на правах рукописи

Ушаков Константин Викторович

Устойчивые явные разностные методы и многочлены Чебышева в задачах гидродинамики

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Лебедев В.И.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Василевский Ю.В.,

кандидат физико-математических наук, доцент Попов А.В.

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Защита состоится "____"____________ 2009 г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН по адресу 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан "_____" января 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук Бочаров Г.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Задачи поиска оптимальных в том или ином смысле многочленов часто возникают при анализе и построении численных методов. В теории явных разностных схем для решения нестационарных задач ими являются многочлены перехода от начальных данных к решению в выбранный момент времени. В современных условиях особенно ценным является свойство лёгкой и эффективной распараллеливаемости таких схем. Вместе с тем при их использовании для решения жёстких задач математической физики шаги по времени обычно существенно ограничены условием устойчивости, что делает актуальной проблему нахождения многочлена перехода, форма области устойчивости которого наиболее полно соответствует характеру спектра поставленной задачи. Близкие идеи находят применение при построении линейных итерационных методов, когда задача оптимизации сводится к нахождению многочлена перехода, наиболее эффективно подавляющего ошибку. В качестве такого многочлена обычно берётся многочлен, например, чебышевский, обладающий некоторыми экстремальными свойствами на множестве, содержащем спектр оператора решаемой задачи. Общими проблемами в этих двух приложениях теории многочленов являются, во-первых, организация вычислений, устойчивых по отношению к ошибкам округления внутри серии шагов метода, реализующей выбранный многочлен перехода, и, во-вторых, получение количественных данных о спектре задачи. Первая из них на сегодняшний день в значительной степени решена с помощью рекурсивных алгоритмов построения устойчивых перестановок параметров. Вторая является гораздо более трудной, её детальное решение в конкретном случае может оказаться сравнимо по сложности с решением исходной задачи. Однако часто можно дать приближённое описание спектра, исходя из физических или каких-либо иных соображений, и выбрать многочлен перехода, по возможности близко соответствующий этому описанию. При этом выборе бывает очень полезно учитывать также свойства многочленов, связанные с удобством реализации, объёмом требуемых для осуществления шага вычислительных ресурсов, а также возможностью использования данных, полученных на предшествующих шагах. Перспективной темой для исследования является учёт в расчётах эффектов взаимного влияния методов различного назначения, использующих общую идею оптимизации многочленов перехода. Экстремальные свойства многочленов Чебышева также отвечают запросам цифровой фильтрации. Внедрение специальных многочленов от характерных операторов в этом случае позволит рассчитывать на качественную фильтрацию с учётом особенностей источников данных. В качестве приложения исследуемых алгоритмов выбраны задачи гидродинамики. Их решение является важным направлением математического моделирования и требует эффективных численных методов.

Цель работы.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании эффективности и оптимизации применения устойчивых явных разностных схем программы DUMKA, методов с функциями перехода, основанными на чебышевских многочленах, и вихревой формы Громеки-Лэмба в задачах гидродинамики.

Научная новизна.

Основными новыми результатами работы являются:

– исследование эффективности схем программы DUMKA с переменными шагами по времени, ориентированных на расположенный вблизи мнимой оси спектр, в задаче вихреразрешающего моделирования и в сравнении со схемой Адамса-Бэшфорта;

– блочный вариационный метод получения начального приближения при решении уравнения Пуассона для давления, учитывающий характер последовательности временных шагов схемы DUMKA-8;

– метод удвоения устойчивой перестановки итерационных параметров для одношагового чебышевского метода;

– метод неявной операторной чебышевской фильтрации.

Все разработанные методы программно реализованы.

Практическая значимость.

Исследованные и программно реализованные в рамках диссертационной работы методы могут быть применены для ускорения расчётов и повышения точности фильтрации при численном моделировании турбулентных течений.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научном семинаре Института вычислительной математики РАН и на следующих конференциях:

– Научные конференции МФТИ (Москва-Долгопрудный, 2004-2006, 2008),

– VIII Международный семинар-совещание “Кубатурные формулы и их приложения” (Улан-Удэ, 2005),

– III Международная конференция “Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания” (Обнинск, 2006),

– Международные конференции по информационным технологиям для наук об окружающей среде “CITES” и “ENVIROMIS” (Томск, 2006-2008),

– XVI Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам” (Дюрсо, 2006).

Результаты части работы были представлены в рамках совместного доклада на 14-м Симпозиуме AER по ядерным реакторам (Финляндия, 2004).

Публикации.

Результаты изложены в 11 печатных работах, из них 2 опубликованы в реферируемом журнале, рекомендованном ВАК РФ для защиты кандидатских диссертаций. Список основных работ приведён в конце автореферата.

Личный вклад автора.

Вклад автора в работы [1] и [3] заключается в совместной разработке алгоритма неявной чебышевской фильтрации и его программной реализации.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 74 наименований, содержит 15 иллюстраций и 1 таблицу. Объём диссертации составляет 116 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается рассматриваемая задача и описывается структура диссертации.

Глава 1 диссертации посвящена теоретическому исследованию проблем оптимизации многочленов перехода в свете решения задач гидродинамики.

Для составления основы рассматриваемых методов приведены базовые сведения о многочленах Чебышева, касающиеся возможных вариантов определения, формул для корней, точек экстремума и композиции многочленов, формулировки экстремальных теорем Чебышева и Маркова. Так, корни многочлена Чебышева степени n первого рода $T_n(x)$, приведённого к отрезку $[m, M]$ действительной оси, задаются формулой

$$x_k = \frac{2}{M + m - (M - m)\cos\psi_{j_k}\pi}, \quad \psi_{j_k} = \frac{2j_k - 1}{2n}, \tag{1}$$

где $\{j_k\},\ k = 1, ..., n$ – перестановка чисел от 1 до n.

В данной работе исследование численных методов для решения нестационарных задач ограничено явными разностными схемами по времени, которые обычно легко описываются при помощи многочленов перехода, построенных для линейной задачи

$$\frac{du}{dt} = -Au, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

от начального условия к решению на выбранном слое по времени:

$$u_N = P_N(A)u_0.$$

Для задач, приводящихся линеаризацией и отбрасыванием свободного члена в правой части к виду (2) со спектром оператора A, лежащим на или тесно вблизи мнимой оси (например, расчётов течений с большими числами Рейнольдса) будем использовать явные разностные схемы DUMKA-7 и DUMKA-8 (В.И. Лебедев, ИВМ РАН). Этим схемам соответствует многочлен перехода

$$P_4(z) = 1 - l_4 z + (l_4 z)^2/2 - (l_4 z)^3/6 + (l_4 z)^4/24, \tag{3}$$

область устойчивости которого при суммарном шаге длины l_4 захватывает отрезок мнимой оси $[-2\sqrt{2}i/l_4, 2\sqrt{2}i/l_4]$. Корни многочлена (3) разбиваются на комплексно сопряженные пары, поэтому соответствующие временны́е шаги могут быть реализованы в действительной арифметике. Приведённый устойчивый отрезок мнимой оси является максимально возможным по длине для многочленов перехода степени 4 с действительными коэффициентами вида $1 - l_4 z + az^2 + bz^3 + cz^4$, а при увеличении степени многочлена для задач с наличием мнимого спектра увеличение среднего шага ограничено. Поэтому для гидродинамических задач с большими числами Рейнольдса оправдано применение указанных схем, входящих в свободно доступную программу DUMKA.

В рамках диссертационной работы исследуемые численные методы были внедрены в динамическую вихреразрешающую модель течения вязкой несжимаемой жидкости А.В. Глазунова (ИВМ РАН). Для используемой в ней разностной схемы Адамса-Бэшфорта проведён аналогичный анализ области устойчивости. Показано, что эта область касается мнимой оси в нуле. При этом приближённое решение u_N, соответствующее мнимому собственному значению λ оператора A, может расти при малом $|\lambda|$, как $1 + N|\lambda|^4/4$. Показано также, что в случае наличия действительного спектра использование схемы Адамса-Бэшфорта может приводить к возникновению в решении двухшагового шума. На основании этих результатов можно сделать вывод о нежелательности применения этой схемы напрямую для интегрирования по времени в моделях турбулентности.

Также в первой главе исследуется блочный чебышевский итерационный метод решения уравнения Пуассона для нахождения давления на каждом временном шаге. Записанный для уравнения в “красно-чёрном” виде

$$\begin{pmatrix} D_1 & -C_1 \\ -C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

его шаг представляет собой итерацию Гаусса-Зейделя с поправкой

$$D_1 p_1^{k+1} = C_1 p_2^k + f_1,$$
$$D_2 p_2^{k+1/2} = C_2 p_1^{k+1} + f_2,$$
$$p_2^{k+1} = p_2^k + \alpha_{k+1}(p_2^{k+1/2} - p_2^k).$$

Для ошибки ε приближённого решения изменение за цикл из N итераций описывается многочленом перехода P_N для второго блока неизвестных, так что

$$P_N(t) = \prod_{i=1}^{N}(1-\alpha_i t), \quad \varepsilon_2^N = P_N(I-T)\varepsilon_2^0, \quad T = D_2^{-1}C_2 D_1^{-1}C_1. \tag{5}$$

Для применяемой в вихреразрешающей модели дискретной записи уравнения Пуассона в диссертации доказано с использованием результатов работ Д. Янга, что оператор $I-T$ обладает базисом из собственных векторов и его спектр лежит на некотором отрезке действительной оси $[q,1], q>0$.

Пусть с помощью некоторых дополнительных данных получена оценка спектра $\mathrm{Sp}(I-T) \in [m, M]$ (например, $m = q, M = 1$). Тогда в качестве P_N возьмём нормированный в соответствии с первым равенством (5) многочлен Чебышева первого рода, приведённый к отрезку $[m, M]$. Этот многочлен наименее отклоняется от нуля на данном отрезке, обеспечивая таким образом наилучшее среди многочленов вида (5) подавление ошибки. Соответствующее отклонение равно

$$E_N = \frac{2\sigma^N}{1+\sigma^{2N}}, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{1-\sqrt{m/M}}{1+\sqrt{m/M}},$$

и уменьшается с ростом N, поэтому имеет смысл использовать достаточно большие итерационные циклы. Итерационные параметры α_k являются величинами, обратными к корням многочлена перехода, вычисляющимся по формуле (1).

Для обеспечения устойчивости этого метода по отношению к ошибкам округления и получения хорошей общей оценки погрешности необходима такая перестановка чисел α_k, чтобы величины

$$r_i^N = \max_{t\in[m,M]}\left|\prod_{j=1}^{i}(1-\alpha_j t)\right|, \quad q_i^N = \max_{t\in[m,M]}\left|\prod_{j=i+1}^{N}(1-\alpha_j t)\right|$$

($q_N^N = 1$), а также $\sum_{i=1}^N q_i^N, \sum_{i=1}^N q_i^N r_i^N$ были ограничены постоянными, зависящими только от m/M. Метод получения таких перестановок путём разложения многочлена перехода в произведение дробно-рациональных функций, зависящих от тригонометрического параметра, в случае $N = 2^p 3^r$ предложен в работах В.И. Лебедева и С.А. Финогенова. Его можно упростить, исключив анализ тригонометрических параметров, с помощью следующей доказанной в диссертации леммы.

Лемма 1. Пусть $|\beta| < 1$, тогда

$$\frac{T_{3n}(x) - \beta}{T_{3n}(\Theta) - \beta} = a_n b_n c_n,$$

где

$$a_n = \frac{T_n(x) - \rho_1}{T_n(\Theta) - \rho_1},\ b_n = \frac{T_n(x) - \rho_2}{T_n(\Theta) - \rho_2},\ c_n = \frac{T_n(x) - \rho_3}{T_n(\Theta) - \rho_3},\ \Theta = \frac{M + m}{M - m},$$
$$|\rho_{1,2,3}| < 1,\ \rho_1 > 0,\ \rho_3 < 0,\ \mathrm{sign}(\rho_2) = -\mathrm{sign}(\beta),\ \rho_3 < \rho_2 < \rho_1,$$

причём

$$a_n < b_n < c_n, \quad |c_n| < 1, \quad |c_n b_n| < 1.$$

Основываясь на лемме, сформулируем метод упорядочивания итерационных параметров в виде последовательного разбиения (перед приведением к отрезку $[m, M]$) многочленов перехода степени n_1, кратной трём, вида $\frac{T_{n_1}(x)-\rho}{T_{n_1}(\Theta)-\rho}$ на множители (многочлены) степени $n_1/3$ при $\rho < 0$ в порядке $c_{n_1/3}$, $b_{n_1/3}$, $a_{n_1/3}$. Если же в разбиваемом многочлене $\rho \geq 0$, то множители и соответствующие им корни будем брать в порядке $b_{n_1/3}, c_{n_1/3}, a_{n_1/3}$. В диссертации приведён также алгоритм аналогичного разбиения многочленов перехода чётной степени. Осуществляя последовательно эти два алгоритма, мы сможем строить устойчивые перестановки параметров длины $N = 2^p 3^r$, дающие оптимальный по Чебышеву многочлен перехода после промежуточных итераций с номерами $1, 2, 4, 8, ..., 2^p, 3 \cdot 2^p, 9 \cdot 2^p, ..., 3^r 2^p$.

Дополнительно в диссертации предложен и протестирован следующий приём удвоения длины устойчивой перестановки параметров: если β_{j_k} – корень многочлена $T_n(x)$, то пара $\pm\sqrt{\frac{\beta_{j_k}+1}{2}}$ – корни многочлена $T_{2n}(x)$. Корень с минусом определяет итерацию, многочлен перехода которой меньше единицы по модулю на отрезке $[m, M]$. Поэтому её будем осуществлять первой в соответствующей паре итераций.

Поскольку первое уравнение из (4) после каждой итерации выполняется точно, в качестве критерия остановки итераций возьмём малость ошибки второго уравнения, разрешенного относительно p_2. Соответствующая невязка определяется простой формулой, не требующей дополнительного вычисления каких-либо операторов

$$r_2^k = p_2^k - p_2^{k+1/2},$$

а для ошибки справедливо неравенство

$$\|\varepsilon_2^k\| \leq \|(I-T)^{-1}\|\|r_2^k\| \leq m^{-1}\|r_2^k\|$$

в некоторой норме $\|\cdot\|$. Выбор в качестве индикатора сходимости нормы ошибки (а не невязки) является желательным, т.к. норма невязки может уменьшаться в процессе счёта не только вследствие сходимости, но и из-за изменения спектрального состава. Определение величины m является сложной задачей, она может быть приближённо решена опытным путём с помощью наблюдения скорости сходимости во вспомогательном численном эксперименте с решением заданного уравнения (4).

Для ускорения сходимости блочного чебышевского метода можно применить один из алгоритмов нахождения начального приближения по результатам предшествующих временных шагов. Мы применим "физический" подход, используя полученную ранее информацию о характере поля давления, не требующую большого объёма памяти.

Если записать уравнение Пуассона на новом слое для поправки к давлению

$$\Delta\delta P(t+\tau) = F(t+\tau) - F(t) \equiv \Phi(t+\tau), \quad \delta P(t+\tau) \equiv P(t+\tau) - P(t),$$

с соответствующими краевыми условиями, то начальное приближение для итерационного поиска $\delta P(t+\tau)$ можно взять равным $\alpha(t+\tau)\delta P(t)$, где коэффициент определить методом Ритца, используя знакоопределёный оператор из уравнения для второго блока неизвестных. Дополнительно учтём, что схема DUMKA-8, реализующая метод Гилла 4-ого порядка, предполагает использование нулевых и ненулевых шагов по времени. Определим для каждого из этих двух типов шагов начальное приближение по поправке с предыдущего шага того же типа. Отметим, что можно также использовать метод наименьших квадратов вместо метода Ритца, а в качестве второго базисного вектора взять величину $\mathrm{div}\ P\mathbf{U}$, имеющую смысл "переноса" давления потоком жидкости.

Глава 2 посвящена основам методологии вихреразрешающего моделирования, описанию численной реализации применяемой модели и проведённых расчётов.

Исследуемые методы были протестированы на примере режима модели, использующего турбулентное замыкание Смагоринского, для задачи моделирования течения несжимаемой жидкости в плоском канале с препятствием в виде прямоугольного цилиндра. В главе описаны способы разностной аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнениях Навье-Стокса в различных формах на октаэдральных (смещённых) сетках с постоянными шагами вдоль координатных направлений, предложенных впервые в работах В.И. Лебедева (в западной литературе – staggered grid). Основное внимание мы уделим вихревой форме (форме Громеки-Лэмба). Её применение наиболее естественно при использовании центральноразностных аппроксимаций по пространству в силу ортогональности на дифференциальном уровне вектора скорости и вектора, составленного из нелинейных членов уравнений Навье-Стокса в вихревой форме. Кроме того она позволяет исключить часть нелинейных членов из проблем замыкания и построения аппроксимации, перенося их в состав обобщённого давления Бернулли. На используемых сетках различные компоненты скорости определены в различных точках, поэтому для вихревой формы используется аппроксимация в дивергентном виде, такая что скалярное произведение вектора скорости на вектор, соответствующий вихревой форме нелинейных членов, можно записать (в обозначениях $\overline{\cdot}^{1x_i}$, $\frac{\delta_1}{\delta_1 x_i}$ для операторов интерполяции и конечной разности вдоль i-ого координатного направления с шаблоном из двух точек, по повторяющимся индексам производится суммирование) в виде

$$\overline{U_i(Rot-S2)_i}^{1x_i} = \overline{U_i\left(\frac{\delta_1\overline{U_j}^{1x_i}\overline{U_i}^{1x_j}}{\delta_1 x_j} - \frac{1}{2}\frac{\delta_1\overline{U_j}^{1x_j}\overline{U_j}^{1x_j}}{\delta_1 x_i}\right)}^{1x_i}, \tag{6}$$

где через $S2$ обозначены ошибки дискретизации второго порядка. В диссертации доказана лемма, характеризующая точность выполнения свойства ортогональности вектору скорости для исследуемой разностной аппроксимации вихревой формы.

Лемма 2. При достаточно гладком поле скорости выражение (6) является малой величиной порядка $O(h^2)$ в каждой внутренней точке области, где h – максимальный из шагов сетки вдоль координатных направлений.

Кроме того для остаточного члена получено явное выражение

$$\overline{U_i(Rot-S2)_i}^{1x_i} = \frac{h_i^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_i\frac{\partial U_j}{\partial x_i}R_{ij}\right) + \frac{h_j^2}{8}U_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right)^2 + O(h^4),$$

где тензор

$$R_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

состоит из компонент ротора скорости.

Далее в данной главе описаны программа DUMKA и реализация вихреразрешающей модели в сложной области, включающая вихревую форму нелинейных членов, блочный чебышевский итерационный метод и вычисление улучшенного начального приближения методом Ритца. Предложен вариант задания граничных условий для давления Бернулли. Реализован на языке Фортран с расширением MPI общий параллельный интерфейс для вихреразрешающей модели и схем DUMKA и Адамса-Бэшфорта (AB), включающий использование многомерных массивов с атрибутами TARGET и POINTER. Для оператора левой части (4) в условиях данной реализации модели доказана симметричность и положительная определённость.

При проведении численных экспериментов, поставленных для проверки эффективности исследуемых в работе методов, получены следующие основные результаты:

1) В исследуемой задаче вихреразрешающего моделирования предпочтительными режимами программы DUMKA являются режимы DUMKA-7 и DUMKA-8, ориентированные на мнимый спектр. Они позволяют получить решение, близкое по статистическим характеристикам к решению, полученному с использованием схемы AB.
2) На стандартном разрешении $288 \times 72 \times 144$ максимальный средний шаг, позволяющий устойчиво считать с помощью схемы DUMKA-8, на 12% превосходит аналогичный шаг схемы AB. На разрешении $96 \times 24 \times 48$ средний шаг схемы DUMKA-7 на 15% больше шага AB. При искусственном уменьшении членов замыкания Смагоринского в 10 раз схема DUMKA-8 даёт 27% преимущество в длине среднего шага по сравнению с AB.
3) В периодическом канале без препятствия и без заданной явно диссипации средний шаг в схеме DUMKA-7 оказался на 70% больше среднего шага в схеме AB при одинаковой по модулю ошибке сохранения энергии.
4) Разработанный метод получения перестановок итерационных параметров позволяет устойчиво использовать чебышевские многочлены перехода. В расчётах применялись многочлены степени до 648.
5) Введение улучшенного начального приближения в режиме DUMKA-8 на стандартном разрешении позволяет сократить количество итераций для давления в статистически установившемся режиме на 24%. В этом случае существенным оказалось взятие в качестве базисного вектора в методе Ритца поправки к давлению с предыдущего временного шага того же типа (нулевого или ненулевого).

Глава 3 посвящена разработке и тестированию неявных чебышевских операторных фильтров.

После базовых сведений из теории фильтрации и описания явного чебышевского фильтра приведена конструкция разработанного в диссертации неявного чебышевского фильтра. Пусть выбран некоторый оператор L, обладающий полной системой собственных функций ψ_i, и собственные значения ν_i которого лежат на отрезке $[0, 1]$, $\delta > 0$, n – порядок фильтра. Определим фильтр $u \to u^F$ неявно с помощью уравнения

$$(P_n(L) + \delta L^n)u^F = P_n(L)u, \tag{7}$$

где

$$P_n(t) = \prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i t),$$

а L^n – n-ая степень оператора L. Тогда преобразование коэффициентов в разложении фильтруемого элемента описывается переходной функцией $F(t)$, так что

$$u = \sum_i \bar{u}_i \psi_i \to u^F = \sum_i F_n(\nu_i)\bar{u}_i\psi_i, \quad F_n(t) = \frac{1}{1+\delta t^n/P_n(t)}.$$

Задав параметры γ_i специальным образом через корни многочлена Чебышева первого рода степени n, получим переходную функцию, близкую к единице на отрезке пропускания, далее быстро спадающую в соответствии с теоремой Маркова и обладающую чебышевским альтернансом величины η на некотором отрезке подавления вида $\nu \in [(1+2a)^{-1}, 1]$. Выбирая оператор L, можно осуществлять фильтрацию по различным наборам собственных функций.

Дополнительные приёмы улучшения фильтрации могут заключаться в следующем. Подлежащий фильтрации элемент u представим в виде $u = v + w$ и подвергнем фильтрации лишь w. Правильный выбор v позволит добиться того, чтобы частичные суммы в разложении w по собственным функциям оператора L достаточно быстро стремились к своему пределу, что ослабит эффект Гиббса. Например, для $u = (u_1, .., u_m)^{\mathrm{T}}, n = 3$

$$v_k = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_m + (u_1 - u_m)y(z_k)\right), \quad z_k = \frac{m+1-2k}{m-1},$$
$$y(z) = \frac{15}{8}\left(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right), \quad y(\pm 1) = \pm 1,\, y^{'}(\pm 1) = y^{''}(\pm 1) = 0.$$

В случае сильной неоднородности массива u его также можно предварительно разделить на характерную форм-функцию, например, экспоненциальную для задач ядерной физики. В случае возникновения проблем с постановкой неоднородных граничных условий в (7) запишем уравнение для поправки $\Phi = u - u^F$ с однородными краевыми условиями.

Построенные фильтры реализованы в программе на языке Фортран, выполнен ряд тестов, в том числе с двумерными данными. Проведено сравнение неявных чебышевских фильтров с фильтрами Поттера с использованием результатов Н.А. Сальникова и показано, что первые являются более близкими к оптимальным с точки зрения критерия Валле-Пуссена.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

– Экспериментально и теоретически исследована эффективность устойчивых явных разностных схем программы DUMKA с переменными шагами по времени, ориентированных на расположенный вблизи мнимой оси спектр, в задаче вихреразрешающего моделирования и в сравнении со схемой Адамса-Бэшфорта.

– Рассмотрен и реализован новый комбинированный итерационный метод получения поправки к обобщённому давлению из уравнения Пуассона, учитывающий характер изменения решений на последовательности временных шагов схем DUMKA-7, DUMKA-8, а также сочетающий обобщённый метод Ритца с характерными для задачи базисными функциями и блочный чебышевский вариационный метод. Предложена новая модификация алгоритма вычисления параметров в устойчивом блочном чебышевском бесконечно продолжаемом итерационном методе с длиной цикла $N = N(r, p) = 3^r 2^p$.

– Предложена и реализована трёхмерная разностная аппроксимация нелинейного члена уравнений Навье-Стокса на октаэдральных (смещённых) сетках в вихревой форме с заменой классического давления на обобщённое давление Бернулли, имеющая дивергентный вид и ортогональная с точностью не ниже $O(h^2)$ сеточному вектору скорости.

– Создан и реализован в программе алгоритм неявной чебышевской фильтрации, в том числе многомерной. Проведённое сравнение с фильтрами Поттера показало лучшее соответствие построенных чебышевских фильтров критерию оптимальности Валле-Пуссена.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Лебедев В.И., Ушаков К.В. Явные и неявные чебышевские фильтры и их приложения // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, спецвыпуск. С. 67-75.

2. Ушаков К.В. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени в задаче вихреразрешающего моделирования течения несжимаемой жидкости над шероховатой поверхностью // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, спецвыпуск, ч. 2. С. 17-23.

3. Ушаков К.В., Лебедев В.И. Неявные чебышевские фильтры // Труды III Международной конференции “Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания”, Обнинск, 14-18 мая 2006 года. С. 161-166.

4. Ushakov K.V. Optimization of numerical methods for large-eddy simulation // International Conference on Environmental Observations, Modeling and Information Systems ENVIROMIS-2008, 28 June - 6 July 2008, Tomsk, Russia. Abstracts. P. 58.

5. Ушаков К.В. Оптимизация многочленов для вычислительных методов вихреразрешающего моделирования // Труды 51 Научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный, 2008. Часть VIII. С. 236-239.