На правах рукописи

Мартынов Роман Сергеевич

НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦЫ ОТКЛИКА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена в Институте вычислительной математики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Нечепуренко Ю. М.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, Кузнецов Ю. И.

доктор физико-математических наук, Шутяев В. П.

Ведущая организация: Институт физики атмосферы РАН.

Защита состоится "____"____________ 2007 г. в ____ ч. ____ мин. на заседании Диссертационного совета Д 002.45.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан "____"____________ 2007 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук Бочаров Г. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе предложен и обоснован алгоритм нахождения матрицы отклика по заданному ряду наблюдений для линейной дискретной динамико-стохастической системы. Решаемая задача является плохо обусловленной, поэтому предусмотрено нахождение матрицы отклика в заданном подпространстве, в частном случае совпадающем со всем пространством. Такой подход позволяет получить более точные результаты и уменьшить вычислительные затраты. Для относительной погрешности вычисления приближенной матрицы отклика получены вероятностные мажорантные оценки, зависящие от параметров алгоритма, выбранного подпространства и длины ряда наблюдений. Показано, как задачу нахождения матрицы отклика для непрерывной системы можно свести к задаче нахождения матрицы отклика дискретной системы. Качество теоретических оценок было проверено на различных тестовых задачах, в том числе, была рассмотрена модель баротропной атмосферы.

Актуальность темы.

Нахождение оператора отклика на внешнее воздействие по заданному ряду наблюдений, сгенерированному линейной динамико-стохастической системой, является важной задачей. Например, линейные динамико-стохастические системы могут достаточно хорошо описывать низкочастотную составляющую изменчивости атмосферы. Однако, все известные методы нахождения оператора отклика по конечному ряду наблюдений, который генерируется исходной линейной динамико-стохастической системой, имели серьезный недостаток: для этих методов не было известно мажорантных теоретических оценок точности.

Цели работы:

– разработка нового алгоритма нахождения приближенной матрицы отклика в подпространстве по ряду наблюдений для линейной дискретной динамико-стохастической системы,

– получение вероятностных мажорантных оценок точности нахождения приближенной матрицы отклика в зависимости от параметров системы, параметра алгоритма, размерности подпространства и длины ряда наблю-

дений,
– распространение результатов на линейные динамико-стохастические системы с непрерывным временем,
– экспериментальная проверка полученных теоретических оценок.

Методика исследования.

При разработке алгоритма используются методы матричного анализа. На основе сингулярного разложения получается формула для нахождения матрицы отклика в подпространстве. Для получения вероятностных оценок погрешности приближенной матрицы отклика используются теорема Чебышева и интегральные критерии качества дихотомии. При сведении непрерывной задачи к дискретной плотность вероятности решения непрерывной задачи получается путем решения уравнения Фоккера-Планка с использованием прямого и обратного преобразования Фурье.

Научная новизна работы.

Предложен новый алгоритм нахождения матрицы отклика в подпространстве для линейной дискретной динамико-стохастической системы по ряду наблюдений на основе ковариационных матриц. Впервые получены верхние оценки относительной погрешности приближенной матрицы отклика, найденной по ряду наблюдений.

Теоретическая и практическая значимость.

Теоретическая значимость проведенного исследования заключается в новых мажорантных вероятностных оценках точности вычисления матрицы отклика динамико-стохастических систем. Практическая ценность заключается в возможности применения предложенного алгоритма для нахождения матрицы отклика по заданному ряду наблюдений с использованием теоретических оценок для правильного выбора параметров.

Апробация работы.

Основные результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах и отчетных сессиях ИВМ РАН (Москва, 2004-2007 гг.), семинаре отдела исследования климатических процессов ИФА РАН (Москва, 2007 г.), международной конференции “Тихонов и современная математика” в МГУ им. Ломоносова (Москва, 2006 г.), семинаре "Методы Монте-Карло"в ИВМиМГ (Новосибирск, 2006 г.), на 48-й научной конференции МФТИ

(Москва, 2005 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 2 опубликованы в реферируемых журналах рекомендуемых ВАК РФ для защиты кандидатских диссертаций.

Личный вклад автора.

Вклад автора в работы [1],[2],[4] заключается в совместной разработке алгоритма вычисления приближенной матрицы отклика, доказательстве оценок его погрешности, постановке численных экспериментов, в самостоятельной технической реализации и обработке результатов экспериментов.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения, списка литературы из 46 названий, содержит 38 иллюстраций и 4 таблицы. Объем диссертации составляет 95 страниц.

Основное содержание работы

Во **введении** обсуждается рассматриваемая задача, описывается структура диссертации, кратко формулируются основные полученные результаты.

В **первой главе**, состоящей из восьми разделов, делаются предположения относительно дискретной динамико-стохастической системы, строится алгоритм вычисления приближенной матрицы отклика в подпространстве. Формулируются и доказываются теоремы для оценки погрешности нахождения матрицы отклика. Показывается, как можно реализовать алгоритм с расчетом ковариационных матриц под ряду наблюдений в режиме накопления. Проводятся численные эксперименты с целью проверки качества полученных оценок.

В **разделе 1.1** рассматривается следующая линейная дискретная динамико-стохастическая система:

$$u^{k+1} - Bu^k - g^k = f^k, \quad k \geq 0, \quad u^0 = 0, \tag{1}$$

где $u^k \in \mathbf{C}^n$ – n-компонентные векторы, $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ – $n \times n$ матрица, собственные значения которой лежат строго внутри единичного круга, $f^k \in \mathbf{C}^n$ – детерминированные векторы, $g^k \in \mathbf{C}^n$ – одинаково распределенные случайные векторы с нулевым математическим ожиданием: $\mathbf{M}\{g^k\} = 0$. Предполагается, что векторы g^k и g^l не коррелируют друг с другом в случае когда $k \neq l$, а $\mathbf{M}\{g^k g^{k*}\} = G$, где G – эрмитова положительно определенная матрица. Также делается предположение, что матрица $D = \mathbf{M}\{\left(g^k g^{k*} - G\right)^2\}$ ограничена.

Отклик возмущенной системы определяется как предел $\mathbf{M}\{u^k\}$ при $k \to \infty$. При этом, если внешнее воздействие f^k меняется ступенчато, то есть, если для некоторого $k_0 > 0$, $f^k \equiv 0$, $k < k_0$ и $f^k \equiv f$, при $k \geq k_0$, то отклик системы равен Rf, где $R = (I - B)^{-1}$. Матрицу R называют матрицей отклика системы (1).

В **разделе 1.2** выводится формула для получения матрицы отклика во всем пространстве по заданному ряду наблюдений $u^{N_1}, \ldots, u^{N_2}$, $N_2 > N_1 > 0$. В рассмотрение вводятся следующие матрицы:

$$U_{l,m} = [u^l, \ldots, u^m], \quad V^q_{l,m} = [v^l, \ldots, v^m], \quad \Gamma^q_{l,m} = [\gamma^l, \ldots, \gamma^m],$$

$$v^k = \sum_{i=0}^{q} u^{k+i}, \quad \gamma^k = \sum_{i=0}^{q} g^{k+i}.$$

Показывается, что в силу (1) при $f^k \equiv 0$ для любых положительных целых $N_1 < N_2$ и $p \leq N_2 - N_1$ справедливо равенство

$$W + \Delta = (I - B)V^{p-1}_{N_1,N_2-p} U^*_{N_1,N_2-p}, \tag{2}$$

$$W = U_{N_1,N_2-p} U^*_{N_1,N_2-p} - U_{N_1+p,N_2} U^*_{N_1,N_2-p}, \quad \Delta = \Gamma^{p-1}_{N_1,N_2-p} U^*_{N_1,N_2-p}.$$

Введя обозначения $U = U_{N_1,N_2-p}$, $\quad V = V^{p-1}_{N_1,N_2-p}$ и предположив, что матрица W невырожденная, имеем:

$$I + \Delta W^{-1} = (I - B)VU^* W^{-1}.$$

В предположении малости матрицы Δ для приближенной матрицы отклика получаем формулу:

$$R \approx \widehat{R} = VU^* W^{-1}, \tag{3}$$

а для ее погрешности оценку

$$||\widehat{R} - R||_F \leq ||R||_2 ||\Delta W^{-1}||_F.$$

В **разделе 1.3** выводится формула для получения матрицы отклика в подпространстве. В формулу для приближенной матрицы отклика (3) входит обратная матрица W^{-1}. Во многих случаях матрица W оказывается почти вырожденной, что приводит к большой погрешности при вычислении матрицы отклика во всем пространстве. Погрешность можно существенно уменьшить, если искать матрицу отклика в подпространстве.

Задается некоторое подпространство $\mathcal{P}$ и рассматривается матрица $P \in \mathbf{C}^{n\times m}$ такая, что ее столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Тогда PP^* – ортопроектор на подпространство $\mathcal{P}$ и $R_\mathcal{P} = RPP^*$ – матрица отклика на внешнее воздействие в подпространстве. Отклик системы (1) на внешнее воздействие из подпространства равен

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\{u^k\} = RPP^*f = R_\mathcal{P}f.$$

Вводятся в рассмотрение матрицы $Q \in \mathbf{C}^{n\times m}$ и $\widetilde{W} \in \mathbf{C}^{m\times m}$ такие, что

$$Q^*Q = I, \quad WQ = P\widetilde{W}.$$

Матрицы Q и $\widetilde{W}$ можно найти по заданным матрицам P и W при помощи сингулярного разложения. Для приближенной матрицы отклика в подпространстве и ее погрешности получаются представления:

$$\widehat{R}_\mathcal{P} = VU^*W^{-1}PP^* = VU^*Q\widetilde{W}^{-1}P^*, \tag{4}$$

$$\widehat{R}_\mathcal{P} - R_\mathcal{P} = R\Delta W^{-1}PP^* = R\Delta Q\widetilde{W}^{-1}P^*,$$

В **разделе 1.4** формулируются основные теоремы. В теоремах 1 и 2 даются оценки нормы относительной погрешности приближенной матрицы отклика, вычисленной по формуле (4). В первой теореме рассмотрен наиболее общий случай, когда $\mathcal{P}$ – произвольное подпространство. В теореме 2 в качестве подпространства $\mathcal{P}$ берется линейная оболочка сингулярных векторов матрицы W и для этого случая получаются соответствующие оценки. В теореме 3 показывается, что с ростом длины ряда наблюдений матрица W стремится к матрице S_p, являющейся решением уравнения Ляпунова $S_p - BS_pB^* = (I - B^p)G$. При $p \to \infty$ матрица S_p стремится к автоковариационной матрице системы (1).

Теорема 1. Для любого положительного $\delta < 1$ выполнены следующие неравенства:

$$\mathbf{P}\{||\widehat{R}_{\mathcal{P}} - R_{\mathcal{P}}||_F/||R||_2 \le c||N\widetilde{W}^{-1}||_2\sqrt{\frac{p}{N\delta}}\} \ge 1 - \delta,$$

где

$$c = \frac{\beta_0(1+\sqrt{\beta})}{(1-\beta)^{3/2}}\mathrm{tr}(G),$$

$\mathbf{P}\{\mathcal{A}\}$ – вероятность события $\mathcal{A}$, β и β_0 – произвольные константы такие, что $||B^k||_2 \le \beta_0\beta^k$, $k \ge 0$, а $tr(.)$ – след матрицы.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{P}$ – линейная оболочка сингулярных векторов матрицы W, отвечающих ее m максимальным сингулярным числам. Если $d_m/\sqrt{N\delta} \le 1$, то

$$\mathbf{P}\{||\widehat{R}_{\mathcal{P}} - R_{\mathcal{P}}||_F/||R||_2 \le c_m\sqrt{\frac{p}{N\delta}}\} \ge 1 - \delta$$

где

$$c_m = 2\sqrt{3}\frac{\beta_0(1+\sqrt{\beta})}{(1-\beta)^{3/2}}\left(1 + \frac{\beta_0\beta^p}{1-\beta^p}\right)\sigma_m(G)^{-1}\mathrm{tr}(G),$$

$$d_m = 4\sqrt{3}\frac{\beta_0^2(1+\sqrt{\beta})^2}{(1-\beta)^3}\left(1 + \frac{\beta_0\beta^p}{1-\beta^p}\right)\sigma_m(G)^{-1}\sqrt{\mathrm{tr}(G)^2 + \frac{1-\beta}{1+\beta}\mathrm{tr}(D)},$$

σ_m – m-ое максимальное сингулярное число.

Теорема 3. Для любого положительного $\delta < 1$ имеем

$$\mathbf{P}\{||\frac{1}{N}W - S_p||_2 \le 2\sqrt{2}\frac{d}{\sqrt{N\delta}} + \frac{\widetilde{d}}{N}\} \ge 1 - \delta,$$

где

$$d = \frac{\beta_0^2(1+\sqrt{\beta})^2}{(1-\beta)^3}\sqrt{\mathrm{tr}(G)^2 + \mathrm{tr}(D)\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \widetilde{d} = (1+\beta^p)\beta_0^2\frac{\beta^{2N_1}}{(1-\beta^2)^2}||G||_2.$$

Раздел 1.5 полностью посвящен доказательствам. В **подразделе 1.5.1** доказываются вспомогательные леммы на основе неравенства Чебышева. В лемме 1 устанавливаются общие свойства приближенных ковариационных матриц для векторов g^k. Результаты леммы 1 потом используются в лемме 2, которая оценивает $||\Delta||_F$ и в лемме 3, позволяющей оценить $||\widetilde{W}^{-1}||_2 = 1/\sigma_m(W)$. В **подразделе 1.5.2** на основе этих лемм доказываются теоремы 1-3.

В **разделе 1.6** предлагается алгоритм вычисления приближенной матрицы отклика в режиме накопления и оцениваются его вычислительные затраты. В **подразделе 1.6.1** показывается, как по ряду наблюдений $u^{N_1}, ..., u^{N_2}$ вычислить матрицы W и VU^*, не храня при этом весь ряд в памяти компьютера. Показывается, что в случае, если размерность подпространства $m < n/2$, матрицу отклика можно умножать на вектор быстрее, если она представлена в виде произведения трех матриц VU^*Q,$\widetilde{W}^{-1}$,P^*, хранимых отдельно. Рассматривается модифицированная версия алгоритма.

В **подразделе 1.6.2** получаются оценки объема минимальной оперативной памяти, необходимой для работы алгоритма и оцениваются суммарные вычислительные затраты. Показывается, что при $m < n/3$ модифицированная версия алгоритма более эффективна и использовать следует именно ее.

В **разделе 1.7** проводятся численные эксперименты с матрицами вида $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Векторы g^k выбираются нормально распределенными с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В двух таблицах приводятся результаты численных экспериментов, проверяющих качество теоретических оценок. Показывается, что теоретические оценки с хорошей точностью описывают зависимость погрешности от параметров и при этом дают достаточно точные оценки ее величины.

Во **второй главе**, состоящей из шести разделов, рассматривается линейная непрерывная динамико-стохастическая система. Показывается, как непрерывную задачу можно свести к дискретной. В случае, когда система допускает разделение переменных, оцениваются константы теоремы 2 на основе уравнения Фоккера-Планка. Рассматривается случай одномерного и двумерного операторов Лапласа. Приводятся результаты численных экспериментов.

В **разделе 2.1** рассматривается следующая линейная непрерывная динамико-стохастическая система:

$$\frac{du}{dt} - Au - g(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $u(0) = 0$ – начальное значение, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – $n \times n$ матрица с вещественными коэффициентами, собственные значения которой лежат строго в левой полуплоскости, $f(t) \in \mathbf{R}^n$ – действительная детерминированная векторная функция, $g(t) \in \mathbf{R}^n$ – действительный стационарный векторный нормально распределенный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью $2G_0 > 0$, являющейся эрмитовой положительно определенной матрицей порядка n. Показывается, что если для некоторого t_0, $f(t) \equiv 0$ при $t < t_0$ и $f(t) \equiv f$ при $t \geq t_0$, то

$$\lim_{t \to \infty} M\{u(t)\} = -A^{-1} f.$$

Следовательно $-A^{-1}$ – это матрица отклика системы (5) на ступенчатое изменение внешнего воздействия.

В **разделе 2.2** непрерывная задача сводится к дискретной. Показывается, что векторы $u^k = u(\tau k)$ совпадают в моменты времени τk с решением непрерывной системы (5) с $f(t) \equiv 0$, если они сгенерированы дискретной системой (1) с $f^k \equiv 0$, матрицей $B = exp(\tau A)$ и векторами g^k такими, что

$$g^k = \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{(t-s)A} g(s) ds. \tag{6}$$

Все векторы g^k независимые одинаково распределенные с нулевыми математическими ожиданиями и матрицей ковариаций:

$$G = \mathbf{M}\{g^k {g^k}^T\} = 2 \int\limits_0^\tau e^{sA} G_0 e^{sA^T} ds.$$

Отмечается, что плотность вероятности перехода системы (5) с $f(t) \equiv 0$ из начального состояния $u(0) = 0$ в нулевой момент времени в состояние u в момент времени t можно найти, решив уравнение Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j} A_{jk} u_k \right) p = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j} G_{0jk} \frac{\partial p}{\partial u_k}$$

с начальным условием $p(u, 0) = \delta(u_1) ... \delta(u_n)$, где u_k – k-я компонента вектора u, A_{jk} и G_{0jk} означают jk-е элементы матриц A и G_0 соответственно, а $\delta(.)$ – дельта-функцию Дирака.

Делается вывод, что описанный в главе 1 подход позволяет оценить матрицу отклика $R = (I - exp(\tau A))^{-1}$.

В **разделе 2.3** рассматривается случай, когда в некотором ортонормированном базисе матрицы A и G_0 имеют диагональный вид: $A_{jj} = \alpha_j$, $G_{0jj} = \gamma_j$. В **подразделе 2.3.1** выписывается уравнение Фоккера-Планка для диагонального случая и решение ищется в виде $p(u,t) = p_1(u_1,t)...p_n(u_n,t)$. Отмечается, что уравнение Фоккера-Планка распадается на n отдельных уравнений:

$$\frac{\partial p_j(u_j,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u_j}(\alpha_j u_j p_j(u_j,t)) = \gamma_j \frac{\partial^2 p_j(u_j,t)}{\partial (u_j)^2}. \tag{7}$$

При помощи прямого и обратного преобразования Фурье находится решение уравнения (7):

$$p_j(u_j,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi_j(t)}} exp\left(-\frac{u_j^2}{2\chi_j(t)}\right),$$

с дисперсией $\chi_j(t) = (\gamma_j/\alpha_j)(exp(2t\alpha_j) - 1)$.

В **подразделе 2.3.2** вычисляются следы матриц G и D на основе полученной формулы распределения. Показывается, что матрицы G и D диагональные и их диагональные элементы равны соответственно:

$$G_{jj} = \chi_j(\tau), \quad D_{jj} = \chi_j(\tau)\sum_{k=1}^{n}\chi_k(\tau) + \chi_j(\tau)^2.$$

Рассматривается случай

$$a_1 j^a \le -\alpha_j \le a_2 j^a, \quad q_1 j^q \le \gamma_j \le q_2 j^q, \quad a - q > 1, \quad a > 0, \quad q \le 0, \tag{8}$$

где a, a_1, a_2, q, q_1, q_2 – некоторые константы, причем $a_2 \ge a_1 > 0$, $q_2 \ge q_1 > 0$. Показывается, что в случае $a - q > 1$ следы матриц G и D одновременно ограничены с ростом n, а при $a - q \le 1$ – одновременно неограничены.

В **подразделе 2.3.3** оцениваются константы c_m и d_m теоремы 2. Показывается, что при выполнении условия (8) для диагональных элементов матриц A и G_0 справедливы оценки констант:

$$c_m \le 2\sqrt{3}\frac{1 + e^{-\tau a_1/2}}{(1 - e^{-\tau a_1})^{3/2}(1 - e^{-\tau a_1 p})}\frac{q_2 a_2}{q_1 a_1}\frac{a - q}{a - q - 1}\frac{m^{a-q}}{1 - e^{-2\tau a_1 m^a}},$$

$$d_m \le 12 \frac{(1+e^{-\tau a_1/2})^2}{(1-e^{-\tau a_1})^3(1-e^{-\tau a_1 p})} \frac{q_2 a_2}{q_1 a_1} \frac{a-q}{a-q-1} \frac{m^{a-q}}{1-e^{-2\tau a_1 m^a}}.$$

В **подразделе 2.3.4** рассматривается случай, когда в качестве оператора A системы (5) берется конечномерная модель оператора Лапласа, полученная методом Бубнова-Галеркина в базисе собственных функций оператора Лапласа. В одномерном случае показывается, что если G_0 – единичная матрица, то $\alpha_j = -\pi^2 j^2$, $\gamma_j \equiv 1$ и следы матриц G и D, фигурирующие в оценках теорем 1-3, ограничены при любом n. Оцениваются константы c_m и d_m. В двумерном случае выводится оценка для α_j: $\pi^2 j \le |\alpha_j| \le 2.5\pi^2 j$. Показывается, что для ограниченности следов матриц G и D диагональные элементы γ_j матрицы G_0 должны убывать. Приводится оценка констант c_m и d_m.

В **разделе 2.4** ставятся численные эксперименты в случае, когда A – конечномерная модель одномерного и двумерного операторов Лапласа. Задаются параметры алгоритма, матрица системы, математическое ожидание и дисперсия векторов g^k. Вводятся в рассмотрение условное эмпирическое среднее и дисперсия, которые сравниваются с теоретическими. Показывается, что экспериментальная зависимость погрешности от m есть $\sqrt{m^3}$ вместо теоретической m^2, экспериментальная зависимость погрешности от p есть $\sqrt{p}$, что совпадает с теоретической. Теоретическое среднее при всех значениях параметров эксперимента не превосходило экспериментальное среднее более чем в 200 раз, а при определенных значениях параметров было больше лишь на порядок.

В **разделе 2.5** оценивается эффективное число степеней свободы для рассмотренных в предыдущем разделе систем по известной формуле $n_{ef} = \mathrm{tr}(S)^2/\mathrm{tr}(S^2)$, где S – автоковариационная матрица системы. Показывается, что для конечномерной модели одномерного оператора Лапласа эффективная размерность $n_{ef} < 3$, а для двумерного $n_{ef} < 17$, то есть независимо от размерности системы, ее эффективная размерность мала.

В **третьей главе**, состоящей из пяти разделов, рассматривается модель баротропной атмосферы, по которой строится дискретная динамико-стохастическая система. Для построенной системы проводятся численные эксперименты и обсуждаются полученные результаты.

В **разделе 3.1** для модели баротропной атмосферы рассматривается известный метод получения оператора динамико-стохастической системы путем линеаризации исходного уравнения относительно положения равновесия.

В **разделе 3.2** выписано уравнение баротропной атмосферы:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta^{-1} J(\psi, \Delta\psi + l + kh) - \alpha\psi + \mu\Delta\psi + \Delta^{-1}F,$$

где $\psi = \psi(\theta, \lambda)$ – безразмерная функция тока, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \lambda \le 2\pi$, J – оператор Якоби, α, μ – коэффициенты трения, F – внешнее воздействие, h – орографические неоднородности постилающей поверхности, k – нормировка орографии, l – параметр Кориолиса. Описывается известный процесс линеаризации этого уравнения относительно положения равновесия и нахождения линейной непрерывной модели, для которой строится дискретная модель.

В **разделе 3.3** ставятся численные эксперименты. Задается параметр τ и вычисляется матрица $B = exp(\tau A)$ дискретной динамико-стохастической системы по оператору A непрерывной системы. Распределение векторов g^k задается нормальным с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В качестве подпространства $\mathcal{P}$ рассматриваются $\mathcal{W}$ – линейная оболочка первых собственных векторов матрицы W, отвечающих максимальным собственным значениям и подпространство $\mathcal{S}$ – линейная оболочка первых ЕОФ-ов (естественных ортогональных функций).

В **разделе 3.4** обсуждаются результаты проведенных экспериментов. Показывается, что при $p \ge 10^4$ подпространство $\mathcal{W}$ почти совпадает с $\mathcal{S}$. Показывается, что в подпространстве $\mathcal{W}$ матрица отклика находится с большей точностью, чем в подпространстве $\mathcal{S}$ той же размерности. Делается вывод, что теоретическая зависимость погрешности от параметров хорошо согласуется с экспериментальной в обоих подпространствах, а теоретические значения погрешности для данной задачи оказываются сильно завышенными по сравнению с экспериментальными значениями. Это объясняется тем, что используемые теоремы 1-2 применимы в гораздо более общих случаях.

В **приложении 1** приводится реализация алгоритма нахождения приближенной матрицы отклика в подпространстве первых сингулярных векторов матрицы W в среде MATLAB.

В **приложении 2** приводятся оценки степеней матриц, спектр которых лежит строго внутри единичного круга, на основе работ С.К. Годунова и Ю.М. Нечепуренко.

В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты диссертационной работы

- Разработан новый алгоритм нахождения приближенной матрицы отклика на внешнее воздействие из подпространства по заданному ряду наблюдений для линейных дискретных динамико-стохастических систем.

- Получены теоретические мажорантные оценки точности нахождения приближенной матрицы отклика в подпространстве в зависимости от параметров системы, параметра алгоритма, длины ряда наблюдений и выбранного подпространства.

- Для дискретной динамико-стохастической системы, к которой сводится вычисление матрицы отклика системы с непрерывным временем, теоретически исследована точность предложенных оценок в случае, когда система допускает разделение переменных.

- Экспериментально проверена точность полученных оценок и их функциональная зависимость от параметров для различных тестовых задач.

Публикации по теме диссертации

1. *Мартынов Р.С., Нечепуренко Ю.М.*, О нахождении матрицы отклика линейной дискретной динамико-стохастической системы// М.: ЖВМ и МФ., 2004, 5, с.771-780.

2. *Мартынов Р.С., Нечепуренко Ю.М.*, Вычисление матрицы отклика линейной дискретной динамико-стохастической системы на внешнее воздействие из подпространства// М.: ЖВМ и МФ., 2006, 7, с.1155-1167.

3. *Martynov R.S.*, The experimental proof of a theoretical estimate of the error in computing of the response matrix// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007, 22, 3, p.221-231.

4. *Martynov R.S., Nechepurenko Y.M.*, Computation of the response matrices to external actions for linear stochastic dynamical systems// International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", Moscow, 2006, p. 128-129.

5. *Мартынов Р.С.* Об экспериментальной проверке оценок точности вычисления матрицы отклика линейной дискретной динамико-стохастической системы// Сборник трудов 48-й научной конференции МФТИ, 2005.