

*На правах рукописи*

Ботвиновский Евгений Александрович

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И СОПРЯЖЕННЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

*диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук*

Москва 2008

Работа выполнена в Институте вычислительной математики РАН

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор В.И. Агошков

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., Ю.В. Василевский  
к.ф.-м.н., доцент А.В. Попов

Ведущая организация: Институт вычислительного моделирования  
Сибирского отделения РАН

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан «\_\_\_» ноября 2008 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.045.01  
доктор физико-математических наук

Г. А. Бочаров

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Большое количество физических процессов динамики океана описывается моделями, использующими различные модификации и упрощения классических задач гидродинамики, таких как система уравнений Навье-Стокса.

Исследование и численное решение системы уравнений Навье-Стокса – одна из наиболее сложных задач вычислительной математики и гидродинамики, методы решения которой активно разрабатывались в течение последних 50 лет. Большинство работ, опубликованных на эту тему, посвящено развитию численных методов решения уравнений Навье-Стокса и различных их модификаций. Трудности при решении этих задач связаны с недостаточной информацией о точных решениях (почти все найденные точные решения не несут в себе специфики нелинейной задачи). Дополнительные сложности возникают при учете реальных физических данных (геометрия области, разброс значений коэффициентов, специфика поведения решений, размерность задачи, расчет на долгий интервал по времени, ограниченные ресурсы ЭВМ и многое другое). Существующая, в то же время, большая востребованность решения данных задач при моделировании физических процессов гидродинамики оставляет актуальным вопрос о разработке эффективных методов решения в каждом конкретном случае.

Одним из подходов конструирования новых алгоритмов решения задач математической физики (в том числе и задач гидродинамики) является методология их построения, базирующаяся на методах теории оптимального управления. Вероятно, впервые эти подходы были предложены в работе Агошкова В.И., Bardos'a С., Булеева С.Н. (1998) в применении к решению классической стационарной системы Стокса. Идея построения таких методов при рассмотрении системы Стокса состоит в следующем: функция давления рассматривается в качестве "дополнительной" неизвестной по отношению к компонентам вектора скорости – "основным" компонентам решения, а уравнение неразрывности рассматривается в качестве "уравнения замыкания" задачи. Затем задача рассматривается как обратная задача (или задача оптимального управления) и включается в семейство задач оптимального управления, зависящих от регуляризирующего члена. Далее исследуются задачи оптимального управления и для их решения применяются классические численные методы с применением подходов теории сопряженных уравнений. В последующем распространение данных подходов к построению численных алгоритмов и их формулировке для систем операторных уравнений было выполнено в монографии Агошкова В.И. (2003). Однако было актуальным и представляло как теоретический, так и практический интерес исследование данной

методологии в применении к классу задач геофизической гидродинамики, таких как нестационарная система Стокса, возмущенная ограниченным кососимметрическим оператором, и система уравнений динамики приливов в декартовых и сферических координатах. Отметим, что в отношении системы уравнений динамики приливов дополнительные сложности возникают в силу сингулярности сферической системы координат в точках "полюса" на сфере, и исследование поведения гладких решений системы уравнений динамики приливов в окрестности "полюсных точек" представляет особый интерес. Знание асимптотического разложения гладких решений в окрестности этих точек позволило бы предложить различные способы уточнения численных решений исходных уравнений. Изложенное выше было принято в качестве целей исследований в диссертационной работе и обуславливает их актуальность.

**Цель работы** – разработка и исследование новых алгоритмов решения класса задач геофизической гидродинамики (возмущенных уравнений Стокса, задач динамической теории приливов в декартовых и сферических координатах) на основе методологии их построения, базирующейся на подходах теории оптимального управления и сопряженных уравнений.

**Научная новизна работы.** Представленные в диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем:

- Разработан, обоснован и численно реализован новый метод решения нестационарной системы Стокса, возмущенной кососимметрическим оператором, базирующийся на теории оптимального управления и сопряженных уравнений.
- Разработан, исследован и численно реализован новый метод решения системы уравнений динамики приливов в прямоугольной области и на сфере. Предложенный метод базируется на совместном применении схемы расщепления и подходов теории оптимального управления и сопряженных уравнений.
- Получены оценки для границ спектра "оператора давления" на сфере. Выписаны асимптотические представления гладких решений в окрестности точек полюса на сфере до третьего порядка малости. Предложены формулы, увеличивающие точность численного решения в окрестности точек полюса на сфере.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость

диссертационной работы состоит в развитии методологии построения новых алгоритмов решения класса задач геофизической гидродинамики, базирующейся на теории оптимального управления и сопряженных уравнений, а также в систематическом исследовании и обосновании предлагаемых алгоритмов. Практическая значимость заключается в возможности использования полученных оценок спектров рассматриваемых в работе операторов для ускорения сходимости итерационных алгоритмов. Кроме того, предложенные в работе формулы уточнения численных решений в окрестности "полюсных точек" на сфере могут найти применение при численном решении более широкого класса задач геофизической гидродинамики – общей циркуляции океана.

**Апробация работы.** Результаты диссертации обсуждались на семинарах Института вычислительной математики РАН, Вычислительного центра РАН, кафедры Вычислительной математики Механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова.

Результаты диссертации докладывались на Международной конференции "Тихонов и современная математика" (Москва, 2006), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Москва, 2007), конференции "Тихоновские чтения" (Москва, 2007), Международной конференции "Ломоносов-2008" (Москва, 2008), Международной конференции EGU General Assembly (Вена, 2008).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 4 статьи в рецензируемых журналах (из них [1,5,7] – в журналах, рекомендованных ВАК для защиты кандидатских диссертаций) и 3 работы в сборниках тезисов.

**Личный вклад автора.** Во всех работах, подготовленных в соавторстве, диссертант совместно осуществлял теоретическое исследование задач, самостоятельно проводил обоснования итерационных процессов, планирование численных экспериментов, выполнял все расчеты и осуществлял анализ результатов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы, включающего 89 названий, содержит 29 рисунков и 21 таблицу. Объем диссертации составляет 131 страницу.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждаются рассматриваемые в работе задачи и существующие методы их решения. Описывается структура диссертации, кратко формулируются основные полученные результаты.

В **первой главе**, состоящей из двух разделов, рассматривается методология конструирования новых методов решения класса задач, задаваемого системой операторных уравнений:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = h + Du, \quad (1)$$

где  $f, h$  – заданные элементы,  $\phi, u$  – неизвестные,  $L, B, C, D$  – линейные операторы. Суть этой методологии заключается в следующем: компоненты всего исходного вектора неизвестных (вектора решения) разбиваются на две группы, при этом первая из них (обозначается  $\phi$ ) условно называется ”основной” составляющей решения, а вторая (обозначается  $u$ ) – ”дополнительной” (или ”управлением”). Полная система уравнений задачи (если она заранее не представлена в форме (1)) записывается в виде системы двух операторных уравнений (1). Затем вся задача сводится к задаче оптимального управления с регуляризирующим слагаемым: найти  $\phi = \phi(u)$  и управление  $u$  такие, что

$$L\phi = f + Bu, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \quad (2)$$

где

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \frac{\alpha}{2} \|v - u_C\|_{H_C}^2 + \frac{1}{2} \|C\phi - h - Dv\|_{H_{ob}}^2, \\ L\phi(v) = f + Bv, \quad \alpha \geq 0,$$

$u_C$  заданный элемент,  $H_C, H_{ob}$  – гильбертовы пространства. Далее выписываются необходимые условия экстремума функционала (2), которые можно записать в виде вариационного уравнения  $\alpha u + A^*Au = A^*f$ , где  $A$  – некоторый оператор, который в общем случае не является самосопряженным, а  $A^*$  – сопряженный к  $A$  оператор. Отметим, что это уравнение является основным объектом исследования в теории обратных задачах с помощью методов регуляризации А.Н. Тихонова. Именно к нему применяются классические итерационные методы и доказывается сходимость последовательности приближений к решению задачи (1). Однако при рассмотрении конкретных задач исходные уравнения в ряде случаев удается записать таким образом, что  $A = A^*$ . В этом случае становится возможным применение к решению рассматриваемого уравнения алгоритмов, базирующихся на теории М.М. Лаврентьева решения обратных и некорректных задач. К этому классу относится

метод, сформулированный в **разделе 1.2** данной главы. Отметим, что благодаря симметричности исходного оператора при реализации рассматриваемого в **разделе 1.1** алгоритма нет необходимости решать сопряженные задачи. Это позволяет уменьшить время расчёта по сравнению с соответствующими алгоритмами из **раздела 1.1**.

Во **второй главе** проведено исследование изложенной в главе 1 методологии в применении к нестационарной системе Стокса, возмущенной ограниченным кососимметрическим оператором.

В **разделе 2.1** формулируется постановка задачи: найти функции  $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\Omega$  ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , такие, что

$$\begin{aligned} \phi_t - a\Delta\phi + \mathbf{1} \times \phi + b\phi &= f - \nabla p \quad \text{в } \Omega \times (0, T) \equiv Q_T, \\ \operatorname{div}\phi &= 0 \quad \text{в } Q_T, \quad \phi|_{\Gamma} = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad \phi|_{t=0} = \phi_0, \\ \int_{\Omega} p \, d\Omega &= 0 \quad \forall t, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ,  $\mathbf{1} \times \phi \equiv (-l\phi_2, l\phi_1, 0, \dots, 0)$ ,  $a, b, l = \text{const}$ ,  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ . Далее, вводятся необходимые функциональные пространства и формулируется обобщенная постановка (3). Затем, согласно исследуемой методологии, мы переходим к рассмотрению семейства задач оптимального управления с регуляризирующим слагаемым

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(p, \phi) &\equiv \frac{1}{2}\alpha\|p\|_{L_2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\phi\|_{L_2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\phi|_{t=T}\|_{L_2(\Omega)}^2 \longrightarrow \inf_p, \\ \phi_t - a\Delta\phi + \mathbf{1} \times \phi + b\phi &= f - \nabla p, \quad \alpha = \text{const} \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $\phi, p$  есть решение системы уравнений (3), то оно будет решением (4) при  $\alpha = 0$ .

В **разделе 2.2** для решения (4) выписываются необходимые условия экстремума функционала  $J_{\alpha}(p, \phi)$  в виде вариационного уравнения

$$\alpha p + A^*Ap = A^*g, \quad \text{где } A = CL^{-1}B, \quad g = -CL^{-1}f, \quad (5)$$

а операторы  $L, B, C$  определяются с помощью билинейных форм:

$$(L\phi, \widehat{\phi}) \equiv (\phi, -\widehat{\phi}_t) + (a\nabla\phi, \nabla\widehat{\phi}) + (b\phi, \widehat{\phi}) + (-l\phi_2, \widehat{\phi}_1)_{L_2(Q_T)} + (l\phi_1, \widehat{\phi}_2)_{L_2(Q_T)} + (\phi(T), \widehat{\phi}(T))_{(L_2(\Omega))^n},$$

$$(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{(L_2(Q_T))^n}, \quad (Bp, \widehat{\phi}) \equiv (p, \operatorname{div}\widehat{\phi})_{L_2(Q_T)}, \quad (C\phi, \widehat{p}) \equiv (\operatorname{div}\phi, \widehat{p})_{L_2(Q_T)}, \quad \forall\phi, \widehat{\phi} \in \mathbf{W}, \forall p, \widehat{p} \in H_C,$$

$$H_C = \left\{ f \in L_2(Q_T) : \int_{\Omega} f \, d\Omega = 0 \quad \forall t \in [0, T] \right\}, \quad \mathbf{H} \equiv (H)^n, \quad H \equiv L_2(Q_T),$$

$$\mathbf{Y} = L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^n), \quad \mathbf{W} = \left\{ \phi \in \mathbf{Y} : \|\phi\|_{\mathbf{W}} = (\|\phi_t\|_{L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^n)^*}^2 + \|\phi\|_{\mathbf{Y}}^2)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Относительно разрешимости уравнения

$$Ap = g \Leftrightarrow L\phi = f + Bp, \quad C\phi = 0 \quad (6)$$

справедлива следующая

**Теорема 1.** Уравнение  $Ap = g$  однозначно и плотно разрешимо. Если задача (3) имеет "классическое" решение  $\phi, p$  (например,  $\phi \in C^2(\overline{Q_T}), p \in C^1(\overline{Q_T})$ ), то пара  $\phi, p$  удовлетворяет (6).

**Следствие 1.** Пусть  $\phi, p$  есть решение задачи (3) (классическое или обобщенное), а  $\phi(\alpha), p(\alpha)$  – есть компоненты решения задачи (4) при  $\alpha > 0$ . Тогда

$$\|p(\alpha) - p\|_{H_C} + \|\phi(\alpha) - \phi\|_{\mathbf{H}} \rightarrow 0, \quad \|\operatorname{div}\phi(\alpha)\|_H \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow +0$$

В разделе 2.3 рассматривается итерационный процесс для решения уравнений (5). В "классической" форме записи он имеет вид: если  $p^{(k)}$  задано, то последующее приближение находим, решая системы

$$\phi_t^{(k)} - a\Delta\phi^{(k)} + \mathbf{l} \times \phi^{(k)} + b\phi^{(k)} = f - \nabla p^{(k)}, \quad \phi^{(k)}|_{\Gamma} = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad \phi^{(k)}|_{t=0} = \phi_0 \quad (7)$$

$$-\mathbf{q}_t^{(k)} - a\Delta\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{l} \times \mathbf{q}^{(k)} + b\mathbf{q}^{(k)} = -\nabla \operatorname{div}\phi^{(k)}, \quad \mathbf{q}^{(k)}|_{\Gamma} = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad \mathbf{q}^{(k)}|_{t=T} = 0, \quad (8)$$

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \tau_k(\alpha p^{(k)} + \operatorname{div}\mathbf{q}^{(k)}), \quad (9)$$

где  $\mathbf{q}^{(k)} \equiv (q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots, q_n^{(k)})$ ,  $\tau_k > 0$ ,  $\alpha > 0$  – параметры.

Из теории экстремальных задач следует, что если известна величина  $J_* = \inf J(u) > -\infty$  (а в задаче (4) имеем  $J_* = 0$  в силу теоремы 1), то для ускорения сходимости итерационного процесса (7)-(9) параметры  $\{\tau_k\}$  можно вычислять по следующей формуле:

$$\tau_k \simeq \frac{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\operatorname{div}\phi^{(k)}|^2 d\Omega dt}{\int_0^T \int_{\Omega} |\operatorname{div}\mathbf{q}^{(k)}|^2 d\Omega dt}.$$

В разделе 2.4 предложены некоторые способы уточнения приближений для  $p$ . Первый способ состоит в следующем. Функцию  $f \in (L_2(\Omega))^2$  представим в виде  $f = g \oplus h$ , где  $g \equiv \nabla P, P \in W_2^1$ , а  $h$  удовлетворяет условиям  $\operatorname{div}h = 0$  и  $h|_{\partial\Omega} = 0$ . Справедливо следующее уравнение

$$\Delta P = \operatorname{div}f \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \vec{n} \cdot f, \quad \int_{\Omega} P dx = 0.$$

Вводя  $\tilde{p} \equiv p - P$  переходим к решению задачи:

$$\begin{cases} \phi_t - a\Delta\phi + \mathbf{l} \times \phi + b\phi = h - \nabla\tilde{p} \text{ в } Q_T, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \text{ в } Q_T, \phi|_{\Gamma} = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad \phi|_{t=0} = \phi_0, \\ \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \quad \forall t. \end{cases}$$



Искомая функция  $p$  есть  $p = \tilde{p} + P$ . Второй способ заключается в формулировке и решении "специальной задачи для  $p$ " после окончания итерационного процесса при найденном  $\phi$ .

**Пример.** Если  $\Omega \equiv (0, A) \times (0, B)$ , то "специальная задача" есть

$$\Delta p = \operatorname{div} f - \mathbf{1} \cdot \operatorname{rot} \phi \text{ в } \Omega \quad \forall t, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0, B} = f_2 - a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0, A} = f_1 - a \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

где  $\phi \equiv (u, v)$ . Результаты расчетов показывают, что применение методов уточнения приближенного решения к функции давления  $p$  уменьшает значение относительных ошибок для  $p$ .

В разделе 2.5 приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие основные выводы по данной главе.

В третьей главе рассматривается применение общей методологии совместно с классическими методами расщепления к построению численного метода решения системы уравнений динамики приливов в декартовых координатах и области прямоугольной формы.

В разделе 3.1 приводится постановка задачи: в  $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \equiv [0, A] \times [0, B]$  требуется найти функции  $\mathbf{U} \equiv (u, v) \in (L_2(Q_T))^2$ ,  $\zeta \in L_2(Q_T)$  такие, что  $u, v \in L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^2)$ ,  $u_t, v_t, \zeta_t \in L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^2)^*$  и удовлетворяющие следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t - \operatorname{Div}(\nu \nabla \mathbf{U}) + K \mathbf{U} + g H \nabla \zeta &= \mathbf{f}, \quad \zeta_t + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \quad \mathbf{U} \Big|_{t=0} = \mathbf{U}_{(0)}, \quad \zeta \Big|_{t=0} = \zeta_{(0)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\nu, H > 0$  в  $\Omega$ ,  $H, g = \text{const}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{U} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ,

$$\operatorname{Div}(\nu \nabla \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\nu u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu u_y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\nu v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu v_y) \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{r^*}{H^2} |\tilde{\mathbf{U}}| & -l \\ l & \frac{r^*}{H^2} |\tilde{\mathbf{U}}| \end{bmatrix}, \quad l, r^* = \text{const} > 0,$$

$\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$  – заданная вектор-функция, компоненты которой являются достаточно гладкими. Компоненты вектор-функции  $\mathbf{U}$  имеют физический смысл составляющих полного потока,  $\zeta$  – отклонение поверхности океана относительно "поверхности равновесия",  $H$  – глубина океана,  $r^*$  и  $\nu$  – коэффициенты придонного и горизонтального турбулентного трения,  $l$  – параметр Кориолиса.

В разделе 3.2 рассматривается метод расщепления для аппроксимации (10) по времени. Вводится сетка  $t_j = j \Delta t$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_T$ ,  $\Delta t = T/N_T$  и на каждом отрезке  $(t_{j-1}, t_j)$  применяется схема расщепления вида:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{U}_j^{(1)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(1)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \operatorname{Div}(\nu \nabla (\mathbf{U}_j^{(1)} + \mathbf{U}_{j-1}^{(1)})) + \frac{gH}{2} \nabla (\zeta_j + \zeta_{j-1}) = \mathbf{f}_{j-1/2}, \\ \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{U}_j^{(1)} + \mathbf{U}_{j-1}^{(1)}) = 0, \quad \mathbf{U}_j^{(1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \mathbf{U}_{j-1}^{(1)} = \mathbf{U}_{j-1}^{(2)}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{U}_j^{(2)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(2)}}{\Delta t} + \frac{1}{2}K_{j-1/2}(\mathbf{U}_j^{(2)} + \mathbf{U}_{j-1}^{(2)}) = 0, \mathbf{U}_{j-1}^{(2)} = \mathbf{U}_{j-1}^{(1)}, \quad (12)$$

где

$$K_{j-1/2} \equiv K(\mathbf{U}_{j-1}), \mathbf{U}_0^{(2)} = \mathbf{U}_{(0)}, \zeta_0 = \zeta_{(0)}, j = 1, \dots, N_T.$$

Реализация (12) может быть осуществлена по явным формулам, а (11) сводится к решению задач типа:

$$-\text{Div}(a\nabla\mathbf{U}) + b\mathbf{U} + c\nabla\zeta = \mathbf{F}, \quad c \text{div}\mathbf{U} + d\zeta = G, \quad \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (13)$$

В разделе 3.3 доказывается корректная разрешимость стационарной задачи (13) в соответствующих функциональных пространствах.

В разделе 3.4 формулируется задача оптимального управления, включающая обобщенную постановку для (13). Выписываются необходимые условия экстремума функционала в виде системы вариационных уравнений. Относительно оператора

$$A \equiv -\text{div}(-\text{Div}(a\nabla\mathbf{U}) + b\mathbf{U})^{-1}\nabla + dI, \quad A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad D(A) = L_2(\Omega)$$

– ”оператора давления”, справедливо

**Предложение 1.**  $Sp(A^*A) \subset [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1]$ , где

$$\mathbf{C}_0 = \left( c^2 \frac{\lambda_{\min}\mu_{\min}}{a\lambda_{\min} + b} + d \right)^2, \quad \mathbf{C}_1 = \left( \frac{c^2}{a} + d \right)^2, \quad (14)$$

$\lambda_{\min}$  есть минимальное собственное значение задачи  $-\Delta\zeta = \lambda\zeta, \quad \zeta|_{\partial\Omega} = 0,$

$1 > \mu_{\min} > 0$  – минимальное собственное значение задачи  $\text{div}\Delta^{-1}\nabla\zeta = \mu\zeta.$

В разделе 3.5 исследуется итерационный процесс решения (13). На основе (14) изучены оценки его скорости сходимости. Предложен алгоритм вычисления параметров рассматриваемого итерационного процесса для ускорения сходимости.

В разделе 3.6 приведены результаты численных экспериментов и основные выводы по главе 3.

**Четвертая глава** посвящена применению исследуемой методологии совместно с классическими методами расщепления к построению численного метода решения системы уравнений динамики приливов на сфере.

В разделе 4.1 постановка задачи динамической теории приливов рассматривается в сферических координатах  $\theta, \lambda, r,$   $\lambda \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi],$  где  $r$  полагается равным среднему радиусу Земли  $R,$  и выписана в терминах ”средних” скоростей и симметризованном виде. Область  $\Omega$  соответствует поверхности Мирового океана на ”сферической Земле” или некоторой её части. В  $Q_T \equiv \Omega \times (0, T), \quad T < \infty$  требуется найти функции  $\mathbf{U} \equiv (u, v) \in$

$(L_2(Q_T))^2, \zeta \in L_2(Q_T)$  такие, что  $u, v, \zeta$  удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} H\mathbf{U}_t - \nu\Delta_\beta\mathbf{U} + K\mathbf{U} + gH\nabla\zeta &= \mathbf{f}, \quad \zeta_t + \operatorname{div}H\mathbf{U} = f_3, \\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_{(0)}, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta_{(0)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_\beta\mathbf{U} &\equiv (\Delta u, \Delta v) + \beta D\mathbf{U}, \quad \beta \in [0, 1], \quad \Delta \equiv \operatorname{div}\nabla, \quad \nabla\phi \equiv \left( \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}, \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right), \\ \operatorname{div}\mathbf{U} &\equiv \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{R} \frac{\partial(v\sin\theta)}{\partial\theta}, \quad D\mathbf{U} \equiv \frac{1}{R^2\sin^2\theta} \left( -u + 2\cos\theta \frac{\partial v}{\partial\lambda}, -v - 2\cos\theta \frac{\partial u}{\partial\lambda} \right), \\ K\mathbf{U} &= (r^*|\tilde{\mathbf{U}}|u - lv, lu + r^*|\tilde{\mathbf{U}}|v), \end{aligned}$$

и  $H \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $l = -2\omega \cos\theta$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли, остальные функции и коэффициенты были определены ранее. В приводимых выше обозначениях круглые скобки  $(\ , \ )$  определяют вектор-функцию. Отдельной проблемой, которая обсуждается в данной главе, становится постановка задачи в сферической системе координат в силу наличия сингулярности в полюсных точках.

Как и в предыдущей главе, сначала для задачи (15) применяется аналогичная (11)-(12) схема расщепления, которая рассматривается в **разделе 4.2**. Реализация неявного этапа этой схемы расщепления сводится к решению следующей стационарной задачи

$$-a\Delta_\beta\mathbf{U} + bH\mathbf{U} + cH\nabla\zeta = \mathbf{F}, \quad c\operatorname{div}H\mathbf{U} + d\zeta = G, \quad \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \zeta d\Omega = 0, \quad (16)$$

где  $a = \nu$ ,  $b = \frac{1}{\Delta t}$ ,  $c = g$ ,  $d = \frac{g}{\Delta t}$ .

В **разделе 4.3** вводятся соответствующие функциональные пространства, в которых стационарная задача (16) корректно разрешима. Особенность рассматриваемых функциональных пространств заключается в том, что принадлежащие им гладкие функции  $\mathbf{U} \equiv (u, v)$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial\lambda} - u = 0, \quad v + \frac{\partial u}{\partial\lambda} = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial\lambda} + u = 0, \quad v - \frac{\partial u}{\partial\lambda} = 0 \quad \text{при } \theta = \pi. \end{aligned} \quad (17)$$

Также доказывается устойчивость схемы расщепления при  $r^* = 0$ .

В **разделе 4.4** формулируется задача оптимального управления (2), соответствующая (16), и доказывается её корректная разрешимость. Относительно операторного уравнения, эквивалентного системе (16),

$$A\zeta = \tilde{f} \text{ в } L_2(\Omega), \quad (18)$$

где  $A \equiv -\frac{g^2}{\nu} \operatorname{div} H (\Delta_\beta + \frac{HR^2}{\nu \Delta t} I)^{-1} H \nabla + \frac{g}{\Delta t} I$ , имеет место

**Теорема 2.** Пусть  $H = \operatorname{const}$ ,  $\beta = 1$ , точка  $\theta = 0$  не принадлежит  $\Omega$ . Точка  $\theta = \pi$  может принадлежать  $\Omega$ , но в этом случае предполагается, что  $\mathbf{U} = (u, v)$  удовлетворяет условию вида

$$\int_0^{2\pi} [(u^2 + v^2) - (v \frac{\partial u}{\partial \lambda} - u \frac{\partial v}{\partial \lambda})] d\lambda = 0 \quad \text{при } \theta = \pi.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Операторы  $A$ ,  $A^*A$  являются самосопряженными и положительно определенными.

(б)  $Sp(A) \in [\sqrt{\mathbf{C}_0}, \sqrt{\mathbf{C}_1}]$ ,  $Sp(A^*A) \in [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1]$ , где

$$\mathbf{C}_0 = \left( c^2 \frac{H^2 \lambda_{\min} \mu_{\min}}{a \lambda_{\min} + b H R^2} + gb \right)^2, \quad \mathbf{C}_1 = \left( \frac{c^2 H^2}{a} + gb \right)^2, \quad (19)$$

где  $\lambda_{\min}$  есть минимальное собственное значение задачи  $-\Delta_1 \zeta = \lambda \zeta$ ,  $\zeta|_{\partial\Omega} = 0$ , а  $\mu_{\min}$  – нижняя граница спектра оператора  $\operatorname{div}_1 \Delta_1^{-1} \nabla_1$  и  $\mu_{\min} < 1$ .

(в) Задача (18) корректно и плотно разрешима.

В разделе 4.5 исследуются итерационные процессы решения (16). С учетом свойств оператора  $A$  здесь могут быть использованы алгоритмы из раздела 1.2. Например, двухслойный итерационный процесс будет выглядеть следующим образом. Для заданного  $\zeta^0$  вычисляем невязку, решая систему

$$\begin{cases} -a \Delta_1 \mathbf{U}^0 + b H \mathbf{U}^0 = \mathbf{F} - c H \nabla \zeta^0, & \mathbf{U}^0|_{\partial\Omega} = 0, \\ r^0 = c \operatorname{div} H \mathbf{U}^0 + d \zeta^0 - G. \end{cases}$$

Затем последовательно при  $k = 0, 1, \dots, N$  реализуем итерационный процесс вида:

$$\begin{cases} -a \Delta_1 \mathbf{V}^{k+1} + b H \mathbf{V}^{k+1} = -c H \nabla r^k, & \mathbf{V}^{k+1}|_{\partial\Omega} = 0, \\ w^{k+1} = c \operatorname{div} H \mathbf{V}^{k+1} + d r^k \end{cases} \quad (20)$$

$$\gamma_k = \frac{(r^k, r^k)}{(w^{k+1}, r^k)}, \quad \zeta^{k+1} = \zeta^k - \gamma_k w^{k+1}, \quad r^{k+1} = r^k - \gamma_k w^{k+1}. \quad (21)$$

Для нахождения приближения  $\mathbf{U}^N$  решаем эллиптическую задачу:

$$-a \Delta_1 \mathbf{U}^N + b H \mathbf{U}^N = \mathbf{F} - c H \nabla \zeta^N, \quad \mathbf{U}^N|_{\partial\Omega} = 0. \quad (22)$$

**Теорема 3.** Пусть приближения  $\{\mathbf{U}^k\}$  относятся к классу решений, удовлетворяющих условиям (17). Тогда, если  $H = \operatorname{const}$  и параметры  $\{\gamma_k\}$  выбираются согласно (21), то последовательности  $\{\mathbf{U}^k\}$ ,  $\{\zeta^k\}$  сходятся соответственно к  $\mathbf{U}$ ,  $\zeta$  – обобщенному решению исходной задачи, причем справедлива оценка

$$[\mathbf{U}^k - \mathbf{U}] + \|\zeta^k - \zeta\|_{L_2(\Omega)} \leq C q^k,$$

где

$$q = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \chi}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda_{\min} \mu_{\min}}{\lambda_{\min} + HR^2 / \Delta t \nu}, \quad \chi = \frac{2\nu}{\Delta t g H^2},$$

а постоянная  $C > 0$  не зависит от  $k, \mathbf{U}^k, \zeta^k$ .

**Следствие 2.** Если  $\varepsilon \ll 1$ , а  $\Delta t < 2\nu / (gH^2)$ , то  $\chi > 1$  и  $q \cong \frac{1}{1 + \chi} < \frac{1}{2}$ .

Отметим, что при выполнении условий следствия можно ожидать высокой скорости сходимости рассматриваемых итерационных алгоритмов.

В разделе 4.6 исследуется поведение гладких решений задач (15), (16) при  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$ .

**Теорема 4.** Пусть существует достаточно гладкое решение  $(u, v, \zeta)$  задачи (15) при  $\beta = 0$  в сферических координатах в области  $\Omega$ , содержащей подобласть  $\Omega_0 \equiv [0, 2\pi] \times [0, \theta_0]$ , где  $\theta_0 \equiv \text{const} > 0$  и  $\theta_0$  – достаточно мало. Тогда при  $\theta < \theta_0$  справедливы соотношения

$$u(\lambda, \theta, t) = u_0(t) + \mathcal{O}(\theta), \quad v(\lambda, \theta, t) = \mathcal{O}(\theta), \quad (23)$$

где  $u_0(t)$  некоторая функция, независящая от  $\lambda, \theta$ .

**Замечание 1.** Решение исходной задачи при  $\beta = 0$  в окрестности точек  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  может задавать непрерывное векторное поле  $\mathbf{U} = (u, v)$ , касательное к сфере, только в том случае, если  $u(\lambda, 0) \equiv v(\lambda, 0) \equiv u(\lambda, \pi) \equiv v(\lambda, \pi) \equiv 0 \quad \forall \lambda \in [0, 2\pi]$ .

Исследуется и приводится асимптотическое представления гладких решений задачи (16) в окрестности точек полюса на сфере при  $\beta = 1$  до третьего порядка малости. На основе этих разложений предложены формулы для определения функции скорости в полюсных точках по правой части, а также формулы, увеличивающие точность численного решения в окрестности этих точек.

**Пятая глава** посвящена систематическому исследованию численных аспектов рассмотренных в четвертой главе алгоритмов.

В разделе 5.1 численно исследуется стационарная линейная система уравнений динамики приливов с оператором  $\Delta_0$  в сферическом слое. Результаты расчетов показывают, что итерационный процесс сходится достаточно быстро. Уменьшение шагов сетки, а также уменьшение отступа от полюсных точек требует дополнительных ограничений, таких как введение регуляризирующего слагаемого и уменьшение временного шага.

В разделе 5.2 численно исследуется нестационарная линейная система уравнений динамики приливов с оператором  $\Delta_0$  на сфере. Результаты расчетов показывают, что для повышения точности численного решения требуется применение специального вида сглаживания в окрестности полюсных точек.

В **разделе 5.3** численно исследуется нестационарная линейная система уравнений динамики приливов с оператором  $\Delta_1$  на сфере. Результаты расчетов показывают, что рассматриваемый в разделе 4.5 итерационный процесс сходится достаточно быстро. При этом наблюдается периодичность по времени численной ошибки. Сеточные функции также обладают периодом по времени.

В **разделе 5.4** исследуются ошибки при замене оператора  $\Delta_1$  в исходных уравнениях динамики приливов на сфере на оператор  $\Delta_0$ , широко используемый в геофизической гидродинамике. Численные расчеты показывают, что при увеличении коэффициента диффузии разница между решениями при использовании операторов  $(\Delta_0^h)^{-1}$  и  $(\Delta_1^h)^{-1}$  становится существенной. И при "больших" коэффициентах диффузии ( $\nu = 10^{12}$ ) применение оператора  $(\Delta_0^h)^{-1}$  вместо  $(\Delta_1^h)^{-1}$  приводит к большим ошибкам в численном решении не только в окрестности полюсных точек, но и во всей расчетной области.

В **разделе 5.5** исследуется влияние специальных условий для функции скорости в "полюсных точках", полученных на основе приведенных в разделе 4.6 асимптотических разложений. Результаты расчетов показывают, что применение специальных условий и алгоритмов уточнения численного решения в окрестности "полюсных точек" на тестовом примере приводит к таким же по порядку численным ошибкам, как и при задании значений в полюсах точного решения. Таким образом, можно предположить, что данный способ будет эффективен при расчете с реальными данными.

В **разделе 5.6** численно исследуется нелинейная нестационарная система уравнений динамики приливов на сфере. Результаты численных экспериментов подтверждают сходимость рассматриваемых итерационных процессов и схемы расщепления.

В **разделе 5.7** кратко описывается способ задания приливного потенциала с помощью основных приливных гармоник и приводятся расчёты в акватории Мирового океана с реальной функцией рельефа дна и приливных сил, при этом для решения задач применялись исследуемые в диссертации методы. Численные результаты подтверждают эффективность исследуемых методик.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В **приложении** изложены некоторые возможные направления для развития исследуемой методологии применительно к построению алгоритмов решения системы уравнений Навье-Стокса без детального изучения рассматриваемых алгоритмов и их численной проверки.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

**Основной результат** – на основе методологии, базирующейся на подходах теории оптимального управления и сопряженных уравнений, разработаны и исследованы новые алгоритмы решения класса задач геофизической гидродинамики (возмущенных уравнений Стокса, задач динамической теории приливов в декартовых и сферических координатах). Этот результат состоит в следующем:

- Разработан, обоснован и численно реализован новый метод решения нестационарной системы Стокса, возмущенной кососимметрическим оператором.
- Разработан, исследован и численно реализован новый метод решения системы уравнений динамики приливов в прямоугольной области и на сфере. Предложенный метод базируется на совместном применении схемы расщепления и подходов теории оптимального управления и сопряженных уравнений. На основе исследуемой методологии разработаны и обоснованы итерационные алгоритмы решения полученных после схемы расщепления стационарных задач.
- Получены оценки для границ спектра "оператора давления" на сфере и, на их основе, доказаны оценки скорости сходимости итерационных процессов. Выписаны асимптотические представления гладких решений в окрестности точек полюса на сфере до третьего порядка малости. Предложен алгоритм вычисления параметров рассматриваемых итерационных процессов для ускорения их сходимости.
- Проведено численное исследование изложенных в работе итерационных алгоритмов. Предложены формулы, увеличивающие точность численного решения в окрестности точек полюса на сфере. Проведены численные эксперименты с реальной акваторией, функцией рельефа дна и приливным потенциалом. Численные результаты подтверждают эффективность исследуемых методик.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Агошков В.И., Ботвиновский Е.А. Численное решение нестационарной системы Стокса методами теории сопряженных уравнений и оптимального управления // ЖВМиМФ. – 2007. – Т. 47. – №7. – С. 1192-1207.

[2] Агошков В.И., Ботвиновский Е.А. Численное решение нестационарной системы

Стокса методами теории оптимального управления и сопряженных уравнений, Международная конференция "Тихонов и современная математика". Тезисы докладов секции №3. – М.: Издательский отдел ф-та ВМиК, 2006. – С. 14-15.

[3] Ботвиновский Е.А. Исследование одного метода решения гиперболо-параболической системы на сфере, Международная конференция "Ломоносов-2008". Сборник тезисов секции "Вычислительная математика и кибернетика". – М.: Издательский отдел ф-та ВМиК, 2008. – С. 20-21.

[4] Agoshkov V.I., Botvinovsky E.A. Numerical Solution of a Hyperbolic-Parabolic System by Splitting Methods and Optimal Control Approaches // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2007. – V. 7. – No. 3. – P.193-207.

[5] Agoshkov V.I., Botvinovskii E.A. Investigation of a method for solving a hyperbolic-parabolic system on a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23. – No. 2. – P. 107-134.

[6] Agoshkov V., Botvinovsky E., Gusev A., Lebedev S., Parmuzin E., Shutyaev V. Variational data assimilation system INM-T1 // Geophysical Research Abstracts. – 2008. – V. 10. – EGU2008-A-08220.

[7] Botvinovskii E.A. An algorithm for the solution of a tidal dynamics problem on a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23. – No. 6. – P. 523-536.