отображений $f(w):P_-^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}\to P_+^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}$, где $\mathcal{O}^{(i)}=\{u:\|P_\pm^{(i)}(u)\|\le r^{(i)}\}$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0,\quad \|f(w_1)-f(w_2)\|\le\gamma^{(i)}\|w_1-w_2\|,\ 0\le\gamma^{(i)}\le1$. Для элементов $B_{\gamma^{(i)}}\left(\mathcal{O}^{(i)}\right)$ определим норму $|f|=\sup_{w\in P_-\mathcal{O}^{(i)}}|f(w)|$. Пусть фиксирована некоторая функция $f^{(n)}(w)\in B_{\gamma^{(n)}}\left(\mathcal{O}^{(n)}\right)$, задающая в окрестности точки $\mathcal{O}_{z_n}$

локальное многообразие

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^-(z_n,f^{(n)})=\big\{&m=z_n+v+w:m\in\mathcal{O}_{z_n},\\ &w=P_-^{(n)}(m-z_n),v=f^{(n)}(w)\big\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу, называемую далее *задачей* (ff), нахождения такой функции $f^{(0)}\in B_{\gamma^{(0)}}\left(\mathcal{O}^{(0)}\right)$, что для всякой точки вида $z_0+w+f^{(0)}(w)$, $w\in P_-^{(0)}\mathcal{O}^{(0)}$, выполняется вложение

$$S^n(z_0+w+f^{(0)}(w))\subset\mathcal{W}^-(z_n,f^{(n)}). \tag{1.4}$$

В работе показано, что при некоторых условиях задача (ff) однозначно разрешима, а точки соответствующего многообразия $\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})$ удовлетворяют неравенству (1.3). Более того, для произвольного начального приближения $f^{(n)}\in B_{\gamma^{(n)}}\left(\mathcal{O}^{(n)}\right)$ при увеличении n последовательность соответствующих функций $f^{(0)}=f^{(0)}(n,f^{(n)})$ сходится к функции f, задающей устойчивое многообразие $\mathcal{W}^-(z_0,f)$.

Для фиксированной функции $f^{(n)}$ будем строить $f^{(0)}$ последовательно за n шагов. На первом шаге по $f^{(n)}$ найдем функцию $f^{(n-1)}$, задающую многообразие $\mathcal{W}^-\big(z_{n-1},f^{(n-1)}\big)$, из условия вложения

$$S\Big(\mathcal{W}^-(z_i,f^{(i)})\Big)\subset\mathcal{W}^-\big(z_{i+1},f^{(i+1)}\big) \tag{1.5}$$

при $i=n-1$. На следующем шаге по $f^{(n-1)}$ определим $f^{(n-2)}$ из условия (1.5) при $i=n-2$. И так далее до функции $f^{(0)}$. Запишем соответствующее условие (1.5) в операторной форме:

$$\begin{aligned}&L^{(i)}f^{(i)}(w)+P_+^{(i+1)}\big[R^{(i)}(f^{(i)}(w)+w)\big]=\\ &f^{(i+1)}\big(L^{(i)}w+P_-^{(i+1)}\big[R^{(i)}(f^{(i)}(w)+w)\big]\big).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (A). *Тогда для произвольной функции* $f^{(i+1)}\in B_{\gamma^{(i+1)}}\left(\mathcal{O}^{(i+1)}\right)$ *найдется такое* $r^{(i)}>0$, *что в окрестности* $\mathcal{O}^{(i)}$ *решение* $f^{(i)}\in B_{\gamma^{(i)}}\left(\mathcal{O}^{(i)}\right)$ *уравнения* (1.6) *существует и единственно. Величина* $r^{(i)}$ *может быть найдена из следующих неравенств*

$$\frac{\gamma^{(i+1)}\big(\mu_-^{(i)}+\theta^{(i)}(r^{(i)})(1+\gamma^{(i)})\big)+\theta^{(i)}(r^{(i)})(1+\gamma^{(i)})}{\mu_+^{(i)}}\le\gamma^{(i)}, \tag{1.7}$$

$$\frac{(\gamma^{(i+1)}+1)\theta^{(i)}(r^{(i)})}{\mu_+^{(i)}} = q^{(i)} < 1. \tag{1.8}$$

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4 и функции $f^{(i)}$, $f^{(i+1)}$ удовлетворяют уравнению (1.6). Пусть*

$$\mu_-^{(i)} + \theta^{(i)}(r^{(i)})(1+\gamma^{(i)}) = p^{(i)} < 1. \tag{1.9}$$

Тогда выполняются оценки

$$\begin{gathered}\|P_-^{(i+1)}\big[S(z_i+f^{(i)}(w)+w)-S(z_i)\big]\| \le p^{(i)}\|w\|,\\ \|S(z_i+f^{(i)}(w)+w)-S(z_i)\| \le p^{(i)}(1+\gamma^{(i+1)})\|w\|.\end{gathered}$$

Теорема 1.6. *Пусть для $i=0,\dots,n-1$ выполнены условия теоремы 1.4. Тогда для произвольной функции $f^{(n)} \in B_{\gamma^{(n)}}\left(\mathcal{O}^{(n)}\right)$ найдется такое $r^{(0)} > 0$, что существует единственная функция $f^{(0)} \in B_{\gamma^{(0)}}\left(\mathcal{O}^{(0)}\right)$, удовлетворяющая условию $S^n\Big(\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})\Big) \subset \mathcal{W}^-(z_n,f^{(n)})$.*

Теорема 1.7. *Пусть выполнены утверждения теорем 1.4, 1.5, 1.6. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\begin{gathered}\|P_-^{(n)}\big[S^n\big(z_0+f^{(0)}(w)+w\big)-S^n\big(z_0\big)\big]\| \le \|w\|\textstyle\prod_{i=0}^{n-1}p^{(i)},\\ \|S^n\big(z_0+f^{(0)}(w)+w\big)-S^n\big(z_0\big)\| \le (1+\gamma^{(n)})\|w\|\textstyle\prod_{i=0}^{n-1}p^{(i)}.\end{gathered}$$

Теорема 1.8. *Пусть выполнены утверждения теорем 1.4-1.7. Пусть функции $f_j^{(0)} \in B_{\gamma^{(0)}}\left(\mathcal{O}^{(0)}\right)$, $j=1,2$ являются решениями задачи (1.4) для заданных функций $f_j^{(n)} \in B_{\gamma^{(n)}}\left(\mathcal{O}^{(n)}\right)$ соответственно при $j=1,2$. Пусть*

$$d^{(i)} = \Big(\mu_+^{(i)} - (1+\gamma^{(i+1)})\theta^{(i)}(r^{(i)})\Big)^{-1} < 1. \tag{1.10}$$

Тогда выполняется оценка

$$|f_1^{(0)} - f_2^{(0)}| \le |f_1^{(n)} - f_2^{(n)}|\prod_{i=0}^{n-1} d^{(i)} \le 2r^{(n)}\prod_{i=0}^{n-1} d^{(i)},$$

где $|f^{(i)}| = \sup_{w\in P_-^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}}\|f^{(i)}(w)\|$, $i=0,n$.

Предложенный подход может применяться для доказательства существования локально устойчивого многообразия $\mathcal{W}^-(z_0,f)$, в том числе для седлового случая.

Перейдем к решению задачи, называемой далее *задачей* (lf), проектирования начальных условий a_0 на многообразие $\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})$ вдоль подпространства $\mathcal{L}$. По определению это означает построение такого $u=a_0+l$, $l\in\mathcal{L}$, что $u\in\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})$. Уравнение, соответствующее данному условию, имеет вид

$$P_+^{(0)}\big[b_0+l\big] = f^{(0)}(P_-^{(0)}\big[b_0+l\big]), \quad l=\sum_{i=1}^{i_0}c_ie_i, \quad b_0=a_0-z_0. \tag{1.11}$$

Для решения полученного уравнения относительно неизвестных коэффициентов c_i применим следующий итерационный процесс:

$$P_+^{(0)}\big[b_0+l_{k+1}\big] = f^{(0)}(P_-^{(0)}\big[b_0+l_k\big]), \quad l_k=\sum_{i=1}^{i_0}c_i^ke_i. \tag{1.12}$$

Теорема 1.9. *Пусть функция $f^{(0)} \in B_{\gamma^{(0)}}(\mathcal{O}^{(0)})$ касается подпространства $P_-^{(0)}H$. Пусть $\mathcal{L} =< e_1,\dots,e_{i_0} >$, система векторов $\{e_i\}_1^{i_0}$ линейно независима, и $\{P_+^{(0)}[e_i]\}_1^{i_0}$ образует базис в подпространстве $P_+^{(0)}H$. Тогда найдется такое $r^{(0)}>0$, что для $b_0\in\mathcal{O}^{(0)}$ задача (1.11) имеет единственное решение $u\in\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})$. Для произвольного начального приближения $u_0=a_0+l_0$, $u_0\in\mathcal{O}_{z_0}$ метод (1.12) сходится к u со скорость геометрической прогрессии.*

Рассмотренный итерационный процесс (1.12) позволяет находить решение задачи (lf). Однако, если известна такая функция $f^{(1)} \in B_{\gamma^{(1)}}(\mathcal{O}^{(1)})$, что $S\Big(\mathcal{W}^-(z_0,f^{(0)})\Big) \subset \mathcal{W}^-(z_1,f^{(1)})$, то можно рассмотреть задачу о построении $u=a_0+l$ из условия $S(u)\in\mathcal{W}^-(z_1,f^{(1)})$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$P_+^{(1)}\big[S(a_0+l)-S(z_0)\big] = f^{(1)}\big(P_-^{(1)}\big[S(a_0+l)-S(z_0)\big]\big). \tag{1.13}$$

Для решения данной задачи рассмотрим следующий итерационный процесс

$$\begin{gathered}P_+^{(1)}\big[L^{(0)}(b_0+l_{k+1})+R^{(0)}(b_0+l_k)\big] =\\ f^{(1)}\big(P_-^{(1)}\big[L^{(0)}(b_0+l_k)+R^{(0)}(b_0+l_k)\big]\big),\end{gathered} \tag{1.14}$$

где $l_k=\sum_{i=1}^{i_0}c_i^ke_i$, $b_0=a_0-z_0$.

Теорема 1.10. *Пусть функция $f^{(1)} \in B_{\gamma^{(1)}}(\mathcal{O}^{(1)})$ касается подпространства $P_-^{(1)}H$, система векторов $\{e_i\}_1^{i_0}$ линейно независи-*

ма и $\{P_+^{(0)}[e_i]\}_1^{i_0}$ *образует базис в* $P_+^{(0)}H$*. Тогда найдется такое* $r^{(0)} > 0$*, что для* $b_0 \in \mathcal{O}^{(0)}$ *задача (1.13) имеет единственное решение* $u \in \mathcal{W}^-(z_0, f^{(0)})$*. Для произвольного начального приближения* $u_0 = a_0 + l_0$*,* $u_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$*, метод (1.14) сходится к* u *со скоростью геометрической прогрессии.*

Полученные результаты позволяют сформулировать решение задачи (1.2), (1.3) как решение следующего уравнения

$$P_+^{(n)}[S^n(a_0 + l) - S^n(z_0)] = 0, \quad l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i \tag{1.15}$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i. Отметим, что данное уравнение соответствует решению задач (ff) и (lf) при $f^{(n)} \equiv 0$. Предложенные итерационные методы решения отдельных задач составляют основу соответствующего численного алгоритма для уравнения (1.15). Следствием теорем 1.6, 1.10 является следующее утверждение:

Теорема 1.11. *Пусть для* $i = 0, \ldots, n-1$ *выполнены условия теоремы 1.4, система векторов* $\{e_i\}_1^{i_0}$ *линейно независима и* $\{P_+^{(0)}[e_i]\}_1^{i_0}$ *образует базис в* $P_+^{(0)}H$*. Тогда найдется такое* $r^{(0)} > 0$*, что для произвольного* $a_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ *решение* l *задачи* (1.15) *существует и единственно. Если же дополнительно для каждого* $i = 0, \ldots, n-1$ *выполнены условия теоремы 1.5, тогда* $a_0 + l$ *является решением задачи (1.2), (1.3).*

Рассмотрим задачу проектирования на локально неустойчивое многообразие $\mathcal{W}^+(z_0, \mathbf{g}^{(0)}) = \{m = z_0 + v + w : m \in \mathcal{O}_{z_0}, v = P_+^{(0)}(m - z_0), w = \mathbf{g}^{(0)}(v)\}$ в окрестности седловой траектории. Пусть известны операторы $L^{(i)}$, $R^{(i)}$, $P_\pm^{(i)}$ из условия (A) для точек полутраектории $\Gamma_n^-(z_0)$. Нас интересует метод приближенного проектирования начального условия $a_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ на многообразие $\mathcal{W}^+(z_0, \mathbf{g}^{(0)})$ вдоль подпространства $\mathcal{L} =< l_1, \ldots, l_{i_0} >$. Отметим, что здесь и далее устойчивое подпространство $P_-^{(0)}H$ может быть бесконечномерным, но подпространство $P_+^{(0)}H$ конечномерно. Выберем некоторое начальное многообразие $\mathcal{W}^+(z_{-n}, g^{(-n)})$, (т.е. отображение $g^{(-n)}$), и

построим такое многообразие $\mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})$, что

$$S^n(z_{-n} + g^{(-n)}(v) + v) \subset \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)}), \quad \forall v \in P_+^{(-n)}\mathcal{O}^{(-n)}. \tag{1.16}$$

Покажем, что при выполнении некоторых условий задача (1.16) разрешима, и все точки окрестности $u \in \mathcal{O}_{z_{-n}}$ притягиваются к многообразию:

$$\operatorname{dist}\Big(S^n(u), \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})\Big) \le Cq^n, \ q < 1.$$

Для каждого $i = 0, -1, \ldots, -n$ рассмотрим класс $A_{\gamma^{(i)}}\left(\mathcal{O}^{(i)}\right)$ всех непрерывных отображений $g(w) : P_+^{(i)}\mathcal{O}^{(i)} \to P_-^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}$, где $\mathcal{O}^{(i)} = \{u : \|P_\pm^{(i)}(u)\| \le r^{(i)}\}$, удовлетворяющих условиям $g(0) = 0$, $\|g(v_1) - g(v_2)\| \le \gamma^{(i)}\|v_1 - v_2\|$, $0 \le \gamma^{(i)} \le 1$. Для элементов $A_{\gamma^{(i)}}\left(\mathcal{O}^{(i)}\right)$ определим норму $|g| = \sup_{v \in P_+\mathcal{O}^{(i)}} |g(v)|$.

Пусть фиксирована некоторая функция $g^{(-n)}(v) \in A_{\gamma^{(-n)}}\left(\mathcal{O}^{(-n)}\right)$, задающая в окрестности точки $\mathcal{O}_{z_{-n}}$ локальное многообразие

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^+(z_{-n}, g^{(-n)}) = \{&m = z_0 + v + w : m \in \mathcal{O}_{z_{-n}}, \\ &v = P_+^{(-n)}(m - z_{-n}), w = g^{(-n)}(v)\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу, называемую далее *задачей* (gg), нахождения такой функции $g^{(0)} \in A_{\gamma^{(n)}}\left(\mathcal{O}^{(n)}\right)$, что для всякой точки вида $z_{-n} + v + g^{(-n)}(v)$, $v \in P_+^{(-n)}\mathcal{O}^{(-n)}$, выполняется вложение

$$S^n(z_{-n} + v + g^{(-n)}(v)) \subset \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)}). \tag{1.17}$$

В работе показано, что при некоторых условиях задача (gg) однозначно разрешима и предложен метод вычисления $g^{(0)}(v)$, $\forall v \in P_+^{(0)}\mathcal{O}^{(0)}$. Для фиксированной функции $g^{(-n)}$ будем строить $g^{(0)}$ последовательно за n шагов. На первом шаге по $g^{(-n)}$ найдем функцию $g^{(-n+1)}$, задающую многообразие $\mathcal{W}^+\big(z_{-n+1}, g^{(-n+1)}\big)$, из условия вложения

$$S\Big(\mathcal{W}^+(z_i, g^{(i)})\Big) \subset \mathcal{W}^+\big(z_{i+1}, g^{(i+1)}\big) \tag{1.18}$$

при $i = -n$. На следующем шаге по $g^{(-n+1)}$ определим $g^{(-n+2)}$ из условия (1.18) при $i = -n + 1$. И так далее до функции $g^{(0)}$.

Запишем соответствующее условие (1.18) в операторной форме:

$$\begin{aligned}&L_-^{(i)}g^{(i)}(v) + P_-^{(i+1)}\big[R^{(i)}(g^{(i)}(v) + v)\big] = \\ &g^{(i+1)}\big(L_+^{(i)}v + P_+^{(i+1)}\big[R^{(i)}(g^{(i)}(v) + v)\big]\big).\end{aligned}$$

Отсюда имеем искомое соотношение

$$\begin{array}{l} g^{(i+1)}(v) = L_-^{(i)} g^{(i)}(\tilde{v}) + P_-^{(i+1)}\big[R^{(i)}(g^{(i)}(\tilde{v}) + \tilde{v})\big] \\ \text{где } \tilde{v}: \; v = L_+^{(i)}\tilde{v} + P_+^{(i+1)}\big[R^{(i)}(g^{(i)}(\tilde{v}) + \tilde{v})\big]. \end{array} \qquad (1.19)$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.12. *Пусть выполнены условия (A). Тогда для произвольной функции $g^{(i)} \in A_{\gamma^{(i)}}\big(\mathcal{O}^{(i)}\big)$, $i = -n, -n+1, \ldots, -1$ найдется такое $r^{(i+1)} > 0$, что в окрестности $\mathcal{O}^{(i+1)}$ решение $g^{(i+1)} \in A_{\gamma^{(i+1)}}\big(\mathcal{O}^{(i+1)}\big)$ уравнения (1.19) существует и единственно. Величина $r^{(i+1)}$ может быть найдена из следующего неравенства*

$$\frac{(\mu_-^{(i)}\gamma^{(i)} + \theta_-^{(i)}((\gamma^{(i)}+1)r^{(i)})(\gamma^{(i)}+1))}{(\mu_+^{(i)} - \theta_+^{(i)}((\gamma^{(i)}+1)r^{(i)})(\gamma^{(i)}+1))} \le \gamma^{(i+1)}.$$

Теорема 1.13. *Пусть для $i = -n, \ldots, -1$ выполнены условия теоремы 1.12. Тогда для произвольной функции $g^{(-n)} \in A_{\gamma^{(-n)}}\big(\mathcal{O}^{(-n)}\big)$ найдется такое $r^{(0)} > 0$, что существует единственная функция $g^{(0)} \in A_{\gamma^{(0)}}\big(\mathcal{O}^{(0)}\big)$, удовлетворяющая условию $S^n\Big(\mathcal{W}^+(z_{-n}, g^{(-n)})\Big) \subset \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})$.*

Теорема 1.14. *Пусть выполнены утверждения теоремы 1.13. Пусть функции $g_j^{(0)} \in A_{\gamma^{(0)}}\big(\mathcal{O}^{(0)}\big)$, $j = 1, 2$ являются решениями задачи (1.17) для заданных функций $g_j^{(-n)} \in A_{\gamma^{(-n)}}\big(\mathcal{O}^{(-n)}\big)$ соответственно при $j = 1, 2$. Пусть*

$$d^{(i)} = \frac{\big(\mu_-^{(i)}\gamma^{(i)} + \bar{\theta}_-^{(i)}(1+\gamma^{(i)})\big)\bar{\theta}_+^{(i)}}{\mu_+^{(i)} - \bar{\theta}_+^{(i)}(1+\gamma^{(i)})} + \mu_-^{(i)} + \bar{\theta}_-^{(i)} < 1. \qquad (1.20)$$

Тогда выполняется оценка

$$|g_1^{(0)} - g_2^{(0)}| \le |g_1^{(-n)} - g_2^{(-n)}| \prod_{i=0}^{n-1} d^{(i)} \le 2r^{(-n)} \prod_{i=0}^{n-1} d^{(i)},$$

где $|g^{(i)}| = \sup_{v \in P_+^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}} \|g^{(i)}(v)\|$, $i = 0, -n$.

Теорема 1.15. *Пусть для $i = -n, \ldots, 0$ выполнены условия теорем 1.13, 1.14. Тогда для произвольной точки $u \in \mathcal{O}^{(-n)}$ выполняется оценка*

$$\operatorname{dist}(S^i(u), \mathcal{W}^+(z_i, g^{(i)})) \le q^i \|P_-^{(-n)}u - g^{(-n)}\big(P_+^{(-n)}u\big)\| \le q^i 2r^{(-n)},$$

$$q^i \le \prod_{j=-n}^{i} \tilde{\mu}_-^{(j)}, \quad \tilde{\mu}_-^{(i)} = \mu_-^{(i)} + \theta_-^{(i)}((1+\gamma^{(i)})r^{(i)}) + \gamma\theta_+^{(i)}((1+\gamma^{(i)})r^{(i)}) < 1.$$

Предложенный подход может применяться для доказательства существования локально неустойчивого многообразия $\mathcal{W}^+(z_0, \mathbf{g}^{(z_0)})$, в том числе для случая седловой траектории.

Рассмотрим решение задачи, называемой далее *задачей* (lg), проектирования начальных условий a_0 на многообразие $\mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})$ вдоль подпространства $\mathcal{L}$. По определению это означает построение такого $u = a_0 + l$, $l \in \mathcal{L}$, что $u \in \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})$. Уравнение, соответствующее данному условию, имеет вид

$$P_-^{(0)}\big[b_0 + l\big] = g^{(0)}(P_+^{(0)}\big[b_0 + l\big]), \quad l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i, \quad b_0 = a_0 - z_0. \quad (1.21)$$

Для решения полученного уравнения относительно неизвестных коэффициентов c_i применим следующий итерационный процесс:

$$P_-^{(0)}\big[b_0 + l_{k+1}\big] = g^{(0)}(P_+^{(0)}\big[b_0 + l_k\big]), \quad l_k = \sum_{i=1}^{i_0} c_i^k e_i. \qquad (1.22)$$

Если подпространство $P_-^{(0)}H$ бесконечномерно, то будем считать, что $\mathcal{L} \equiv P_- H$ (иначе построение очередного вектора l_{k+1} нереализуемо). В этом случае задачи (lg) и (gg) совпадают. Пусть i_0 конечно (это соответствует случаю конечномерного подпространства $P_-^{(0)}H$).

Теорема 1.16. *Пусть функция $g^{(0)} \in A_{\gamma^{(0)}}(\mathcal{O}^{(0)})$ касается подпространства $P_+^{(0)}H$. Пусть $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_{i_0}\}$, система векторов $\{e_i\}_1^{i_0}$ линейно независима, и $\{P_-^{(0)}[e_i]\}_1^{i_0}$ образует базис в подпространстве $P_-^{(0)}H$. Тогда найдется такое $r^{(0)} > 0$, что для $b_0 \in \mathcal{O}^{(0)}$ задача (1.21) имеет единственное решение $u \in \mathcal{W}^+(z_0, g^{(0)})$. Для произвольного начального приближения $u_0 = a_0 + l_0$, $u_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ метод (1.22) сходится к u со скорость геометрической прогрессии.*

Полученные в первой главе методы далее применяются для построения и обоснования численных алгоритмов решения рассматриваемых задач.

Во второй главе, состоящей из двух параграфов, рассматривается задача о качественном поведении траекторий полудинамической системы при больших временах. Исследуется вопрос об устойчивости (непрерывности сверху и снизу) глобального аттрактора при возмущении разрешающего оператора задачи. Полученные утверждения далее применяются при численной аппроксимации глобального аттрактора различных систем.

В **параграфе 2.1** формулируются необходимые понятия и известные утверждения, необходимые в данной главе.

Множество $B_0 \subset H$ называется *B-притягивающим* множеством ПДС, если оно замкнуто и притягивает каждое ограниченное множество B, т.е. $\mathrm{dist}(S^t(B), B_0) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого ограниченного множества $B \subset H$. Здесь $\mathrm{dist}(B, B_0) = \sup_{y \in B} \{\mathrm{dist}(y, B_0)\}$, $\mathrm{dist}(y, B_0) = \inf_{x \in B_0} \|x-y\|$. Далее нам также потребуется понятие хаусдорфова расстояния: $\mathrm{dist}_H(B, B_0) = \max\{\mathrm{dist}(B, B_0), \mathrm{dist}(B_0, B)\}$.

Минимальное B–притягивающее множество, если такое существует, будем называть *глобальным аттрактором* (минимальным глобальным B–аттрактором, коротко – аттрактором) и обозначать $\mathcal{M}$. В работе рассматриваются ПДС с компактным аттрактором.

В **параграфе 2.2** рассматривается вопрос о непрерывности (сверху и снизу) глобального аттрактора при возмущении оператора задачи.

Пусть разрешающий оператор S^t_λ исходной задачи зависит от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$. При этом $S^t \equiv S^t_{\lambda_0}$, и выполнены условия (α):

Λ – некоторый метрический компакт с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$, и λ_0 является неизолированной точкой Λ. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ соответствующая ПДС $\{S_\lambda, \mathcal{T}_+, H\}$ имеет поглощающее множество B_λ и непустой аттрактор $\mathcal{M}_\lambda$. Существует ограниченное поглощающее множество B_a, содержащее все B_λ.

Будем говорить, что семейство операторов S_λ, $\lambda \in \Lambda$ является *асимптотически слабо сходящимся* в точке λ_0 на поглощающем множестве B_a, если для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall T > 0$ существует δ такое, что в некоторой конечной точке $\tilde{T} \geq T$ имеет место следующая оценка

$$\|S^{\tilde{T}}_\lambda(u) - S^{\tilde{T}}_{\lambda_0}(u)\| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0),\ \forall u \in B_a.$$

Значение λ_0 соответствует исходной (точной) задаче, а случай $\lambda \neq \lambda_0$ представляет собой некоторое приближение. Будем считать, что известна функция (возрастающая) $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_a)$, значение которой есть время притяжения поглощающего множества B_a к ε-окрестности аттрактора $\mathcal{M}_\lambda$, а также обратная к ней функция $\Psi(\lambda, t, B_a)$ скорости притяжения к аттрактору.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (α). Тогда*

1. Если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что существует точка $T_{\lambda_0} \geq \Theta(\lambda_0, \varepsilon, B_a)$, в которой выполняется соотношение

$$\|S^{T_{\lambda_0}}_\lambda(h) - S^{T_{\lambda_0}}_{\lambda_0}(h)\| < \varepsilon \quad \forall h \in B_a,\ \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0),$$

тогда аттрактор семейства ПДС полунепрерывен сверху по параметру λ в точке λ_0, и имеет место оценка

$$\mathrm{dist}(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{M}_{\lambda_0}) \leq 2\varepsilon.$$

2. Если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для любого $\lambda \in O_\delta(\lambda_0)$ существует точка $T_\lambda = T(\lambda) \geq \Theta(\lambda, \varepsilon, B_a)$, в которой выполняется соотношение

$$\|S^{T_\lambda}_\lambda(h) - S^{T_\lambda}_{\lambda_0}(h)\| < \varepsilon \quad \forall h \in B_a,$$

тогда аттрактор ПДС непрерывно зависит от параметра λ в точке λ_0, и имеет место оценка

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{M}_{\lambda_0}, \mathcal{M}_\lambda) = \max\{\mathrm{dist}(\mathcal{M}_{\lambda_0}, \mathcal{M}_\lambda), \mathrm{dist}(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{M}_{\lambda_0})\} \leq 2\varepsilon.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия (α). Пусть последовательность операторов $S_\lambda(\cdot)$ асимптотически слабо сходится в точке λ_0 на множестве B_a. Тогда аттрактор $\mathcal{M}_\lambda$ непрерывно зависит от λ в точке λ_0 тогда и только тогда, когда функция $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_a)$ равномерно ограничена по λ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \sup_{\lambda \in O_{\delta_\varepsilon}(\lambda_0)} \Theta(\lambda, \varepsilon, B_a) \leq T_\varepsilon < \infty.$$

Функцию скорости притяжения к аттрактору удается построить для ПДС градиентного типа. Для удобства будем считать, что оператор задачи $S(\cdot)$ нормирован так, что $\mathrm{diam} B_a \leq d_0$.

Сформулируем необходимые далее условия (β):

β_1) Дискретная полугруппа $\{S^k(\cdot), k \in N_+\}$ на замкнутом подмножестве B_a банахова пространства обладает компактным глобальным аттрактором $\mathcal{M}$.

β_2) Оператор $S(\cdot)$ непрерывен, и константа Липшица на B_a не превосходит L.

β_3) Имеется конечный набор замкнутых окрестностей $\mathcal{O}_i \subset B_a$, $1 \le i \le N$ таких, что $S(\mathcal{O}_i) \cap \mathcal{O}_j = \oslash$ при $i \neq j$. При этом известна убывающая функция $\psi(t,\cdot)$ скорости локального притяжения к аттрактору $\mathcal{M}$ в каждой окрестности, т.е.

$$\mathrm{dist}(S^t(u), \mathcal{M}) \le \psi(t, C\mathrm{dist}(u, \mathcal{M})), \tag{2.23}$$

если $S^\tau(u) \in \mathcal{O}_i$ при $0 \le \tau \le t$.

Функция $\psi(t,d)$ определена при $t \times d = [0,\infty[\times[0,d_0]$, монотонно возрастает при увеличении d, монотонно убывает к нулю при увеличении t. А также выполняются следующие полугрупповые свойства

$$\psi(t_1, \psi(t_2,d)) = \psi(t_1+t_2, d), \quad \psi(t_1, C\psi(t_2,d)) \le C\psi(t_1+t_2,d).$$

Обозначим $\mathcal{O}_0 = B_a \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i$.

β_4) Каждая полная траектория $\left\{S^k(u)\right\}_{k=0}^{\infty}$ содержит в области $\mathcal{O}_0$ не более n_0 точек, n_0 конечно и не зависит от $u \in B_a$, т.е.

$$\mathrm{mes}\Big\{\left\{S^k(u)\right\}_{k=0}^{\infty} \cap \mathcal{O}_0\Big\} \le n_0, \quad \forall u \in B_a.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть для ПДС выполнены условия* (β). *Тогда для произвольного* $t \ge 0$ *имеет место следующая оценка глобальной скорости притяжения к аттрактору:*

$$\mathrm{dist}(S^{2n_0+1+t}(B_a), \mathcal{M}) \le C^{n_0+1} L^{2n_0} \psi(t, r_0), \quad r_0 = \max_{i=1,\dots,n} \mathrm{diam}\mathcal{O}_i.$$

В работе рассмотрена задача построения глобально устойчивых разностных аппроксимаций для модифицированных в смысле О.А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса в 3D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{ rot } \left(\left(\nu + \varepsilon \text{ rot }^2 u\right) \text{ rot } u\right) + u \cdot \nabla u = -\nabla p + f; \tag{2.24}$$

$$\text{div u} = 0;$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0; \quad u(t=0,x) = u_0(x); \quad \Omega \subset R^3, \tag{2.25}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3),\ u = (u_1, u_2, u_3),\ \nu, \varepsilon = const > 0$.
Будем говорить, что функция $g(t,x) \in F(T,\Omega)$, если $g(t,x) \in H_{-1}(\Omega)$ при почти всех $t \in [0,T]$ и $\int\limits_0^T \|g\|_{-1}^2 dt \equiv \|g\|^2_{F(T,\Omega)} < \infty$.

Имеет место

Теорема 2.4. *Пусть* $f, tf_t \in F(T,\Omega)$. *Тогда для любой* $u_0 \in H_0(\Omega)$ *для решения задачи (2.24),(2.25) справедливы следующие оценки:*

$$A_1 \frac{\varepsilon}{\nu} \int\limits_0^t t^2 \|\text{ rot } u_t\|_4^4 dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t t\|u_t\|^2 dt + \frac{\nu}{2} t\|u_x\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} t\|\text{ rot } u\|_4^4$$
$$\le \Phi_2(u, f, t, \nu, \varepsilon, \Omega), \tag{2.26}$$

$$t^2\|u_t\|^2 \le \Phi_4(u, f, t, \nu, \varepsilon, \Omega), \tag{2.27}$$

$$2\varepsilon \int\limits_0^t t^2 \|\text{ rot } u_t\|_4^4 dt + A_2\nu \int\limits_0^t t^2 \|u_{tx}\|^2 dt \le \Phi_5(u, f, t, \nu, \varepsilon, \Omega) \tag{2.28}$$

с некоторыми функциями Φ_i *и абсолютными константами* $A_1, A_2 > 0$. *Если, в частности,* f *не зависит от* t, *то полугруппа* $\{S^t(f), t \ge 0, H_0\}$ *разрешающих операторов задачи (2.24),(2.25) имеет минимальный глобальный* B*-аттрактор* $\mathcal{M}$, *являющийся компактным связным инвариантным подмножеством* $H_0(\Omega)$ *и ограниченным подмножеством* $H_1(\Omega)$. *Для него справедливы неравенства:*

$$\sup_{u \in \mathcal{M}} \left\{\|u_x\|, \frac{\varepsilon}{\nu}\|\text{ rot } u\|_4^4\right\} \le \overline{\Phi}_2(u, f, \nu, \varepsilon, \Omega). \tag{2.29}$$

$$\sup_{u \in \mathcal{M}} \sup_{t \ge 0} \left\{ \|u_t\|, \int\limits_t^{t+1} \|u_{xt}\|^2 dt, \int\limits_t^{t+1} \|\text{ rot } u_t\|_4^4 dt, \right\} \le \overline{\Phi}_5(u, f, \nu, \varepsilon, \Omega). \tag{2.30}$$

Множество $\mathcal{M}$ *имеет конечную размерность и конечное число определяющих мод.*

Полученная теорема переносится на разностные аппроксимации системы уравнений (2.24),(2.25), что позволяет доказать глобальную устойчивость соответствующих конечномерных задач.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная фундаментальная система в $H_1(\Omega)$, и $u^m(t,x) = \sum\limits_{i=0}^{m} c_k^m(t)\varphi_k(x)$ – определяемые по ней приближения:

$$(u_t^m, \varphi_k) + \left(\left(\nu + \varepsilon \text{ rot }^2 u^m\right) \text{ rot } u^m, \text{ rot } \varphi_k\right) + (u^m \cdot \nabla u^m, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \tag{2.31}$$

$u^m(0,x) = u_0^m(x)$, $u_0^m(x)$ сходятся к $u_0(x)$ в норме $H_0(\Omega)$ при $m \to \infty$.
Пусть $\lambda \equiv h = m^{-1}$, $\lambda_0 = 0$.

Теорема 2.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $h(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < h \le h(\varepsilon)$ аттракторы $\mathcal{M}_h$ задачи (2.31) располагаются в ε-окрестности аттрактора $\mathcal{M}$ задачи (2.24). Для элементов аттрактора $\mathcal{M}_h$ имеют место аналоги оценок (2.29),(2.30).*

В третьей главе, состоящей из трех параграфов, рассматриваются методы численного построения устойчивого и неустойчивого многообразий, а также методы аппроксимации глобального аттрактора. Данный раздел основывается на теоретических конструкциях и доказанных ранее результатах. Отметим, что разнообразие рассматриваемых далее численных алгоритмов обусловлено разнообразием возможных математических постановок задач. Специфика конкретной задачи определяет выбор метода.

В **параграфе 3.1** строится классификация известных методов проектирования на устойчивое многообразие в окрестности неподвижной точки, и формулируются новые алгоритмы. Пусть $\mathcal{O}$ является окрестностью неподвижной точки $z_0 = 0$, и выполнены условия (a). Рассмотрим задачу приближенного проектирования заданного элемента $a \in \mathcal{O}$ на устойчивое инвариантное многообразие $\mathcal{W}^-$ при условии, что допустимое смещение берется из подпространства $P_+\mathcal{O}$. Это соответствует построению такого $u = v + w$, что $w = P_-a$, $v \in P_+\mathcal{O}$ и u близко к многообразию $\mathcal{W}^-$. Будем искать многообразие $\mathcal{W}^-$ в виде $v = f(w)$, где функция f из класса $B_\gamma(\mathcal{O})$. Выпишем условие (I) инвариантности устойчивого многообразия $\mathcal{W}^-$ относительно оператора S:

$$S_+\Big(f(w) + w\Big) = f\Big(S_-(f(w) + w)\Big), \qquad (I)$$

это эквивалентно $L_+f(w) + R_+(f(w) + w) = f\Big(L_-w + R_-(f(w) + w)\Big)$. Рассматриваемые далее алгоритмы являются приближенными методами решения данного нелинейного уравнения.

(1). **Метод нулевого приближения.** Заменим исходный оператор S на его линеаризацию L в нулевой точке и построим проекцию элемента a на устойчивое многообразие полученной линейной задачи. Устойчивое многообразие оператора L совпадает с подпространством $P_-\mathcal{O}$, следовательно $u = P_-a$. В этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|L^n u\| = 0$.

(2). **Метод линеаризации.** Выделим линейное приближение оператора S в заданной точке a, тогда $S(u) = Lu + L_a u + R_a(u)$. Построим проекцию элемента a на устойчивое многообразие данной линеаризации, т.е. на устойчивое подпространство оператора $L + L_a$. В этом случае для найденной точки $u = P_-a + v$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|\big(L + L_a\big)^n u\| = 0$.

(3). **Линейный метод сжимающих отображений.** Для решения нелинейного уравнения (I) относительно функции $f(w) \in B_\gamma(\mathcal{O})$, задающей устойчивое многообразие, рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$L_+f_{k+1}(w) + R_+(f_k(w) + w) = f_k\Big(L_-w + R_-(f_k(w) + w)\Big), \quad f_0(w) \equiv 0.$$

Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u = w + f_k(w)$, где $w = P_-a$.

Сходимость метода в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ в гиперболическом случае следует из теоремы 1.2.

(4). **Метод функционально–аналитических рядов.** Пусть $H = R^{M+N}$, $v = [v_1, \ldots, v_M]$, $w = [w_1, \ldots, w_N]$, и нелинейные члены оператора S имеют полиномиальный вид $R_\pm(v + w) = \sum\limits_{i,j\ge 0} r^\pm_{ij} v^i w^j$, где $i = i_1 \ldots i_M, j = j_1 \ldots j_N$ представляют собой мультииндексы. Будем искать $f(w)$ в виде следующего функционально–аналитического ряда $f(w) = f_0 + f_1(w) + f_2(w,w) + f_3(w,w,w) + \ldots$ по степеням w с неизвестными полилинейными функциями f_i. Пусть $\Pi_k\left[f(w)\right] = f_0 + f_1(w) + f_2(w,w) + \cdots + f_k(w,\ldots,w)$. Построим проекцию элемента a на приближение $\Pi_k\left[f(w)\right]$ в виде $u = w + \Pi_k\left[f(w)\right]$, где $w = P_-a$.

(5). **Нелинейный метод сжимающих отображений.** Для решения нелинейного уравнения (I) рассмотрим следующий неявный итерационный процесс

$$L_+f_{k+1}(w) + R_+(f_{k+1}(w) + w) = f_k\big(L_-w + R_-(f_k(w) + w)\big), \quad f_0(w) \equiv 0,$$

являющийся обобщением метода (3). Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u = w + f_k(w)$, где $w = P_-a$.

Сходимость метода в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ в гиперболическом случае следует из теоремы 1.2.

(6). **Метод нелинейного уравнения.** Перепишем условие инвариантности (I) для n–ой степени оператора S. Для решения полученного уравнения относительно $f(w)$ рассмотрим неявный метод типа (5): $S_+^n\big(f_{k+1}(w)+w\big)=f_k\big(S_-^n(f_k(w)+w\big)$. Построим проекцию элемента a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u=w+f_k(w)$, где $w=P_-a$. Верна

Теорема 3.1. *Пусть нулевая точка является гиперболической неподвижной точкой оператора S. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ метод нелинейного уравнения разрешим для всех $n\geq 0$. Последовательность функций $f_{1,n}$ сходится в пространстве $B_\gamma(\mathcal{O})$ со скоростью геометрической прогрессии к функции f, определяющей устойчивое многообразие.*

(7). **Метод обратной итерации.** Запишем условие инвариантности для n–ой степени оператора S. Для решения полученной задачи применим следующий неявный метод:

$$S_+^n\big(f_{k+1}(w)+w\big)=f_k\big(S_-^n(f_{k+1}(w)+w)\big),\ k=0,1,2,\dots$$

с начальной функцией $f_0\in B_\gamma(\mathcal{O})$. Построим проекцию a на найденное приближение $f_k(w)$ в виде $u=w+f_k(w)$, где $w=P_-a$. Верна

Теорема 3.2. *Пусть нулевая точка является гиперболической. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ метод обратной итерации разрешим при всех k. Последовательность функций f_k сходится в пространстве $B_\gamma(\mathcal{O})$ со скоростью геометрической прогрессии к функции f, определяющей устойчивое многообразие.*

В работе также рассматривается задача приближенного проектирования элемента $a\in\mathcal{O}$ на устойчивое инвариантное многообразие $\mathcal{W}^-$ при условии, что допустимое смещение берется из заданного подпространства $\mathcal{L}=<e_1,\dots,e_{i_0}>$. Это соответствует построению последовательности элементов $u_n\subset\mathcal{O}$ таких, что $u_n=a+\sum_{i=1}^{i_0}c_i^{(n)}e_i$, и u_n близки к множеству $\mathcal{W}^-$. Предлагаются итерационные алгоритмы для решения данной задачи, на основе результатов первой главы доказывается разрешимость и сходимость.

Далее, в терминах решения задач (ff), (lf) соответствующие алгоритмы проектирования на многообразие $\mathcal{W}^-(z_0)$ обобщаются на случай седловой траектории $\{S^i(z_0)\}$. Условия разрешимости и сходимости получены и доказаны в теоремах 1.4-1.11 первой главы.

В **параграфе 3.2** рассмотрена задача приближенного проектирования на неустойчивое инвариантное многообразие подмножества

$\mathcal{O}$. Выпишем условие (II) инвариантности устойчивого многообразия $\mathcal{W}^+$ относительно оператора S:

$$L_-g(v)+R_-(g(v)+v)=g\Big(L_+v+R_+(g(v)+v)\Big).\qquad (II)$$

Для решения уравнения (II) относительно $g(v)$ выпишем следующий итерационный процесс:

$$g_{n+1}\left(S_+(g_n(v)+v)\right)=S_-\left(g_n(v)+v\right).\qquad (3.32)$$

В этом случае для нахождения $g_{n+1}(v)$ при заданном v и построенном приближении $g_n(v)$ требуется решить относительно v_{n+1} следующее нелинейное уравнение

$$L_+v_{n+1}+R_+(v_{n+1}+g_n(v_{n+1}))=v\qquad (3.33)$$

и определить $g_{n+1}(v)=S_-\left(g_n(v_{n+1})+v_{n+1}\right)$.

Теорема 3.3. *Пусть нулевая точка является гиперболической. Тогда в некоторой окрестности для произвольного $v\in P_+\mathcal{O}$ и произвольной функции $g_0(v)\in A_\gamma(\mathcal{O}')$ итерационный процесс (3.32) сходится к неустойчивому многообразию со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q<1$, не зависящем от v:*

$$\|P_-[g(v)-u_k(v)]\|\leq q^k\|P_-[g(v)-u_0(v)]\|,\quad u_k(v)=g_k(v)+v.$$

Далее, в терминах решения задач (gg), (lg) соответствующие алгоритмы проектирования на многообразие $\mathcal{W}^+(z_0)$ обобщаются на случай седловой траектории $S^i(z_0)$. Условия разрешимости и сходимости соответствующих итерационных процессов получены и обоснованы в теоремах 1.12–1.16 первой главы.

В **параграфе 3.3** рассматривается метод полной аппроксимации глобального аттрактора. Суть метода заключается в нахождении образа некоторой ε–сети для поглощающего множества B_a. В терминах функции скорости притяжения формулируются оценки точности аппроксимации.

В четвертой главе, состоящей из четырех параграфов, приводятся результаты расчетов по аппроксимации устойчивых и неустойчивых многообразий и полной аппроксимации глобального аттрактора для различных полудинамических систем.

В **параграфах 4.1, 4.2** решается задача приближенного проектирования на устойчивое многообразие в окрестности стационарной либо нестационарной точки для разностных аппроксимаций следующих задач: системы уравнений Лоренца, уравнения Чафе–Инфанта

(1D, 2D, окрестность стационарной и нестационарной точки), уравнения типа Бюргерса (1D, 2D, система двух уравнений в 2D, окрестность стационарной и нестационарной точки), системы уравнений типа Навье–Стокса 2D. Отметим, что проектирование на устойчивое многообразие по сути означает решение задачи асимптотической стабилизации по начальным условиям.

В **параграфе 4.3** приводятся результаты расчетов по проектированию на неустойчивое многообразие в окрестности неподвижной точки для конечно–разностного аналога системы Лоренца и уравнений типа Навье–Стокса 2D. Напомним, что решение данной задачи позволяет аппроксимировать с гарантированной точностью отрезки нетривиальных траекторий глобального аттрактора (если аттрактор существует) соответствующих полудинамических систем.

В **параграфе 4.4** приводятся результаты расчетов (без оценки точности) полной аппроксимации глобального аттрактора для системы Лоренца и уравнения Чафе–Инфанта 1D.

В заключении кратко формулируются основные результаты диссертационной работы.

Выделим главный результат диссертационной работы.

Предложен и строго обоснован метод глобального численного исследования динамики нестационарной системы с близкими начальными условиями и метод изучения качественного поведения системы для некоторого достаточно широкого множества начальных условий. Основу разработанного метода составляют теоремы существования инвариантных многообразий в окрестности траектории седлового типа и теоремы о непрерывности глобального аттрактора, а также методика доказательства соответствующих теорем, позволяющая построить и обосновать эффективные численные алгоритмы.

Публикации по теме диссертации

1. *Kornev A.A.* On New a priori Estimates for One Mathematical Model for Turbulence Flow and Their Applications in Numerical Simulation. Department of mathematics university of Nijmegen, The Netherlands, 1997. Report 9727. P. 1-13.

2. *Kornev A.A.* On the continuity property for an attractor of a semidynamical system with a parameter. Department of mathematics university of Nijmegen, The Netherlands, 1999. Report 9917. P. 1-9.

3. *Корнев А.А.* Об одном критерии полной непрерывности аттрактора по параметру для некоторого класса полудинамических систем // ДАН. 1999. Т. 369, N.5. С. 597-599.

4. *Корнев А.А.* К вопросу об аппроксимации аттракторов полудинамических систем // Вестник МГУ. сер. матем. механика. 2000. N.3. С. 24-28.

5. *Корнев А.А.* О новых оценках для модифицированных уравнений Навье-Стокса в областях с негладкой границей в трехмерном пространстве // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, вып.4. С. 1121-1129.

6. *Корнев А.А.* Об аппроксимации аттракторов полудинамических систем // Матем. сборник. 2001. Т. 192, N.10. С. 19-32.

7. *Kornev A.A., Roganof V.A., Slepuhin A.F.* On an unstable manifold and approximation attractor of a semidynamical system on a parallel computer under a T-system. Department of mathematics university of Nijmegen, The Netherlands, 2001. Report 0104. P. 1-14.

8. *Корнев А.А.* О неустойчивых многообразиях в окрестности существенно негиперболической точки // ДАН. 2001. Т. 377, N.6. С. 743-745.

9. *Корнев А.А.* К общей теории устойчивости полудинамических систем// Доклады РАН. 2002. Т. 387, N.1. С. 13-15.

10. *Kornev A.A.* On globally stable dynamical process // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. V. 17, N.5. P. 427-436.

11. *Корнев А.А.* Об устойчивости полудинамических систем // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского, N.20, Численные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. - Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. С. 3-36.

12. *Корнев А.А.* Об итерационном методе построения "усов Адамара"// ЖВМиМФ. 2004. Т. 44, N.8. С. 1346-1355.

13. *Корнев А.А.* Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // Доклады РАН. 2005. Т. 400, N.6, С. 736-738.

14. *Корнев А.А., Озерицкий А.В.* О приближенном проектировании на устойчивое многообразие // ЖВМиМФ. 2005. Т. 45, N.9. С. 1580-1586.

15. *Корнев А.А.* Метод асимптотической стабилизации по начальным данным к заданной траектории // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46, N.1. С. 37-51.

Подписано в печать 17.01.2006 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 2 п.л.
Заказ 7 Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД В 04059
от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета