

Фадеев Ростислав Юрьевич

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
АТМОСФЕРНОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ  
ПОЛУЛАГРАНЖЕВОГО МЕТОДА

25.00.29 — Физика атмосферы и гидросферы

Автореферат

*диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук*

Москва  
2009

Работа выполнена в  
Учреждении Российской академии наук  
Институте вычислительной математики РАН

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н. Толстых М.А.

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор Н.Ф. Вельтищев  
кандидат физико-математических наук А.В. Глазунов

**Ведущая организация:**

Учреждение Российской академии наук  
Институт вычислительной математики и  
математической геофизики СО РАН

Защита состоится « 18 » декабря 200 9 г. в 15.30 часов  
на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Учреждении Рос-  
сийской академии наук Институте вычислительной математики РАН по  
адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Рос-  
сийской академии наук Институте вычислительной математики РАН

Автореферат разослан « 12 » ноября 200 9 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета Д 002.045.01  
доктор физико-математических наук

Г. А. Бочаров

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Научные исследования, мониторинг и предсказание климата, по мнению Всемирной Метеорологической Организации (ВМО), являются ключевыми элементами смягчения влияния последствий изменения климата на жизнедеятельность человека. Согласно резолюции международного саммита по моделированию климата в XXI веке, состоявшемся в 2008 году, основная задача научного сообщества заключается в консолидации усилий по созданию системы численного прогнозирования климата с высоким пространственным разрешением.

Развитие высокопроизводительных компьютеров с параллельной архитектурой позволяет уже сейчас разрабатывать модели климата с горизонтальным разрешением в несколько километров. Таким образом, практически исчезает граница между блоком климатической модели, ответственным за воспроизведение динамики атмосферы, и динамическим блоком современной глобальной системы численного прогноза погоды.

Уравнения гидротермодинамики модельной атмосферы должны быть согласованы с выбранным разрешением. До недавнего времени в большинстве моделей атмосферы использовалось гидростатическое приближение («приближение длинных волн»), которое предполагает малость вертикальных ускорений по сравнению с ускорением свободного падения. Подобное допущение может нарушаться при шаге сетки по горизонтали 10 км и менее. Поэтому одним из важных направлений развития климатической модели ИВМ РАН (Дымников, 2005)<sup>1</sup> и глобальной модели прогноза погоды ПЛАВ (Толстых, 2001)<sup>2</sup> является создание нового негидростатического блока, ответственного за воспроизведение динамики атмосферы с высоким пространственным разрешением. В качестве одного из основных численных методов в новой версии этих моделей предполагается использовать полулагранжев подход.

Высокое пространственное разрешение модели атмосферы требует применения сеток с квазиоднородным разрешением на сфере. Традиционно применяемая широтно-долготная сетка характеризуется сгущением узлов вблизи полюсов вследствие сходимости меридианов. При разрешении по широте 10 км шаг сетки по долготе в окрестности полюса составляет около 150 м. Этот недостаток приводит к существенному ограничению на число Куранта в эйлеровых моделях и неоправданным затратам на расчет «лишних» узлов сетки (до 20 %).

---

<sup>1</sup> Дымников В.П., Лыков В.Н. и др. Моделирование климата и его изменений // М.: Наука, 2005, Т. 2, С. 38 - 175.

<sup>2</sup> Толстых М.А. Полулагранжева модель атмосферы с высоким разрешением для численного прогноза погоды // Метеорология и гидрология. 2001. N 4. С. 5–16.

Для решения перечисленных проблем в последние годы в некоторых спектральных моделях атмосферы стали применяться редуцированные сетки. Разработка и реализация численных схем на таких сетках значительно проще по сравнению с икосаэдральной сеткой, сеткой типа Инь-Янь (Yin-Yang) и «кубическая сфера». Редуцированные сетки, построенные по разработанному автором алгоритму, предполагается использовать в глобальной модели прогноза погоды ПЛАВ. Кроме того, такие сетки могут применяться в климатической модели ИВМ РАН нового поколения.

**Цели диссертационной работы.** Реализация трехмерной модели атмосферы является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому в качестве первого шага из общего числа задач, решение которых требуется для создания нового динамического блока, ответственного за воспроизведение динамики атмосферы, мы выбрали две основные проблемы. Первая – физическая. Она заключается в:

- разработке негидростатической модели динамики атмосферы и воспроизведении с помощью ее двумерной в вертикальной плоскости версии процесса обтекания орографической неоднородности потоком невязкого газа при различных характеристиках земного рельефа, атмосферы и скорости потока.

Вторая проблема, решение которой обсуждается в диссертации, является математической:

- Разработка алгоритма построения покрывающей земной шар сетки с квазиоднородным разрешением. Исследование точности решения уравнения переноса и уравнений мелкой воды на сфере для таких сеток.

#### **Научная новизна работы.**

- Предложен усовершенствованный метод численного решения негидростатических уравнений гидротермодинамики квазисжимаемой атмосферы, основанный на работе (Rööm, 2007)<sup>3</sup>. Обсуждаемый в диссертации алгоритм обладает большим запасом устойчивости по сравнению с (Rööm, 2007) за счет использования двуслойной по времени полулагранжевой схемы SETTLS (Hortal, 2002)<sup>4</sup>. Метод расчета геопотенциала, предложенный в диссертации, имеет меньшую численную ошибку.

---

<sup>3</sup>Rööm R., Männik A., Luhamaa A. Non-hydrostatic semi-elastic hybrid-coordinate SISL extension of HIRLAM. Part I: Numerical scheme // Tellus. 2007. V. 59A. P. 650–660

<sup>4</sup>Hortal M. The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model // Q.J.R. Meteorol. Soc. 2002. V. 128. P. 1671–1687.

- Насколько известно автору, в работе выполнено наиболее полное сравнение характеристик орографически возбуждаемых волн, рассчитанных моделью квазисжимаемой атмосферы и моделями, основанными на уравнениях сжимаемой атмосферы. Показано, что процесс обтекания изолированной горы, отношение высоты которой к ее полуширине не превышает 0.25, с хорошей степенью точности может быть описан на основе негидростатических уравнений гидротермодинамики квазисжимаемой атмосферы.
- Разработан алгоритм построения оптимальной редуцированной широтно-долготной сетки для глобальной полулагранжевой конечно-разностной модели атмосферы.
- На основе численных экспериментов показано, что точность решения уравнения переноса (адвекции) на сфере, полученного с помощью полулагранжевого метода, является монотонной функцией относительного уменьшения числа узлов оптимальной редуцированной сетки по сравнению с регулярной сеткой.

#### **Практическая значимость работы.**

- Повышение пространственного разрешения является одним из важных направлений развития климатических моделей. Трехмерная версия представленной в настоящей диссертации негидростатической модели высокого разрешения может быть использована в качестве блока, ответственного за воспроизведение динамики атмосферы, в новой версии климатической модели ИВМ РАН и модели прогноза погоды ПЛАВ.
- Орографические волны оказывают значительное влияние на глобальную циркуляцию в атмосфере, являются одним из погодообразующих факторов. Поэтому воспроизведение таких колебаний является важным элементом проверки разрабатываемых моделей динамики атмосферы.
- Создание модели климатической системы нового поколения с высоким пространственным разрешением приводит к необходимости использования сеток с квазиоднородным разрешением на сфере. В диссертации в качестве такой сетки предлагается использовать оптимальную редуцированную сетку, построенную по разработанному автором алгоритму.

**Апробация работы.** Материалы, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики, ГУ «Гидрометцентр России». Они докладывались на Весеннем коллоквиуме по моделированию погоды и климата

(Триест, Италия, 2005), Международной конференции по вычислительно-информационным технологиям для окружающей среды «CITES-2007» (Томск, 2007), Международной конференции по решению уравнений в частных производных на сфере (Экзетер, Англия, 2007), Семнадцатой международной конференции по негидростатическому моделированию (Бад-Орб, Германия, 2007), Международной конференции по наблюдению, моделированию и информационным системам для окружающей среды «ENVIROMIS-2008» (Томск, 2008), Научной школе-семинаре «Современные технологии прогнозирования погоды» (Москва, 2008), 49, 50 и 51-й научной конференциях МФТИ (Москва, 2006–2008), Научной конференции, посвященной 175-летию гидрометслужбы России (Москва, 2009), Международной конференции по вычислительно-информационным технологиям для окружающей среды «CITES-2009» (Красноярск, 2009). Полностью диссертация докладывалась на семинарах ИВМ РАН и ГУ «Гидрометцентр России».

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 2 статьи в реферируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ, 1 статья в реферируемом журнале, 6 работ в сборниках тезисов.

**Личный вклад автора.**

- Разработка и реализация алгоритма численного решения негидростатических уравнений квазисжимаемой атмосферы на основе метода, предложенного в (Rööt, 2007).
- Воспроизведение процесса обтекания изолированной горы потоком невязкого газа на основе реализованной модели. Сопоставление результатов численных расчетов с аналитическим решением и работами других авторов.
- Разработка и реализация алгоритма построения редуцированной широтно-долготной сетки для полулагранжевой конечно-разностной модели атмосферы.
- Исследование точности решения уравнения переноса в зависимости от относительного уменьшения числа узлов оптимальной редуцированной сетки по сравнению с регулярной широтно-долготной сеткой.
- Расчет редуцированных сеток для проведения экспериментов на основе модели мелкой воды на сфере.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации – 124 страницы, она содержит кроме основного текста 15 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 132 наименований.

# СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во Введении отображена актуальность темы диссертационной работы, сформулированы основные цели. Показана научная новизна и практическая значимость работы.

В первой главе обсуждаются негидростатические уравнения гидротермодинамики атмосферы в квазисжимаемом приближении положенные в основу реализованной автором модели и численный алгоритм их решения.

В разделе 1.1 рассматриваются трехмерные негидростатические уравнения гидротермодинамики атмосферы. Краткий обзор методов численного решения таких уравнений применительно к задаче прогноза погоды приводится в разделе 1.2. В разделе 1.3 негидростатические уравнения движения, притока тепла и неразрывности записываются в приближении квазисжимаемой жидкости (White, 1989)<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{U}}{dt} &= -g\nabla_p z - f\mathbf{k} \times \mathbf{U}, \\ \frac{dw}{dt} &= g(1 - \rho), \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt}, \\ -\nabla_p \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Для этого плотность  $\rho$ , нормированная на ускорение свободного падения  $g$ , в исходных уравнениях гидротермодинамики атмосферы всюду полагается равной единице за исключением слагаемого в правой части уравнения движения для вертикального компонента скорости  $w = dz/dt$ .  $\omega = dp/dt$  представляет собой скорость в системе, основанной на давлении  $p$ .

В уравнениях (1)  $R$  – газовая постоянная,  $c_v$  и  $c_p$  – удельные теплоемкости сухого воздуха при постоянном объеме и давлении, соответственно ( $c_p - c_v = R$ ),  $f$  – параметр Кориолиса, а единичный вектор  $\mathbf{k}$  направлен перпендикулярно поверхности от центра Земли. Оператор  $\nabla_p$  представляет собой градиент при постоянном значении давления  $p$ . Остальные обозначения стандартны.

Известно (White, 1989), что для адиабатических процессов в идеальной атмосфере существует взаимосвязь между вертикальными скоростями  $\omega = dp/dt$  в  $p$ -системе и  $w = dz/dt$  в  $z$  системе:

$$w = -\frac{RT}{g p} \frac{\omega}{p}.\tag{2}$$

---

<sup>5</sup>White A.A. An extended version of nonhydrostatic, pressure coordinate model // Q.J.R. Meteorol. Soc. 1989. V. 119. P. 1243–1251.

Формула (2) позволяет преобразовать уравнения (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{p^2}{H^2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{c_v}{c_p} \frac{\omega^2}{p}, \\
 \frac{d\mathbf{U}}{dt} &= -\nabla_p \Phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{U}, \\
 \frac{dT}{dt} &= \frac{R}{c_p} \frac{T\omega}{p}, \\
 \nabla_p \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $\varphi$  является негидростатической частью геопотенциала  $\Phi$ . Величина  $H = RT/g$ .

Система уравнений (3) в двумерном (в вертикальной плоскости) случае была положена в основу реализованной модели атмосферы. Для их решения используется полунявный конечно-разностный подход в сочетании с полулагранжевым представлением адвекции. Полунявный подход предполагает задание линейного оператора для уравнений (3) таким образом, чтобы оставшаяся нелинейная часть могла быть устойчиво проинтегрирована по явной схеме. Линейная часть в этом случае интегрируется неявно. Для построения линейного оператора модели в разделе 1.4 вводится неизменное во времени фоновое состояние атмосферы. Уравнения модели дискретизируются на равномерной несмещенной по горизонтали и неравномерной по вертикали сетке. В качестве вертикальной координаты в модели используется  $\sigma$ -координата, основанная на гидростатическом давлении.

В разделе 1.5 обсуждается алгоритм численного решения уравнений модели (3). Основное внимание в разделе уделяется отличиям от метода решения уравнений квазисжимаемой атмосферы, предложенной в (Rööt, 2007), взятого за основу при разработке численной модели. Перечислим наиболее важные отличия:

- Вместо классической двуслойной полулагранжевой схемы и менее точного децентрирования первого порядка в рассматриваемой модели применяется более устойчивая двуслойная по времени полулагранжева схема SETTLS (Hortal, 2002) с децентрированием псевдоторного порядка.
- Для подавления метрической ошибки, связанной с неортогональностью системы координат (используется  $\sigma$ -координата по высоте), расчет лагранжевых траекторий проводится в  $z$ -системе.



- Уравнения модели дискретизируются на несмещенной по горизонтали сетке, более удобной для применения полулагранжевой схемы. Использование горизонтальной дивергенции в качестве прогностической переменной позволяет получить те же зависимости фазовых и групповых скоростей от волнового числа, что и для смещенной сетки (см. Randall, 1994) <sup>6</sup>, которая применяется в (Rööt, 2007). Горизонтальный компонент скорости в таком случае восстанавливается из горизонтальной дивергенции.
- В модели реализован более точный алгоритм расчета значения геопотенциала. Вычисление производных по горизонтали проводится с помощью конечных разностей четвертого порядка точности.

В разделе 1.6 обсуждаются граничные условия модели. Поскольку атмосфера предполагается адиабатической, на поверхности Земли используется условие свободного скольжения. На верхней границе расчетной области применяется условие непротекания («твердой крышки»). По горизонтали используются периодические условия с релаксацией Девиса на боковых границах.

**Во второй** главе рассматриваются результаты численных экспериментов, выполненных с помощью двумерной в вертикальной плоскости версии модели, представленной в первой главе диссертации. Проводится сопоставление результатов расчетов с работами других авторов.

Состояние модельной атмосферы в начальный момент времени в значительной степени определяет динамику моделируемого процесса. Поэтому раздел 2.1 второй главы посвящен методологии инициализации модели.

Результаты моделирования поведения сферически симметричного возмущения потенциальной температуры в изопотенциальной атмосфере обсуждаются в разделе 2.2. Результаты эксперимента находятся в согласии с расчетами, выполненными на основе негидростатической модели сжимаемой атмосферы WRF–NMM (Janjic, 2001) <sup>7</sup>. Отметим больший используемый шаг по времени по сравнению с эйлеровой конечно–разностной моделью WRF–NMM (2 с против 0,3 с). Эксперименты показали возможность увеличения шага по времени вплоть до 30 с без потери устойчивости.

Остальная часть второй главы посвящена моделированию процесса обтекания изолированной горы потоком невязкого газа. Обзор методов, применяющихся для изучения такого процесса, проводится в разделе 2.3. В

---

<sup>6</sup>Randall D.A. Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow water equations // Mon. Wea. Rev. 1994. V. 122. P. 1371–1377.

<sup>7</sup>Janjic Z.I., Gerrity J.P., Nickovic S. An alternative approach to nonhydrostatic modeling // Mon. Wea. Rev. 2001. V. 129. N. 5. P. 1164–1178.

разделе 2.4 перечисляются безразмерные переменные, характеризующие процесс обтекания изолированной горы.

В разделе 2.5 обсуждаются результаты воспроизведения орографических волн, образующихся в процессе взаимодействия набегающего потока и изолированной горы. Высота горы  $H$ , ее полуширина  $a$  и скорость набегающего потока  $u^0$  таковы, что отношение вертикального ускорения в потоке к ускорению свободного падения  $g$  в рассматриваемых экспериментах не превышает  $10^{-4}$ . Такой процесс с достаточной степенью точности может быть описан в рамках гидростатического приближения. Результаты расчетов находятся в согласии с аналитическим решением и работами других авторов, выполненных с помощью моделей сжимаемой атмосферы WRF-NMM и MC2 (Pinty, 1995) <sup>8</sup>.

В разделе 2.6 обсуждаются результаты моделирования процесса обтекания в негидростатическом режиме. Рассматривается два эксперимента. В первом случае высота горы составляет 500 м, а ее полуширина – 2000 м. Скорость набегающего потока  $u^0 = 10$  м/с. На рис. 1 проиллюстрированы изолинии отклонения горизонтального компонента скорости от его фонового значения  $u^0$  в сравнении с аналитическим решением. Момент времени на рис. 1а соответствует 6600 секундам, что составляет 660 шагов по времени для  $\Delta t$  равного 10 с. В качестве сравнения можно привести эйлерову конечно-разностную модель WRF-NMM, в которой при тех же условиях теста применяется шаг по времени  $\Delta t = 1,2$  с.

Можно констатировать качественное согласие картины изолиний с результатами других авторов. Полученная амплитуда волн несколько меньше в сравнении с аналитическим решением и результатами упомянутых работ, полученных при тех же условиях теста. Эксперименты показали, что увеличение пространственного разрешения модели позволяет получить лучшее соответствие амплитуд численного и аналитического решений.

Нелинейный негидростатический режим обтекания горы представлен на рис. 2 ( $H = 100$  м,  $a = 500$  м,  $u^0 = 14$  м/с). Шаг интегрирования по времени  $\Delta t = 10$  с (для сравнения, в модели MC2, основанной на полулагранжевой полунявной схеме,  $\Delta t = 4$  с). Отклонение значений горизонтального (рис. 2а) и вертикального (рис. 2б) компонентов скорости демонстрирует характерные для негидростатических волн нисходящие потоки, что находится в согласии с (Pinty, 1995). Относительно небольшая ширина горы ( $a = 500$  м) по сравнению с шагом сетки по горизонтали ( $\Delta x = 100$  м) приводит к искривлению изолиний горизонтальной скорости на рис. 2 и нарушению целостной структуры волн. Увеличение про-

---

<sup>8</sup>Pinty J-P., et al. Simple tests of a semi-lagrangian model on 2D mountain wave problems. // Mon. Wea. Rev. 1995. V. 123. P. 3042–3058.

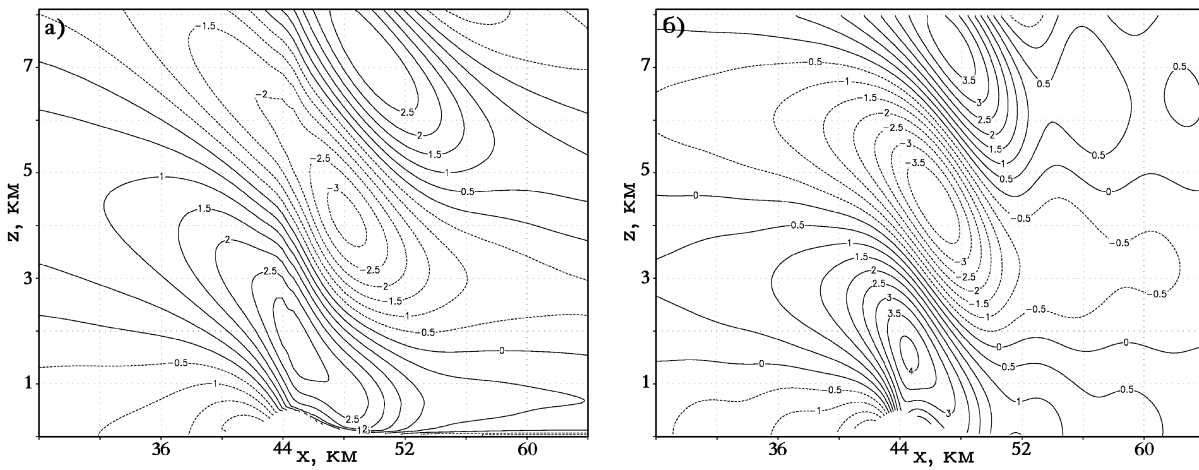


Рис. 1. Результаты расчетов рассматриваемой модели (а) в сравнении с аналитическим решением (б). Негидростатический нелинейный режим.  $H = 500$  м.  $a = 2000$  м. Скорость набегающего потока  $u^0$  составляет 10 м/с. Сетка в эксперименте характеризуется 400 узлами по горизонтали (с шагом  $\Delta x = 400$  м) и 151 узлом по вертикали.

странственного разрешения вдвое устраняет подобный эффект.

Численные эксперименты, результаты которых рассматриваются во второй главе диссертации, демонстрируют согласие с работами других авторов, выполненных с помощью моделей сжимаемой атмосферы. Это позволяет надеяться на получение физически правильных решений при воспроизведении негидростатических процессов в атмосфере на основе реализованной модели атмосферы, в том числе, ее трехмерной версии.

Высокое пространственное разрешение глобальной модели динамики атмосферы требует применения сеток с квазиоднородным разрешением на сфере. Таким образом, задача построения такой сетки предшествует реализации трехмерной версии модели, представленной в первой главе диссертации.

В третьей главе диссертации обсуждается разработанный автором метод построения редуцированной широтно-долготной сетки для полулагранжевой конечно-разностной модели атмосферы. Шаг по долготе таких сеток является функцией широты, за счет чего удастся избежать сгущения узлов в окрестности полюсов (следствие сходимости меридианов). На основе анализа точности решения уравнения переноса (адвекции) и уравнений мелкой воды на сфере в главе проводится сравнение редуцированных сеток.

В первом разделе третьей главы рассматриваются квазиоднородные сетки на сфере, применяемые в современных моделях атмосферы. Обсуждаемая в диссертации модель динамики атмосферы использует полулагранжев конечно-разностный подход для решения уравнений гидротер-

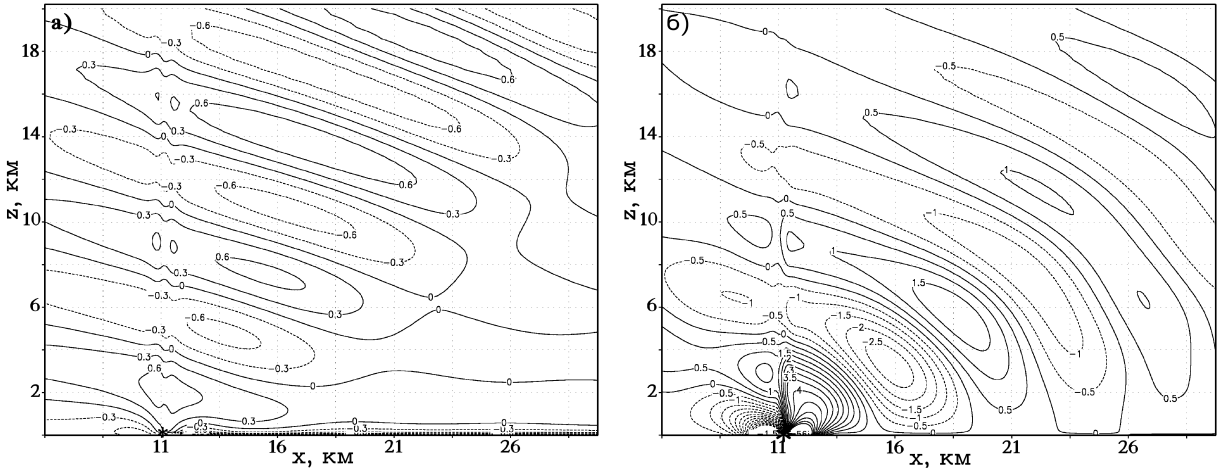


Рис. 2. Изолинии отклонения горизонтального (а) и вертикального (б) компонент скорости от их фонового значения в момент времени 6000 с. Негидростатический нелинейный режим.  $H = 100$  м.  $a = 500$  м. Скорость набегающего потока  $u^0$  составляет 14 м/с. Сетка в эксперименте характеризуется 400 узлами по горизонтали (с шагом  $\Delta x = 100$  м) и 151 узлом по вертикали.

модинамики атмосферы. Аналогичные численные методы предполагается использовать в рамках новой версии климатической модели ИВМ РАН. В разделе 3.2 показано, что одним из основных источников ошибки полугранжированной схемы является погрешность интерполяции. Поэтому в качестве основы алгоритма построения редуцированной сетки, сформулированного в разделе 3.3, используется интеграл от относительного отклонения среднеквадратичной ошибки интерполяции  $\Phi$  на сфере от вычисленного на регулярной сетке (обозначается  $\Phi_0$ ) для центральной функции  $f$ . Центральными мы будем называть функции на сфере, зависящие только от одной переменной  $d(\lambda_0, \varphi_0, \lambda, \varphi)$  – расстояния от фиксированной точки  $(\lambda_0, \varphi_0)$  (центра функции) до точки  $(\lambda, \varphi)$ . Здесь  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта на сфере. Без ограничения общности, положим  $\lambda_0$  равным нулю.

Оптимальной мы назовем сетку с минимальным числом узлов среди всех редуцированных сеток, удовлетворяющих следующему соотношению:

$$\int_0^{\pi/2} |\Phi - \Phi_0| d\varphi_0 \Big/ \int_0^{\pi/2} \Phi_0 d\varphi_0 \leq \epsilon_\Phi / 100. \quad (4)$$

Значение  $\epsilon_\Phi$  и центральная функция  $f$  предполагаются заданными.

Сравнение оптимальных сеток и нескольких редуцированных сеток, предложенных другими авторами, проводится в разделе 3.4. Показано, что для оптимальных сеток существует экспоненциальная зависимость между значением параметра  $\epsilon_\Phi$  в формуле (4) и величиной относительного

уменьшения числа узлов редуцированной сетки по сравнению с регулярной сеткой  $n_{rel}$ .

В разделе 3.5 проводится анализ точности численного решения уравнения переноса (адвекции) на сфере на редуцированных сетках. Рассматривается 3 эксперимента. В первом стационарное поле скоростей соответствует «твердому» вращению, при котором форма переносимой величины остается неизменной во времени. Поле скоростей задается таким образом, что максимум переносимой величины (в начальный момент времени это центральная функция с угловым диаметром  $\pi/4$ ) все время находится на сечении сферы плоскостью, проходящей через центр сферы и составляющей с меридианальной плоскостью угол  $\alpha$ . Минимальное отличное от нуля время, при котором аналитическое решение совпадает с начальным условием, мы назовём временем, необходимым для совершения одного оборота.

На рисунках 3а и 3б проиллюстрированы относительные среднеквадратические ошибки отклонения численного решения от точного ( $l_2$ ) и рассчитанного на регулярной сетке ( $\Delta$ ) в зависимости от числа оборотов  $n$ . Можно видеть, что сокращение числа узлов сетки сопровождается уменьшением точности численного решения, а ошибки  $l_2(n_{rel}, t)$  и  $\Delta(n_{rel}, t)$  зависят от  $n_{rel}$  монотонным образом для всех значений времени  $t$ .

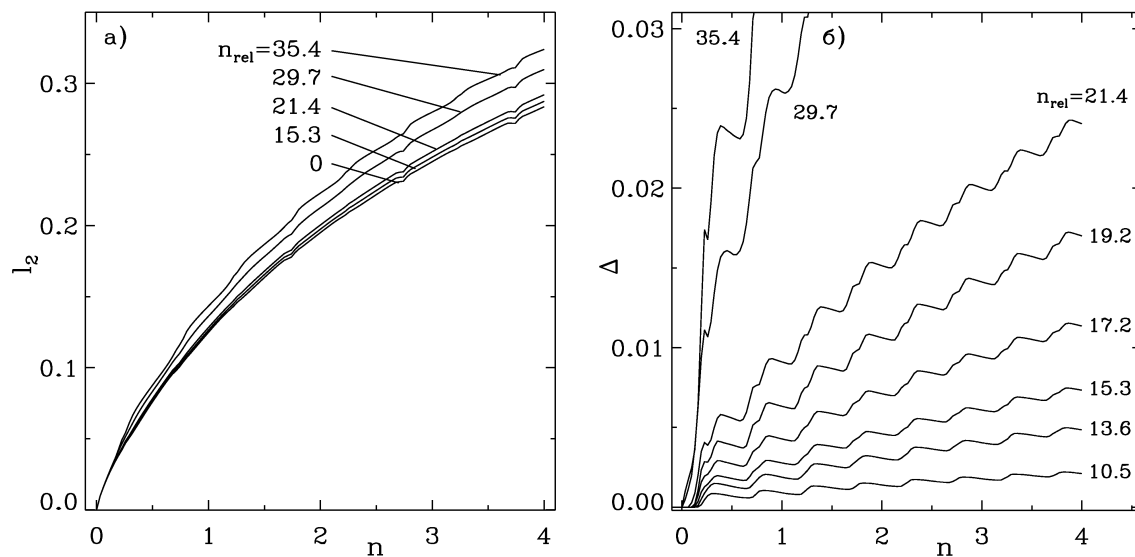


Рис. 3.  $l_2$  и  $\Delta$ : относительное среднеквадратическое отклонение численного решения, полученного на редуцированных сетках с процентным уменьшением числа узлов  $n_{rel}$ , от точного (а) и приближенного (б), вычисленного на регулярной сетке, в зависимости от числа оборотов  $n$ .

Второй и третий эксперименты описывают два стационарных симметричных вихря, под действием которых переносимая величина закручи-

вается в спирали. Сравнение результатов расчетов на регулярной и редуцированных сетках показало, что даже в случае сильно неоднородного поля скорости точность решения уравнения переноса является монотонной функцией параметра  $\epsilon_\phi$  в формуле (4). Иными словами, уменьшение числа узлов оптимальной сетки приводит к ухудшению точности численного решения.

В разделе 3.6 обсуждаются результаты второй серии численных экспериментов, выполненных с помощью модели мелкой воды на сфере (Толстых, 2002)<sup>9</sup>. Первые два теста моделируют нелинейный зональный геострофический поток. В третьем эксперименте воспроизводятся волны Россби–Гурвица. Начальное состояние атмосферы в четвертой серии тестов, один из которых соответствует значительному воздушному потоку через полюс, задается на основе квазиреальных данных наблюдений.

В табл. 1 приводятся значения относительной среднеквадратической ошибки в зависимости от времени интегрирования (в часах) модели мелкой воды на сфере для серии экспериментов, основанных на квазиреальных данных наблюдений. В качестве точного решения здесь принимаются результаты расчетов спектральной модели высокого разрешения T213 (Jakob–Chien, 1995)<sup>10</sup>. Можно видеть, что относительное увеличение ошибки при переходе с регулярной на оптимальную редуцированную сетку с  $n_{rel} = 19\%$  является слабовозрастающей функцией времени и не превышает 10%.

Эксперименты на основе модели мелкой воды на сфере, в том числе с сильным потоком через полюса, показывают, что использование оптимальной редуцированной сетки приводит к незначительному росту ошибки (менее 10%) при существенном (до 15–20%) сокращении числа узлов сетки.

В **Заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

В **Приложении** рассматривается алгоритм численного решения уравнений реализованной модели атмосферы.

### **Основные результаты диссертационной работы:**

1. Создана вычислительно эффективная двумерная в вертикальной плоскости негидростатическая модель квазисжимаемой атмосферы. Предложен усовершенствованный метод численного решения негидростатических уравнений гидротермодинамики квазисжимаемой ат-

---

<sup>9</sup>Vorticity–divergence semi–Lagrangian shallow–water model of the sphere based on compact finite differences // J. Comput. Phys. 2002. V. 179. P. 180–200.

<sup>10</sup>Jakob–Chien J.J., et al. Spectral transform solutions to the shallow water test set // J. Comput. Phys. 1995. V. 119. P. 164.

тест	24	48	72	96	120
7a	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,57 \cdot 10^{-3}$	$0,96 \cdot 10^{-3}$	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$
	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,56 \cdot 10^{-3}$	$0,94 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$
7b	$0,24 \cdot 10^{-3}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$	$0,94 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-3}$
	$0,22 \cdot 10^{-3}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$	$0,60 \cdot 10^{-3}$	$0,90 \cdot 10^{-3}$	$1,29 \cdot 10^{-3}$
7c	$0,28 \cdot 10^{-3}$	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$0,81 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$
	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,44 \cdot 10^{-3}$	$0,73 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,81 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1. Значения относительной среднеквадратичной ошибки для трех вариантов теста на основе квазиреальных данных. Первая строчка каждого теста представляет собой среднеквадратичную ошибку численного решения рассчитанного на редуцированной сетке с  $n_{rel} = 19\%$ , а вторая – на регулярной широтно–долготной сетке.

мосферы, основанный на работе (Rööm, 2007). Обсуждаемый в диссертации алгоритм обладает большим запасом устойчивости по сравнению с (Rööm, 2007), за счет использования двуслойной по времени полулагранжевой схемы SETTLS (Hortal, 2002). Метод расчета геопотенциала, предложенный в диссертации, имеет меньшую численную ошибку.

2. Результаты численного воспроизведения орографических волн демонстрируют качественное и количественное согласие с работами других авторов, выполненных с использованием моделей сжимаемой атмосферы (Girard C., 2005; Janjic Z., 2001). Шаг по времени рассматриваемой модели при этом выше используемого в указанных работах.
3. Разработан алгоритм построения оптимальной редуцированной широтно–долготной сетки на сфере для глобальной полулагранжевой конечно–разностной модели атмосферы. На основе численных экспериментов в диссертации показано, что точность решения уравнения переноса (адвекции) на сфере, рассчитанного с помощью полулагранжевого метода, является монотонной функцией относительного уменьшения числа узлов оптимальной редуцированной сетки по сравнению с регулярной сеткой. На основе общепринятых тестов сделан вывод о незначительном ухудшении точности (менее 10%) численного решения уравнений мелкой воды на сфере при сокращении числа узлов сетки на 15–20%.

## Публикации по теме диссертации:

1. **Фадеев Р. Ю.** Построение редуцированной широтно–долготной сетки для задачи глобального численного прогноза погоды. // *Метеорология и гидрология*, 2006, №9, С. 5–20. (Глава 3).
2. Толстых М. А., Фадеев Р. Ю. Полулагранжева модель прогноза погоды с переменным разрешением и ее дальнейшее развитие. // *Вычислительные технологии*. 2006, Т. 11, ч. 1, С. 176–184. (Главы 1–2).
3. Фадеев Р. Ю., Толстых М.А. Негидростатический динамический блок для глобальной модели численного прогноза погоды. // Тезисы докладов Второй конференции молодых ученых национальных гидрометслужб государств–участников СНГ , Москва, 2–3 окт. 2006, С. 50–51.
4. Фадеев Р. Ю., Толстых М.А. Разработка негидростатического динамического блока для модели атмосферы. // Труды 49 научной конференции МФТИ . Часть 8. 23–24 нояб. 2006, С. 9–10.
5. Fadeev R.Yu., Tolstykh M.A. Two–dimensional non–hydrostatic dynamical core for the model of atmosphere. // Abstracts of International conference on computational information technologies for enviromental sciences. Tomsk, 21–25 July. 2007, С. 70–71.
6. Tolstykh M.A., Fadeev R.Yu. Development of the non–hydrostatic version of the global SL–AV model. // Abstracts of the Seventh international SRNWP–Workshop on non–hydrostatic modelling. Bad Orb, 5–7 November, 2007.
7. Фадеев Р. Ю. Редуцированная сетка для модели общей циркуляции атмосферы. // Труды 50 научной конференции МФТИ . Часть 8. Москва, 24–25 нояб. 2007, С. 163–165.
8. Фадеев Р. Ю., Толстых М.А. Численное моделирование процесса обтекания орографической неоднородности с помощью негидростатического динамического блока модели атмосферы. // Труды 51 научной конференции МФТИ . Часть 8. 28–30 нояб. 2008, С. 239–241.
9. **Фадеев Р. Ю., Толстых М. А.** Воспроизведение орографически возбуждаемых волн негидростатической моделью адиабатической атмосферы. // *Метеорология и гидрология*, 2009, №9, С. 40–59. (Главы 1–2).