На правах рукописи

Жлобич Павел Георгиевич

Квазисепарабельные матрицы в линейной алгебре и ее приложениях

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Московский физико-технический институт (государственный университет)”

Научный руководитель:

член-корреспондент РАН, профессор Тыртышников Евгений Евгеньевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета ВМК МГУ
Икрамов Хаким Дододжанович

кандидат физико-математических наук, руководитель отдела математического моделирования ОАО “Центральная Геофизическая Экспедиция”
Книжнерман Леонид Аронович

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Россиийской академии наук

Защита состоится «*5*» *октября* 20*12* г. в *15:00* на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук, расположенном по адресу:
119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» *сентября* 20*12* г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук Г. А. Бочаров

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Предлагаемая диссертация посвящена развитию теории матриц с малоранговой структурой особого вида, называемых *квазисепарабельными*. Квазисепарабельная матрица, в некотором смысле, является дискретным аналогом функции Грина для одномерного оператора Штурма–Лиувилля. Так как функция Грина — это ядро соответствующего интегрального оператора, то очевидно, что квазисепарабельные матрицы являются подклассом более общих мозаично-скелетонных матриц Е. Е. Тыртышникова и иерархических матриц В. Хакбуша. Однако, в отличие от последних, квазисепарабельные матрицы обладают простой нерекурсивной линейной по размеру параметризацией, то есть, полное число ячеек памяти, необходимых для хранения квазисепарабельной матрицы, равняется $\mathcal{O}(n)$. Численные методы с квазисепарабельными матрицами активно развивались в последнее десятилетие и, можно сказать, что к моменту написания диссертации были получены все основные алгоритмы линейной алгебры для этого класса матриц.

Актуальность данной работы заключается в том, что впервые квазисепарабельные матрицы были применены к решению важных прикладных задач, связанных с ортогональными многочленами и уравнениями в частных производных. Тем самым была значительно расширена область применения квазисепарабельных матриц, и показано, что алгоритмы, основанные на их использовании, численно устойчивы и имеют *линейную* по числу неизвестных алгебраическую сложность.

Цели работы

Основная цель работы состоит в развитии теории квазисепарабельных матриц, численных методов работы с ними и их приложений.

Перед автором были поставлены четыре задачи:

1. предложить быстрый алгоритм решения задачи на собственные значения для обобщенной матрицы Фробениуса, использующий ее малоранговую структуру;

2. обобщить все ранние работы по обращению полиномиальных матриц Вандермонда на случай произвольной системы многочленов;

3. обобщить квазисепарабельную структуру матрицы с одномерного случая на многомерный;

4. исследовать численную устойчивость некоторых алгоритмов с квазисепарабельными матрицами.

Методы исследования

Алгоритмы, полученные в данной работе, основаны на использовании малопараметрического описания квазисепарабельных матриц

$$\begin{bmatrix} d_1 & g_1h_2 & g_1b_2h_3 & \cdots & g_1b_2\dots b_{n-1}h_n \\ p_2q_1 & d_2 & g_2h_3 & \cdots & g_2b_3\dots b_{n-1}h_n \\ p_3a_2q_1 & p_3q_2 & d_3 & \cdots & g_3b_4\dots b_{n-1}h_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_na_{n-1}\dots a_2q_1 & p_na_{n-1}\dots a_3q_2 & p_na_{n-1}\dots a_4q_3 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Здесь параметры $\{d_k, q_k, a_k, p_k, g_k, b_k, h_k\}$, называемые генераторами, — это матрицы малых размеров. Как видно из этой параметризации, квазисепарабельная матрица является дискретным аналогом функции двух переменных, которые разделяются в разных подобластях области определения. Полное количество ячеек памяти, необходимых для хранения такой матрицы, растет линейно с ее размером.

В главе 2, посвященной обращению полиномиальной матрицы Вандермонда, мы также активно использовали графы потока сигнала. Этот инструмент позволил нам получить визуальную интерпретацию многих технически сложных результатов. Применимость графов потока сигнала к задаче обращения матрицы Вандермонда основана на глубокой связи между теорией линейных динамических систем и теорией ортогональных многочленов.

Научная новизна работы

Предлагаемый в работе алгоритм вычисления собственных значений хессенберговых квазисепарабельных матриц (алгоритм 4), является новым и принадлежит автору. Автору не известны другие алгоритмы решения той же задачи, обладающие сравнимой или более низкой алгебраической сложностью. Теорема 26, определяющая структуру матриц, обратных к полиномиальным матрицам Вандермонда, и задающая алгоритм их быстрого обращения, получена в соавторстве с В. Р. Ольшевским и Е. Е. Тыртышниковым. Идея использования графов потока сигнала и принципа Теллегена при ее доказательстве принадлежит В. Р. Ольшевскому. Класс многоуровневых квазисепарабельных матриц (определение 31) изобретен автором и не был известен ранее. Метод решения систем уравнений с седловой точкой, использующий многоуровневую квазисепарабельную структуру, является новым и принадлежит автору. Теорема 41, устанавливающая численную устойчивость алгоритма решения системы с квазисепарабельной матрицей, доказана автором совместно с Ф. М. Допико и В. Р. Ольшевским.

Защищаемые положения

На защиту выносятся основные результаты работы:

1. Алгоритм LR-типа вычисления собственных значений хессенберговых матриц с малоранговой структурой в верхней части и вытекающий из него новый метод вычисления корней многочлена, разложенного по произвольному ортогональному базису, сложности $\mathcal{O}(n)$ на корень.

2. Полное описание матриц, обратных к полиномиальным матрицам Вандермонда, а также алгоритм их обращения сложности $\mathcal{O}(n^2)$ в структурированном случае.

3. Новый метод решения систем с седловой точкой, возникающих в задачах оптимального управления с ограничениями в виде уравнений в частных производных, основанный на идее многоуровневой малоранговой квазисепарабельной структуры матриц.

4. Теорема о численной устойчивости быстрого алгоритма решения системы уравнений с квазисепарабельной матрицей, предложенного в Eidelman Y. and Gohberg. I. A modification of the Dewilde-van der Veen method for inversion of finite structured matrices // Linear Algebra and its Applications. 2002. V. 343. P. 419–450.

Практическая значимость работы

Работа посвящена развитию численных методов, основанных на использовании малоранговой структуры матриц. Полученные алгоритмы применены для решения некоторых задач вычислительной математики, имеющих практическую ценность.

Поиск корней многочленов является одной из важнейших задач алгебры, часто возникающих в инженерных вычислениях. С точки зрения линейной алгебры эта задача может быть переформулирована, как задача на собственные значения для обобщенной матрицы Фробениуса. Один из основных результатов диссертации — это алгоритм решения задачи на собственные значений таких матриц, использующий их структуру. Предложенный алгоритм обобщает алгоритм Фернандо и Парлетта для трехдиагональных матриц, который в симметричном положительно-определенном случае гарантирует высокую точность вычисленных собственных значений. У нас нет доказательства подобного утверждения для нового алгоритма, однако на практике его точность намного превосходит точность QR-алгоритма. К тому же, сложность предложенного алгоритма составляет всего $\mathcal{O}(n)$ арифметических операций на корень, что на порядок меньше, чем $\mathcal{O}(n^2)$ для QR-алгоритма.

Другие важные с практической точки зрения результаты диссертации относятся к области оптимального управления в процессах, чья динамика описывается уравнениями в частных производных. Такие оптимизационные задачи возникают повсеместно в процессе инженерного проектирования, например, при построении летательных аппаратов и химических реакторов. Дискретизация задач управления с ограничениями в виде уравнений в частных производных приводит к системам с седловой точкой больших размеров. Численное решение таких систем — непростая задача из-за неопределенности и плохой обусловленности матриц систем. Нами предложен новый подход к решению систем с седловой точкой, использующий малоранговую структуру матриц и обратных к ним. Наш метод достаточно универсальный и может быть применен к задачам с разными дифференциальными операторами. Численные эксперименты с простейшим уравнением теплопроводности показали линейную сложность предложенного алгоритма относительно числа точек дискретизации. На данный момент область применения алгоритма ограничена двумерными задачами, дискретизованными на равномерных тензорных сетках. Однако мы надеемся, что идеи многоуровневой малоранговой аппроксимации матриц, предложенные в данной работе, в будущем будут развиты и применены к решению задач более общего вида.

Для практической реализации любого алгоритма на ЭВМ важно знать, является ли последний численно устойчивыми. Численная устойчивость означает, что, если все арифметические операции в процессе счета алгоритма произведены с малой ошибкой ε, то результат вычислений является точным для малого $\mathcal{O}(\varepsilon)$ возмущения первоначальных данных. Очевидно, что, если алгоритм не является численно устойчивым, то нет никакой гарантии, что ответ, найденный с его помощью им на ЭВМ, хоть как-то связан с входными данными. Нами изучена численная устойчивость двух известных алгоритмов решения систем уравнений с квазисепарабельными матрицами. Мы доказали численную устойчивость одного из алгоритмов и построили пример, в котором это свойство нарушается для другого алгоритма. Таким образом, мы прояснили какой из двух алгоритмов пригоден для практических вычислений на ЭВМ.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на различных конференциях, в том числе на международной конференции по прикладной математической оптимизации и моделированию APMOD (Падерборн, 2012), 16-ой (Пиза, 2010) и 17-ой (Брауншвейг, 2011) конференциях международного общества линейной алгебры ILAS, 24-ой международной конференции по численному анализу (Глазго, 2011), 3-ей международной конференции по матричным методам в математике и приложениях (Москва, 2011), конференции по линейной алгебре общества индустриальной и прикладной математики SIAM (Монтерей, 2009), а также на семинаре «Вычислительная математика и приложения» в ИВМ РАН, семинаре исследовательской группы по оптимизации ERGO Эдинбургского университета и семинаре «Ортогональность, теория аппроксимаций и приложения» в Мадридском университете имени Карлоса 3-го.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 1 статья [3] в журнале из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованых ВАК, 5 статей [1,2,4,5,6] в зарубежных рецензируемых журналах и 2 статьи [7,8] в зарубежных рецензируемых сборниках. Статьи [1,2] посвящены недавно полученным результатам и приняты к публикации.

Личный вклад автора

Результаты, описанные в главах 1 и 3 диссертации, получены автором самостоятельно. Результаты глав 2 и 4 получены в соавторстве, что отражено в соответствующих публикациях [1,3]. Причем личный вклад автора в совместные работы основной — это теоремы 26 и 38 глав 2 и 4, соответственно, и результаты численных экспериментов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста и заключения. Объем диссертации — 135 страниц. Библиография включает в себя 96 наименований. Диссертация содержит 11 рисунков и 17 таблиц.

Краткое содержание работы

Диссертация посвящена развитию теории малоранговo–структурированных матриц особого вида, называемых *квазисепарабельными*, а также их применению для решения некоторых классических задач линейной алгебры и вычислительной математики в целом.

Матрицы с квазисепарабельной структурой были впервые упомянуты в фундаментальной работе Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна «Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем». Эти матрицы, в некотором смысле, являются дискретными аналогами функций Грина одномерных дифференциальных операторов. В качестве простейшего примера рассмотрим следующую краевую задачу с оператором Штурма–Лиувилля:

$$\mathcal{L}(u) := (p(x)u')' - q(x)u = f(x),$$
$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(u) := \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \mathcal{B}_2(u) := \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

В теории операторов Штурма–Лиувилля доказывается, что любое решение $u(x)$ этой краевой задачи представимо в виде интеграла

$$u(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $g(x,\xi)$ — так называемая функция Грина для (1). Причем функция Грина, для одномерного оператора Штурма–Лиувилля имеет вид

$$g(x,\xi) = C \cdot \begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ u_1(\xi)u_2(x), & \xi < x \leqslant b, \end{cases} \tag{2}$$

где u_1 и u_2 — ненулевые частные решения однородного уравнения $\mathcal{L}(u_i) = 0$ с $\mathcal{B}_i(u_i) = 0$. Представление (2) означает, что функция $g(x,\xi)$ — сепарабельная в двух подобластях своей области определения. Дискретный аналог такой функции — это квазисепарабельная матрица, имеющая малоранговую структуру выше и ниже диагонали. Строгое определение квазисепарабельной матрицы приведено ниже.

Определение. *Матрица A называется квазисепарабельной порядков p и q, если выполнено условие*

$$\begin{aligned} \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \operatorname{rank} A(k+1:n, 1:k) \leqslant p, \\ \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \operatorname{rank} A(1:k, k+1:n) \leqslant q \end{aligned} \tag{3}$$

при фиксированных p *и* q.

Из этого определения вытекает, что квазисепарабельные матрицы задаются всего $\mathcal{O}(n)$ независимыми параметрами. Сложность основных алгоритмов линейной алгебры с квазисепарабельными матрицами также $\mathcal{O}(n)$, благодаря тому, что эти алгоритмы оперируют с параметрами, а не с элементами матрицы.

Квазисепарабельные матрицы находят свое применение во многих областях прикладной математики. В частности, в теории систем и теории управления, ортогональных многочленах и теории приближений, интегральных уравнениях и статистике. В главах 1 и 2 настоящей диссертации развиваются численные методы в теории ортогональных многочленов, основанные на использовании квазисепарабельных матриц. Глава 3 посвящена применению квазисепарабельных матриц к решению уравнений в частных производных и задач оптимального управления с ними. В главе 4 развивается теория квазисепарабельных матриц, а именно, анализ ошибок округления для алгоритмов с ними.

Первая глава посвящена вычислению корней многочлена, представленного в базисе произвольных ортогональных многочленов, таких, как многочлены Чебышёва, Лагранжа, Эрмита, Сегё и прочие. Пусть $P(x)$ и $\{r_k(x)\}_{k=0}^{n}$ — многочлен степени n и ортогональный базис соответственно, тогда

$$P(x) = r_n(x) + m_{n-1} \cdot r_{n-1}(x) + \ldots + m_1 \cdot r_1(x) + m_0 \cdot r_0(x). \tag{4}$$

Хорошо известно, что многочлены с единичным старшим коэффициентом, ортогональные на отрезке вещественной оси, удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$r_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \cdot r_k(x) - \beta_k \cdot r_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

В §1.2 мы показываем, что из (4) и (5) следует, что корни многочлена $P(x)$ совпадают с собственными значениями обобщенной матрицы Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & -m_0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & & -m_1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} - m_{n-2} \\ & & & 1 & \alpha_{n-1} - m_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Одно из свойств этой матрицы — это то, что любая подматрица в ее верхнетреугольной части имеет ранг не выше 2, то есть A — квазисепарабельная. Казалось бы, при чем тут квазисепарабельность? Однако, в §§1.2-1.3

мы доказываем, что 1) факторы LU-разложения квазисепарабельной матрицы наследуют квазисепарабельную структуру, и что 2) эта структура сохраняется в итерациях LR-алгоритма, то есть, при преобразованиях A в A', таких, что

$$A - \sigma I = LU, \quad A' = UL. \tag{7}$$

Так как алгоритмы с квазисепарабельными матрицами обладают линейной по размеру сложностью, сложность одной LR-итерации для матрицы из (6) также линейная.

Низкой алгебраической сложности недостаточно, чтобы считать алгоритм «хорошим», другая необходимая характеристика — численная устойчивость. К сожалению, LR-алгоритм (7) не является численно устойчивым. Однако, в 1994 году К. Фернандо и Б. Парлетт получили аналог LR-алгоритма для трехдиагональных матриц, для которого известно, что в симметричном положительно определенном случае ошибка в вычисленных им собственных значениях $\widehat{\lambda}_i$ мала относительно точных собственных значений λ_i:

$$|\lambda_i - \widehat{\lambda}_i| \leqslant \varepsilon \max\{\lambda_i, \widehat{\lambda}_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Интересно, что даже такой широко известный численно устойчивый алгоритм, как QR, не обладает свойством (8).

В §1.4 мы обобщили алгоритм Фернандо и Парлетта на случай хессенберговых квазисепарабельных матриц. Новый алгоритм использует все те же $\mathcal{O}(n)$ арифметических операций на шаг. Так как нашей главной задачей было вычисление собственных значений матрицы A из (6) (корней многочлена (4)), в §1.6 мы уточнили новый алгоритм на этот случай. Хотя у нас нет доказательства, что в этом более общем случае предложенный алгоритм все ещё удовлетворяет (8), результаты численных экспериментов, представленные в §1.7, демонстрируют его более высокую точность в сравнении с алгоритмом QR.

Во **второй главе** мы рассматриваем задачу об обращении полиномиальной матрицы Вандермонда

$$V_r = \begin{bmatrix} r_0(x_1) & r_1(x_1) & \cdots & r_{n-1}(x_1) \\ r_0(x_2) & r_1(x_2) & \cdots & r_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0(x_n) & r_1(x_n) & \cdots & r_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Эта матрица обобщает хорошо известную обыкновенную матрицу Вандермонда, для которой $r_k(x) = x^k$. Задача об обращении матрицы V_r — классическая задача линейной алгебры, которая возникает, например, при интерполировании в базисе многочленов $\{r_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ функции, заданной значениями в узлах $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

Известно, что для узлов, равномерно распределенных на отрезке, классическая матрица Вандермонда плохо обусловлена. В 1994 году Е.Е. Тыртышниковым было доказано, что ее число обусловленности растет экспоненциально с размером. Однако в 1966 году Д. Траубом был получен алгоритм обращения матрицы Вандермонда за $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций с малой прямой ошибкой. Казалось бы, это невозможно: прямая ошибка равняется обратной (не меньше машинного нуля) умноженной на число обусловленности (огромно!), однако весь «трюк» заключается в том, что алгоритм Трауба — структурный ($\mathcal{O}(n^2)$ против $\mathcal{O}(n^3)$), и к нему неприменим стандартный результат теории ошибок округления. Другими словами, структурное число обусловленности матрицы Вандермонда мало. Следуя успеху Трауба, многие исследователи в области численной линейной алгебры обратились к задаче обращения матрицы (9) для различных базисов многочленов. Л. Райхел и Г. Опфер обобщили алгоритм Трауба на случай многочленов Чебышёва, а В. Ольшевский — на случай многочленов Сегё.

Нами решена задача об обращении полиномиальной матрицы Вандермонда (9) для абсолютно произвольной системы многочленов $\{r_k(x)\}$. Тем самым мы обобщили все результаты, полученные ранее для частных случаев. Наш подход основан на использовании междисциплинарной связи между тремя разделами науки: (i) электротехникой, (ii) информатикой и (iii) линейной алгеброй.

Из информатики мы берем так называемый принцип Теллегена, который мы рассматриваем в §2.2. В самом общем смысле принцип Теллегена гласит, что сложности умножения на квадратную матрицу без нулевых строк и столбцов и ее транспонированную равны. Доказательство этого факта основано на интерпретации умножения на матрицу через поток сигнала по взвешенному направленному графу.

В §2.3 мы связываем теорию графов с многочленами через граф потока сигнала, использующийся в электротехнике. Мы показываем, как обращение обыкновенной матрицы Вандермонда связано с обращением направления потока в таком графе. В следующем §2.4 мы обобщаем эту теорию на случай произвольных многочленов и полиномиальной матрицы Вандермонда и с помощью принципа Теллегена доказываем теорему 26, описывающую обратную к (9) матрицу. Из этой теоремы вытекает быстрый $\mathcal{O}(n^2)$ алгоритм обращения, который мы применяем в §2.5 к матрице, для которой аналогичный алгоритм не был известен ранее. Результаты численных экспериментов демонстрируют малую прямую ошибку в обратной матрице, найденной предложенным алгоритмом.

Третья глава посвящена задачам управления с ограничениями в виде уравнений в частных производных и методам их решения. В §3.2 рассматривается одна такая модельная задача, приведенная ниже

$$\begin{aligned}
&\min_{u,f} \frac{1}{2}\|u-\widehat{u}\|_2^2+\beta\|f\|^2,\\
&-\nabla^2 u = f \text{ в } \Omega,\\
&u = g \text{ на } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решение подобных задач — один из важных этапов современного инженерного проектирования.

Дискретизация (10) методом конечных элементов приводит к системе линейных уравнений с блочной матрицей особого вида:

$$\begin{bmatrix} 2\beta M & 0 & -M \\ 0 & M & K^T \\ -M & K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ d \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где M — матрица масс, а K — матрица жесткости. Система (11) — частный случай системы уравнений с седловой точкой (решение этой системы есть седловая точка соответствующего лагранжиана). Самые быстрые методы решения этой системы — итерационные, а техники предобусловливания основаны на приближенном решении системы с матрицей блочного дополнения по Шуру для блока в позиции (3,3):

$$S = -\left(\frac{1}{2\beta}M + KM^{-1}K^T\right). \tag{12}$$

Главная сложность заключается в том, что матрица S плотная, и ее невозможно вычислить и/или сохранить в памяти в поэлементном представлении. Один из стандартных подходов — использовать только одно из слагаемых $-\frac{1}{2\beta}M$ или $-KM^{-1}K^T$ в качестве приближения матрицы S. Очевидно, что такой предобусловливатель в общем случае не очень эффективен.

В §3.3 показывается, что плотная матрица (12) обладает малоранговой структурой особого вида, называемой *многоуровневой квазисепарабельной* (определение 31). В этом параграфе также объясняется как малопараметрическое представление матрицы S из (12) может быть вычислено всего за $\mathcal{O}(n)$ арифметических операций. Далее мы используем это структурное представление матрицы для построения ее предобусловливателя. Результаты численных экспериментов, представленные в §3.4, демонстрируют, что наш предобусловливатель обладает хорошими спектральными свойствами и, при использовании совместно с методом сопряженных градиентов, приводит к алгоритму решения (11) линейной по размеру задачи сложности.

Последняя **четвертая глава** посвящена анализу ошибок округления в алгоритмах с квазисепарабельными матрицами. Интересно, что, несмотря на активное развитие теории квазисепарабельных матриц в последнее десятилетие, эта область исследований осталась нетронутой. Возможно, это объясняется тем, что алгоритмы с квазисепарабельными матрицами используют малопараметрические представления последних, и анализ ошибок округления становится гораздо сложнее и нестандартнее.

Мы ставим вопрос о численной устойчивости алгоритмов решения систем уравнений с квазисепарабельными матрицами. Стандартный алгоритм решения системы уравнений — метод исключения Гаусса (LU-факторизация). Однако выбор ведущего элемента (перестановка строк и столбцов) в этом алгоритме разрушает квазисепарабельную структуру матрицы (а значит и линейную сложность), а без выбора ведущего элемента метод исключения Гаусса неустойчив. С другой стороны QR-факторизация — устойчивый алгоритм даже без перестановок строк и столбцов, и, в отличие от неструктурного случая, имеет линейную $\mathcal{O}(n)$ сложность для квазисепарабельных матриц. Мы рассматриваем два алгоритма решения системы уравнений с квазисепарабельной матрицей через QR-факторизацию последней, представленные в научной литературе.

Алгоритм А: Eidelman Y. and Gohberg I. A modification of the Dewilde-van der Veen method for inversion of finite structured matrices // Linear Algebra and its Applications. 2002. V. 343. P. 419–450.

Алгоритм Б: Van Camp E., Mastronardi N. and Van Barel M. Two fast algorithms for solving diagonal-plus-semiseparable linear systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2004. V. 164. P. 731–747.

В §4.2 мы описываем общие идеи этих алгоритмов. Первый из алгоритмов детально рассматривается в §4.3. Главный результат этого параграфа — теорема 41 о численной устойчивости алгоритма А, приведенная ниже.

Теорема. *Пусть A — $n \times n$ квазисепарабельная матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, система уравнений $Ax = b$ решена в арифметике с плавающей точкой с помощью алгоритма А. Тогда найденное решение $\widehat{x}$ является точным решением системы*

$$(A + \Delta A)\widehat{x} = b + \Delta b,$$

где

$$\|\Delta A(:,j)\|_2 \leqslant \gamma_{K_1 n^2} \|A(:,j)\|_2, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \|\Delta b\|_2 \leqslant \gamma_{K_2 n} \|b\|_2$$

и K_1, K_2 *— малые (натуральные) константы.* γ_k *— общепринятое обозначение для накопившихся ошибок округления. Обозначим через* $\mathbf{u}$ *машинный ноль, тогда* $\gamma_k := k\mathbf{u}/(1-k\mathbf{u})$.

В §4.4 мы проводим анализ ошибок округления для алгоритма Б. Нами построен пример размера 4×4, который демонстрирует, что алгоритм Б численно неустойчив. Мы объясняем причины неустойчивости и подтверждаем наши выводы результатами численных экспериментов.

Главный вывод, который можно сделать из результатов этой главы, это то, что в случае малорангово-структурированных матриц устойчивость алгоритма не есть прямое следствие устойчивости его аналога в неструктурированном случае и требует отдельного исследования.

Основные результаты работы

1. Выведен новый алгоритм вычисления собственных значений хессенберговых матриц с малоранговой структурой в верхней части, обобщающий dqds-алгоритм Фернандо и Парлетта для трехдиагональных матриц. На его основе построен новый метод вычисления корней многочлена, разложенного по произвольному ортогональному базису, сложности $\mathcal{O}(n)$ на корень.

2. Получено полное описание матриц, обратных к полиномиальным матрицам Вандермонда, а также, алгоритм их обращения сложности $\mathcal{O}(n^2)$ в структурированном случае.

3. Определен и изучен новый класс матриц с малоранговой структурой — многоуровневые квазисепарабельные матрицы.

4. Предложен новый метод решения систем уравнений с седловой точкой, возникающих в задачах оптимального управления с ограничениями в виде уравнений в частных производных.

5. Доказана теорема о численной устойчивости алгоритма QR-факторизации квазисепарабельной матрицы и основанного на нем метода решения систем уравнений.

Публикации по теме диссертации

1. Dopico F., Olshevsky V., Zhlobich P. Stability of QR-based fast system solvers for a subclass of quasiseparable rank one matrices // Mathematics of Computation (accepted). 2012.

2. Zhlobich P. Differential qd algorithm with shifts for rank-structured matrices // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications (accepted). 2012.

3. Olshevsky V., Tyrtyshnikov E., Zhlobich P. Tellegen's principle, non-minimal realizations of systems and inversion of polynomial Vandermonde matrices // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 27, № 2. P. 131–154.

4. Bella T., Olshevsky V., Zhlobich P. A quasiseparable approach to five-diagonal CMV and Fiedler matrices // Linear Algebra and its Applications. 2011. V. 434, № 4. P. 957–976.

5. Bella T., Olshevsky V., Zhlobich P. Signal flow graph approach to inversion of (H,m)-quasiseparable-Vandermonde matrices and new filter structures // Linear Algebra and its Applications. 2010. V. 432, № 8. P. 2032–2051.

6. Olshevsky V., Strang G., Zhlobich P. Green's matrices // Linear Algebra and its Applications. 2010. V. 432, № 1. P. 218–241.

7. Bella T., Eidelman Y., Gohberg I. et al. Classifications of recurrence relations via subclasses of (H,m)-quasiseparable matrices // «Numerical Linear Algebra in Signals, Systems and Control» / Ed. by P. Van Dooren, S. Bhattacharyya, R. Chan et al. — Springer, 2011. — V. 80 of «Lecture Notes in Electrical Engineering». — P. 23–53.

8. Bella T., Eidelman Y., Gohberg I. et al. A Traub-like algorithm for Hessenberg-quasiseparable-Vandermonde matrices of arbitrary order // «Numerical Methods for Structured Matrices and Applications» / Ed. by V. Mehrmann, D. Bini, V. Olshevsky et al. — Birkhäuser Basel, 2010. — V. 199 of «Operator Theory: Advances and Applications». — P. 127–154.