

На правах рукописи

Шашкин Владимир Валерьевич

**Полулагранжева модель
динамики атмосферы мезомасштабного разрешения
с использованием метода конечных объемов**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Толстых Михаил Андреевич

Официальные оппоненты: Головизнин Василий Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов,
Холодов Ярослав Александрович,
кандидат физико-математических наук, федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», доцент.

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится «20» декабря 2013 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина д. 8

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики Российской академии наук.

Автореферат разослан ____ _____ 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук

Бочаров Г.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Долгосрочный прогноз погоды и моделирование изменений климата невозможны без вычислительных экспериментов с математическими моделями климатической системы Земли. Повышение точности прогноза и уменьшение неопределенности моделирования климата – главная цель развития подобных моделей. Естественный путь достижения этой цели – совершенствование отдельных компонентов моделей климатической системы, в том числе моделей общей циркуляции атмосферы. Большое значение для развития моделей атмосферы имеет увеличение разрешения.

Одним из главных источников неопределенности и ошибок при моделировании атмосферы является описание физических процессов подсеточного масштаба (конвекция, пограничный слой, осадки, испарение, облака и др.). Вклад подобных процессов в разрешимую на модельной сетке циркуляцию учитывается с помощью сильно упрощенных схем. При повышении разрешения некоторые процессы подсеточного масштаба становятся разрешимыми на модельной сетке, появляется возможность их прямого моделирования. Естественным результатом является увеличение точности воспроизведения этих процессов.

На данный момент в России для целей моделирования климата применяется модель общей циркуляции атмосферы Института вычислительной математики РАН (ИВМ РАН) с горизонтальным разрешением около 150–200 км (Володин, 2010)¹, а для целей долгосрочного прогноза – модель ПЛАВ (ПолуЛагранжева, основанная на уравнении Абсолютного Вихря)² с разрешением 100–150 км и другие модели более грубого разрешения. Данные модели способны разрешать на сетке явления синоптического масштаба. В недалеком будущем возможности вычислительной техники позволят применять для долгосрочного прогноза погоды и моделирования климата модели общей циркуляции атмосферы, способные разрешать на сетке α -мезомасштабные процессы (т.е. модели с горизонтальным разрешением 30–50 км). В мире ведутся работы по созданию подобных моделей.

В большинстве моделей, применяемых для долгосрочного прогноза погоды и моделирования климата, используются эйлеровы численные методы. Шаг по времени в подобных методах ограничен условием устойчивости Куранта (или более жестким условием в случае методов высокого порядка аппроксимации). При горизонтальном разрешении 30–50 км допустимый шаг по времени, определяемый условием Куранта, оказывается неоправданно малым с точки зрения точности.

Шаг по времени не ограничивается условием Куранта при использовании полунеявного полулагранжева подхода к интегрированию уравнений динамики атмо-

¹Володин Е.М., Дианский Н.А., Гусев А.В. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана INMCM 4.0 // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 4. С. 448–466.

²Толстых М.А. Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. М.; Обнинск: ОАО ФОР, 2010. 111 с.

сферы (Robert, 1985)³. На практике, полуявный полулагранжев подход позволяет проводить расчеты с шагом по времени в 3-5 раз большим, чем при использовании эйлеровых методов, и, таким образом, экономить вычислительные ресурсы. Дополнительным преимуществом полулагранжева подхода является высокая вычислительная эффективность при расчете переноса большого количества составляющих атмосферы (малых газовых составляющих и аэрозолей). Данное свойство имеет большое значение, так как современные модели долгосрочного прогноза погоды и моделирования климата включают описание динамики порядка 100 таких составляющих.

При моделировании атмосферы с высоким пространственным разрешением преимущества полуявного полулагранжева подхода в совокупности с возможностью эффективной реализации на вычислительных системах с $O(10^4)$ процессорами (White, 2011)⁴, (Müeller, 2013)⁵ делают его многообещающей альтернативой явным эйлеровым методам. Возможность реализации полулагранжевых алгоритмов на сетках с квазиравномерным разрешением на сфере («кубическая сфера», редуцированная широтно-долготная сетка) позволяет уменьшать шаги сетки по горизонтали до $O(10)$ км.

Недостатком полулагранжева метода, ограничивающим его применение для долгосрочного моделирования, является нарушение законов локального и глобального сохранения массы атмосферы и ее компонентов. При длительном моделировании ошибки сохранения массы могут накапливаться, что в случае таких компонентов атмосферы, как водяной пар, CO_2 , озон, может приводить к смещению радиационного баланса модельной атмосферы и, соответственно, ошибкам моделирования.

Проблему сохранения массы можно решить, применив локально-консервативный конечно-объемный вариант полулагранжева подхода (Machenhauer, 2009)⁶. При этом важно применять подобные методы как для расчета переноса компонентов атмосферы, так и для дискретизации уравнения неразрывности (уравнения сохранения массы). В случае применения разных методов для дискретизации уравнения неразрывности и уравнений переноса компонентов атмосферы может нарушаться глобальное и локальное сохранение массы переносимых величин, что было показано в работе (Jöckel, 2010)⁷ в случае эйлеровых конечно-объемных методов.

³Robert A., Yee T., Ritchie H. A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models // Mon. Wea. Rev. 1985. Vol. 113. P. 388 – 394.

⁴J.B. White III, Dongarra J.J. High-performance high-resolution tracer transport on a sphere // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 6778 – 6799.

⁵Müller E., Scheichl R. Massively parallel solvers for elliptic PDEs in numerical weather- and climate prediction, submitted preprint. 2013. p. 24. URL: <http://arxiv.org/abs/1307.2036v1>.

⁶Machenhauer B., Kaas E., Lauritzen P. H. Finite-Volume Methods in Meteorology // Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. ELSEVIER, 2009. Vol. 14.

⁷Jöckel P., von Kuhlmann R., Lawrence M. G. et al. On a fundamental problem in implementing flux-form advection schemes for tracer transport in 3-dimensional general circulation and chemistry transport models // Q. J. Roy. Meteorol. Soc. 2001. Vol. 127. P. 1035–1052.

Целью данной работы является создание модели динамики атмосферы (динамического блока модели атмосферы), способной разрешать на сетке α -мезомасштабные процессы и предназначенной для долгосрочного прогноза погоды и моделирования климата.

Для достижения поставленной цели была создана модификация динамического блока модели ПЛАВ, сочетающая известные преимущества этой модели (точность, устойчивость и высокая вычислительная эффективность при мезомасштабном разрешении) с необходимыми для долгосрочного моделирования свойствами локального и глобального сохранения массы. Создание модификации динамического блока модели ПЛАВ, обладающей необходимыми свойствами, подразумевало реализацию конечно-объемного полулагранжева метода для дискретизации уравнений неразрывности и переноса и включало следующие этапы:

1. Создание и тестирование конечно-объемного полулагранжева алгоритма численного решения уравнения переноса на сфере.
2. Разработка численной модели мелкой воды на сфере с конечно-объемной полулагранжевой дискретизацией уравнения неразрывности для исследования свойств подобной дискретизации в упрощенном, двумерном случае.
3. Реализация в модели ПЛАВ конечно-объемной полулагранжевой дискретизации уравнений неразрывности и переноса.
4. Проверка точности и устойчивости созданной модификации модели ПЛАВ в стандартных экспериментах по воспроизведению динамики атмосферы и сравнение с результатами зарубежных моделей.

Научная новизна:

1. Впервые в России реализован локально-консервативный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса на сфере.
2. Впервые в мире подобный алгоритм реализован на редуцированной широтно-долготной сетке.
3. Независимо от группы исследователей Метеослужбы Великобритании (Wood, 2013)⁸, впервые в мире реализован блок решения уравнений динамики атмосферы для модели общей циркуляции атмосферы, основанный на конечно-объемном полулагранжевом подходе в сочетании с полунявной схемой интегрирования по времени, сохраняющий массу локально и глобально.

Практическая значимость. Динамический блок, представленный в настоящей диссертации, может использоваться в моделях общей циркуляции атмосферы для долгосрочного прогноза и моделирования изменений климата, в частности, в глобальной полулагранжевой модели атмосферы ПЛАВ. При этом ожидается:

- увеличение точности прогноза за счет повышения пространственного разрешения;

⁸N. Wood, A. Staniforth, A. White et al. An inherently mass-conserving semi-implicit semi-Lagrangian discretisation of the deep atmosphere global nonhydrostatic equations // Q. J. Roy. Meteorol. Soc. 2013.

- улучшение воспроизведения распределений компонентов атмосферы за счет использования локально-консервативного алгоритма расчета переноса.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на: 52-ой научной конференции МФТИ (2009), конференции по методам решения дифференциальных уравнений на сфере (Partial Differential Equations on the Sphere, Потсдам, Германия, 2010) и конференции по прогнозу погоды и климата на суперкомпьютерах нового поколения (Weather and Climate prediction on Next Generation Supercomputers: Numerical and Computational Aspects, Эксетер, Великобритания 2012), международной школе-конференции по вычислительно-информационным технологиям для окружающей среды CITES-2011 (Томск, 2011) и CITES-2013 (Петрозаводск 2013), на семинаре ФГБУ Гидрометцентр России (2012).

Полностью диссертация докладывалась на семинаре «Математическое моделирование геофизических процессов» в ФГБУН ИВМ РАН (2013).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 10-05-01066, 12-05-31441 и 13-05-00868), федеральной целевой программы «Кадры» Минобрнауки РФ (контракт №14.132.21.1378, соглашения №№ 8344, 8350, 8326).

Личный вклад. Автор разработал конечно-объемный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса на сфере и внедрил его в модель общей циркуляции атмосферы ПЛАВ. Разработал конечно-объемную полулагранжеву дискретизацию уравнения неразрывности для модели мелкой воды и полных уравнений динамики атмосферы в гидростатическом приближении. Реализовал конечно-объемную полулагранжеву дискретизацию уравнения неразрывности в модели ПЛАВ. Автор лично провел численные эксперименты по тестированию версии модели ПЛАВ мезомасштабного разрешения, использующей конечно-объемную дискретизацию уравнений неразрывности и переноса.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, в том числе 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 – в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации **108** страниц текста с **30** рисунками и **12** таблицами. Список литературы содержит **114** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе описывается созданный автором диссертации конечно-объемный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса. Во введении к главе приведены базовые сведения о полулагранжевом методе и его конечно-объемном варианте. В разделах 1.1–1.3 описывается применение конечно-объемных полулагранжевых методов для решения уравнения переноса при последовательно усложняющейся постановке задачи. В разделе 1.1 рассматривается случай одномерного уравнения переноса. В разделе 1.2 обсуждается случай двумерного уравнения переноса на сфере. В разделе 1.3 приводится описание созданного конечно-объемного полулагранжева алгоритма в трехмерном случае на сфере, показывается разбиение трехмерной задачи на подзадачи, рассмотренные в разделах 1.1 и 1.2.

Полулагранжев подход к решению уравнения переноса основан на его лагранжевой форме:

$$\frac{dq}{dt} = F_q, \quad (1)$$

утверждающей, что концентрация переносимой величины q в лагранжевой частице (частице, перемещающейся вместе с воздухом) не меняется при $F_q = 0$ (т.е. при отсутствии источников/стоков переносимой величины).

Полулагранжев подход к вычислению концентрации q_{ijk}^{n+1} на шаге по времени $n+1$ в некоторой точке вычислительной сетки \vec{X}_{ijk} заключается в рассмотрении движения лагранжевой частицы $\vec{X}(t)$ такой, что $\vec{X}(t^{n+1}) = \vec{X}_{ijk}$. Кинематическое уравнение для данной частицы

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{X}, t), \quad (2)$$

где \vec{V} – вектор скорости ветра, интегрируется на шаг по времени назад с помощью итерационного алгоритма. Таким образом, вычисляются координаты точки $\vec{X}(t^n)$, в которой находилась выбранная частица в момент времени $t = t^n$. Точка $\vec{X}_{ijk}^* = \vec{X}(t^n)$ называется исходной точкой траекторий с конечной точкой в узле сетки \vec{X}_{ijk} .

В силу уравнения переноса концентрация переносимой величины в лагранжевой частице сохраняется, следовательно, $q_{ijk}^{n+1} = q_{ijk}^n$, где q_{ijk}^n – значение концентрации в исходной точке \vec{X}_{ijk}^* на шаге по времени n . Как правило, исходная точка траектории не совпадает ни с одним из узлов вычислительной сетки, поэтому для нахождения значения концентрации q_{ijk}^n применяется интерполяция.

Недостатком традиционного полулагранжева подхода является отсутствие сохранения массы переносимой величины. Данная проблема может быть решена при использовании конечно-объемной формулировки полулагранжева метода, основанной на интегральной форме уравнения переноса:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} f dV = 0, \quad (3)$$

где $\delta V(t)$ – произвольный лагранжев объем (объем, перемещающийся вместе с воздухом), $f = \rho q$ – плотность переносимой величины, ρ – плотность воздуха.

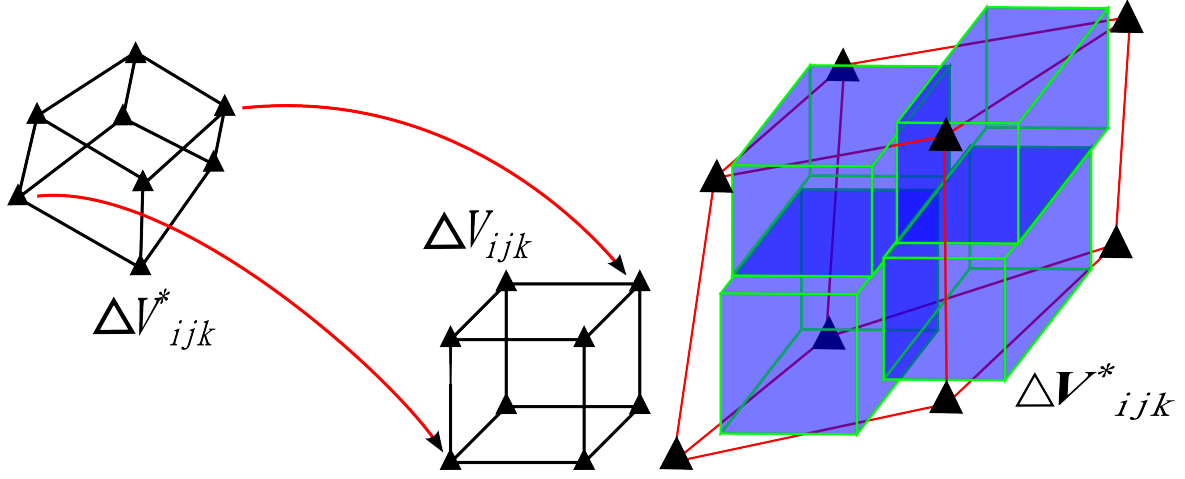


Рис. 1: Слева – схематичное изображение исходного

объема и ячейки вычислительной сетки. Справа – аппроксимация исходного объема многогранником.

Физический смысл уравнения переноса в интегральной форме – сохранение массы переносимой величины в лагранжевом объеме.

В конечно-объемных полулагранжевых методах рассматривается лагранжевый объем $\delta V(t)$ такой, что $\delta V(t^{n+1})$ совпадает с некоторой ячейкой вычислительной сетки ΔV_{ijk} . Плотность переносимой величины \bar{f}_{ijk}^{n+1} , осредненная по этой ячейке на шаге по времени $n+1$, задается выражением

$$\bar{f}_{ijk}^{n+1} \Delta V_{ijk} = \int_{\Delta V_{ijk}^*} f^n dV, \quad (4)$$

где $\Delta V_{ijk}^* = \delta V(t^n)$ – исходный объем, т.е. объем, совпадающий с рассматриваемым лагранжевым объемом на шаге по времени n . Физический смысл интеграла по исходному объему в правой части уравнения (4) – масса переносимой величины, заключенная в исходном объеме.

Вершины углов исходного объема ΔV_{ijk}^* – это исходные точки траекторий лагранжевых частиц с конечными точками в вершинах углов ячейки вычислительной сетки ΔV_{ijk} . Координаты вершин углов исходного объема вычисляются так же, как координаты исходных точек в традиционных полулагранжевых методах. Исходный объем ΔV_{ijk}^* полагается равным многограннику, полученному соединением вершин его углов отрезками (см. Рис. 1 лев.).

В разделе 1.1 рассматривается применение конечно-объемного полулагранжева метода к решению уравнения переноса в одномерном случае. Для нахождения плотности переносимой величины \bar{f}_i^{n+1} , осредненной по некоторой ячейке вычислительной сетки $\Delta V_i = [x_i - \frac{1}{2}\Delta x, x_i + \frac{1}{2}\Delta x]$, необходимо интегрирование f^n по исходному объему ΔV_i^* (который полагается известным). Функция плотности f^n задана набором средних значений \bar{f}_k^n по ячейкам сетки. Для вычисления \bar{f}_i^{n+1} с точностью выше первого порядка плотность в ячейках вычислительной сетки аппроксимируется кусочно-параболической функцией $h_k(x) = a_k + b_k x + c_k x^2$, $x \in V_k$,

$k = 1, \dots, N$ (Colella, 1984)⁹, коэффициенты которой определяются выражениями:

$$\int_{V_k} h_k(x) dx = \Delta x \bar{f}_k^n, \quad (5)$$

$$h(x_k \pm \frac{1}{2} \Delta x) = f^n(x_k \pm \frac{1}{2} \Delta x), \quad (6)$$

где значения плотности на границах ячейки $f^n(x_k \pm \frac{1}{2} \Delta x)$ вычисляются с помощью интерполяции. Условие (5) означает равенство средних значений функции плотности f и ее приближения h в ячейке V_k и необходимо для сохранения массы.

При численном решении уравнения переноса важно сохранение монотонности решения, т.е. не должны появляться новые экстремумы концентрации переносимой величины, а существующие максимумы не должны увеличиваться (минимумы – уменьшаться). Использование кусочно-параболической функции распределения плотности h не гарантирует сохранение монотонности, поэтому к функции h применяется монотонный фильтр (Barth, 1989)¹⁰.

В случае решения двумерного или трехмерного уравнения переноса (разделы 1.2 и 1.3) производить интегрирование по точной геометрии исходного объема сложно и вычислительно неэффективно. В работе (Nair, 2002)¹¹ на примере двумерного уравнения переноса на сфере было показано, что аппроксимация исходных объемов многоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям, существенно упрощает вычисления и лишь незначительно влияет на точность. В трехмерном случае логично аппроксимировать исходные объемы многогранниками с гранями, параллельными координатным плоскостям (см. Рис. 1, прав.).

Выбор аппроксимирующего многогранника (многоугольника) можно осуществить различными способами. В работе (Nair, 2002)¹² для двумерного случая был предложен такой выбор аппроксимирующего многоугольника, который позволяет вычислить массу, заключенную в исходном объеме, посредством двух последовательных одномерных интегрирований вместо одного двумерного (т.н. каскадный подход). Каскадный подход позволяет в многомерном случае не строить многомерные функции, аппроксимирующие распределение плотности, а использовать одномерные и, таким образом, уменьшить вычислительное время. Кроме того, к одномерным функциям плотности легче применять монотонные фильтры.

В разделе 1.2 диссертации описывается алгоритм численного решения двумерного уравнения переноса на сфере. Автор диссертации обобщает двумерный

⁹Colella P., Woodward P. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 54. P. 174 – 201.

¹⁰Barth T. J., Jespersen D. C. The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes // 27th Aerospace Sciences Meeting. 1989.

¹¹Nair R. D., Machenhauer B. The mass-conservative cell-integrated semi-Lagrangian advection scheme on the sphere // Mon. Wea. Rev. 2002. Vol. 130. P. 649 —667.

¹²Nair R., Scroggs J., Semazzi F. Efficient Conservative Global Transport Schemes for Climate and Atmospheric Chemistry Models // Mon. Wea. Rev. 2002. Vol. 130. P. 2059 – 2073.

каскадный подход (Nair, 2002) на случай редуцированной широтно-долготной сетки, в которой разрешение по долготе увеличивается при приближении к полюсам. В разделе 1.3 описывается разработанная автором диссертации аппроксимация исходных объемов в трехмерном пространстве, допускающая каскадный подход к вычислению масс (т.е. использование трех одномерных интегрирований вместо одного трехмерного). Данная аппроксимация является основой конечно-объемного полулагранжева алгоритма численного решения трехмерного уравнения переноса на сфере на редуцированной широтно-долготной сетке, описанного в разделе 1.3.

Созданный алгоритм численного решения уравнения переноса испытывался на задаче «твердое вращение с колебаниями по вертикали» (Jablonowski, 2008)¹³, которая является стандартным тестом для алгоритмов численного решения уравнения переноса в трехмерном случае. Поле горизонтальной скорости описывает вращение атмосферы, как целого, вокруг географической оси (второй вариант - вокруг оси, наклоненной под углом $\alpha = \pi/4$ к географической). Движения по вертикали - колебательные, с амплитудой 1000 м. Начальное распределение – непрерывное, локальное с горизонтальным радиусом около 2000 км, вертикальным – 1000 м или 2000 м. Точное решение после одного оборота совпадает с начальным распределением.

Ошибки численного решения созданного алгоритма в этом эксперименте оказались в 3 раза ниже, чем в случае неконсервативного полулагранжева алгоритма, основанного на трикубической интерполяции. Кроме того, созданный алгоритм сохраняет массу локально и глобально. При использовании монотонного фильтра (Barth, 1989) l_1 - и l_2 -нормы ошибок численного решения разработанного алгоритма увеличивались до 2,5 раз, однако, оставались меньше соответствующих норм ошибок неконсервативного полулагранжева алгоритма. При численном решении на редуцированной сетке с количеством точек на 20% меньше, чем в регулярной сетке с таким же разрешением на экваторе, нормы ошибок численного решения увеличивались незначительно.

Во **второй главе** проводится исследование свойств конечно-объемной полулагранжевой дискретизации уравнения неразрывности в рамках модели мелкой воды на вращающейся сфере. Уравнения мелкой воды на вращающейся сфере являются квазидвумерным приближением уравнений динамики атмосферы в предположениях малости вертикального масштаба и постоянства плотности. В мировой практике данное приближение является стандартом для тестирования новых горизонтальных аппроксимаций и схем интегрирования по времени перед включением в системы численного решения полных уравнений динамики атмосферы.

¹³Jablonowski C., Lauritzen P. H., Taylor M. et al. Idealized test cases for the dynamical cores of Atmospheric General Circulation Models // A proposal for the NCAR ASP 2008 summer colloquium. 2008. URL: http://www.cgd.ucar.edu/cms/pel/asp2008/idealized_testcases.pdf.

Автор диссертации разработал и реализовал в полуявной полулагранжевой модели мелкой воды (Tolstykh, 2002)¹⁴ конечно-объемную полулагранжеву дискретизацию уравнения неразрывности, что позволило совместить устойчивость при больших шагах по времени с локальным и глобальным сохранением массы.

В разделе 2.1 приведены уравнения мелкой воды на вращающейся сфере:

$$\left(\frac{d(\vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right)_H = -\nabla\Phi - \nabla\Phi_s \quad (7)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi D. \quad (8)$$

Используются следующие обозначения: $\vec{V} = (u, v)$ – вектор скорости ветра, $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, \vec{r} – радиус-вектор точки, Φ – геопотенциал – высота слоя воздуха, умноженная на ускорение свободного падения g , Φ_s – высота поверхности земли, умноженная на g , $(\dots)_H$ – обозначает взятие горизонтальной проекции векторной величины в скобках (с учетом кривизны земли), $D = \nabla \cdot \vec{V}$ – дивергенция поля ветра.

Раздел 2.2 посвящен аспектам полуявной полулагранжевой дискретизации уравнений мелкой воды на вращающейся сфере. Полуявный подход состоит в разделении нелинейных операторов на большую линейную часть и малую нелинейную добавку. Линейные части операторов, описывающие самые быстрые волны, интегрируются по абсолютно устойчивой неявной схеме, а нелинейные добавки – по явной схеме. Подобный подход устойчив при больших шагах по времени и не требует решения нелинейных систем дискретных уравнений.

Конечно-объемная дискретизация уравнения неразрывности основана на его интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} \Phi dS = 0, \quad (9)$$

где $\delta V(t)$ – произвольный плоский лагранжев объем. Интегральная форма уравнения неразрывности линеаризуется относительно постоянного фонового значения геопотенциала Φ^{ref} :

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} \Phi' dS = - \int_{\delta V(t)} \Phi^{ref} D dS, \quad (10)$$

Φ' – отклонение геопотенциала от фонового значения. Дискретизация этого уравнения по полуявной схеме приводит к выражению:

$$\bar{\Phi}^{m+1} S(\Delta V) + \frac{1+\epsilon}{2} \Delta t \Phi^{ref} \bar{D}^{n+1} S(\Delta V) = \int_{\Delta V^*} \left[\Phi^m - \frac{1-\epsilon}{2} \Delta t \Phi^{ref} D^n \right] dS, \quad (11)$$

где ΔV – некоторая ячейка вычислительной сетки, $S(\Delta V)$ – ее площадь, ΔV^* – исходный объем, соответствующий ΔV . Интегралы по исходным объемам ΔV^* вычисляются с помощью конечно-объемного полулагранжева алгоритма численного решения уравнения переноса из раздела 1.2.

¹⁴Tolstykh M. A. Vorticity-Divergence Semi-Lagrangian Shallow-Water Model of the Sphere Based on Compact Finite Differences // J. Comput. Phys. 2002. Vol. 179. P. 180–200.

Система дискретных уравнений модели разрешается относительно неизвестной переменной $\bar{\Phi}^{n+1}$. В результате получается уравнение Гельмгольца, которое решается с помощью метода конечных объемов.

В разделе 2.3 описываются результаты численных экспериментов с моделью мелкой воды на сфере (Tolstykh, 2002) с разработанной автором диссертации конечно-объемной дискретизацией уравнения неразрывности (11). Были проведены эксперименты «квази-геострофический баланс», «обтекание изолированной горы потоком», «квазиреальные данные» из набора (Williamson, 1992)¹⁵, а также эксперимент «баротропная неустойчивость» (Galewski, 2002)¹⁶. Данный набор экспериментов является мировым стандартом для тестирования моделей мелкой воды на сфере.

Численные эксперименты показали, что конечно-объемная полулагранжева дискретизация уравнения неразрывности не оказывает отрицательного влияния на точность численного решения уравнений мелкой воды. Несомненным преимуществом конечно-объемной дискретизации по сравнению со стандартной полулагранжевой дискретизацией, использовавшейся в модели (Tolstykh, 2002) ранее, является локальное и глобальное сохранение массы. Сравнение с результатами, доступными в литературе, говорит о том, что точность разработанной модели при эквивалентном пространственном разрешении не уступает точности зарубежных моделей.

При численном решении на редуцированной сетке с количеством точек на 20% меньше, чем в регулярной сетке с таким же разрешением на экваторе, нормы ошибок численного решения увеличивались незначительно. Например, на Рис. 2 показано, что в тесте «Квазиреальные данные» структура и амплитуда поля ошибки численного решения на регулярной сетке и редуцированной сетке практически не отличаются.

В третьей главе приводится описание разработанной автором диссертации полулагранжевой модели динамики атмосферы (динамического блока модели атмосферы) с использованием метода конечных объемов. Разработанная модель является модификацией модели ПЛАВ (Толстых, 2010) с использованием конечно-объемной дискретизации уравнений неразрывности и переноса влажности. Применение конечно-объемных дискретизаций позволило достичь локального и глобального сохранения массы в полулагранжевой модели.

В разделе 3.1 приводятся уравнения модели – примитивные уравнения динамики атмосферы в $\sigma = p/p_s$ -системе координат по вертикали, где p – давление,

¹⁵Williamson D., Drake J., Hack J. et al. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 102. P. 211 — 224.

¹⁶Galewski J., Scott R., Polvani L. An initial value problem for testing numerical models of the global shallow water equations // Tellus A. 2004. Vol. 56. P. 429 – 440.

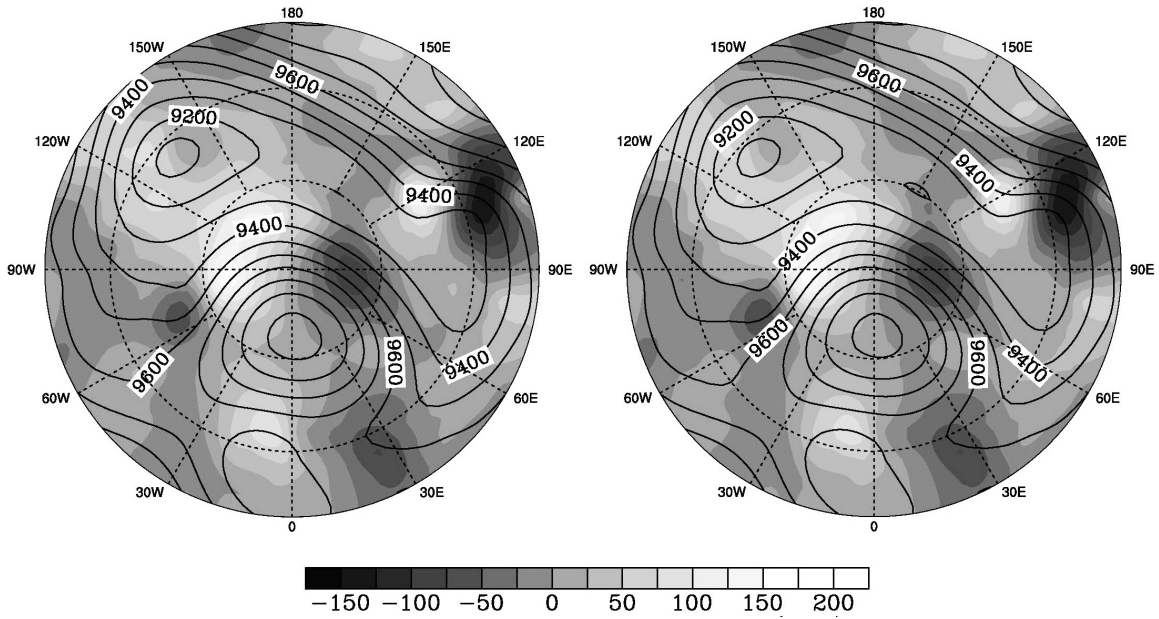


Рис. 2: Задача «квазиреальные данные», регион вокруг северного полюса (до 70° с.ш.). Контурсы – поле высоты слоя воздуха (м) после 5 дней моделирования, заливка – ошибка поля высоты (м). Слева – численное решение на регулярной широтно-долготной сетке, справа – на редуцированной широтно-долготной сетке (на 20% меньше узлов).

а p_s – приземное давление:

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_H = -\nabla\Phi - R_d T_v \nabla \ln p_s + F_V, \quad (12)$$

$$\frac{dT_v}{dt} - \frac{R_d T_v}{c_{pd}} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{d(\ln p_s + \frac{\Phi_s}{R_d \bar{T}})}{dt} \right) = -\frac{1}{c_{pd}} \vec{V} \cdot \nabla \Phi_s + F_T, \quad (13)$$

$$\frac{d(\ln p_s + \frac{\Phi_s}{R_d \bar{T}})}{dt} + D + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{1}{R_d \bar{T}} \vec{V} \cdot \nabla \Phi_s, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \sigma} = -R_d T_v, \quad (15)$$

$$\frac{dq}{dt} = F_q. \quad (16)$$

В уравнениях (12–16): Φ – геопотенциал σ -поверхности (высота, умноженная на ускорение свободного падения g), ∇ – оператор горизонтального градиента ($\sigma = const$), R_d – газовая постоянная сухого воздуха, $T_v = T(1 + (\delta - 1)q)$ – виртуальная температура, T – температура, q – удельная влажность, $\delta = R_q/R_d$ – отношение газовых постоянных влажного и сухого воздуха, C_{pd} – теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении, \bar{T} – постоянное фоновое значение температуры, $\dot{\sigma}$ – вертикальная скорость в σ -системе координат, остальные обозначения аналогичны уравнениям мелкой воды. Члены F_V , F_T , F_q уравнений (12–16) отвечают за вклад процессов подсеточного масштаба (испарение и конденсация влаги, конвекция, пограничный слой и др.).

Для формулировки конечно-объемной полулагранжевой дискретизации уравнения неразрывности (14) это уравнение переписывается в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} p_s dV = 0, \quad (17)$$

где $\delta V(t)$ – произвольный лагранжев объем.

В разделе 3.2 описывается полунеевная полулагранжева дискретизация уравнений (12–15) в стандартной версии модели ПЛАВ. Для дискретизации по времени применяется двухслойная полунеевная полулагранжева схема с устойчивой экстраполяцией по времени SETTLS (Hortal, 2002)¹⁷. Для дискретизации уравнений по пространству используется метод конечных разностей. Система дискретных уравнений модели сводится к решению двумерного уравнения Гельмгольца относительно неизвестной дивергенции D^{n+1} на каждом уровне по вертикали.

В разделе 3.3 описывается разработанная автором диссертации модель динамики атмосферы (версия динамического блока модели ПЛАВ с конечно-объемной дискретизацией уравнений неразрывности и переноса влаги). Уравнение неразрывности в интегральной форме (17) линеаризуется относительно фонового значения приземного давления p_{ref} :

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} p'_s dV = - \int_{\delta V(t)} \left[\nabla \cdot (p_{ref} \vec{V}) + p_{ref} \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right] dV, \quad (18)$$

где p'_s - отклонение приземного давления от фонового значения.

Уравнение (18) дискретизируется по времени по схеме SETTLS следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{p_s'^{n+1} \Delta V - \int_{\Delta V^*} p_s'^n dV}{\Delta t} = \\ & - \frac{1+\epsilon}{2} \left(\left[\nabla \cdot (p_{ref} \vec{V}^{n+1}) + p_{ref} \frac{\partial \dot{\sigma}^{n+1}}{\partial \sigma} \right] \Delta V + \int_{\Delta V^*} \left[\nabla \cdot (p_{ref} \vec{V}^n) + p_{ref} \frac{\partial \dot{\sigma}^n}{\partial \sigma} \right] dV \right) \\ & + \frac{\epsilon}{2} \left(\left[\nabla \cdot (p_{ref} \vec{V}^n) + p_{ref} \frac{\partial \dot{\sigma}^n}{\partial \sigma} \right] \Delta V + \int_{\Delta V^*} \left[\nabla \cdot (p_{ref} \vec{V}^{(n+1)_e}) + p_{ref} \frac{\partial \dot{\sigma}^{(n+1)_e}}{\partial \sigma} \right] dV \right), \quad (19) \end{aligned}$$

где ΔV – некоторая ячейка вычислительной сетки, а ΔV^* – соответствующий ей исходный объем, $(\dots)^{(n+1)_e} = 2(\dots)^n - (\dots)^{n-1}$. Для вычисления интегралов по исходным объемам используется конечно-объемный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса, представленный в главе 1.

Уравнение переноса влаги дискретизируется в интегральной форме так же, как в алгоритме численного решения уравнения переноса (глава 1). Источники влаги (F_q) учитываются явно, результирующее дискретное уравнение выглядит

¹⁷Hortal M. The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model // Q. J. Roy. Meteor. Soc. 2002. Vol. 128. P. 1671–1688.

следующим образом:

$$\bar{f}^{n+1} \Delta V = \int_{\Delta V^*} (f^n + \Delta t p_s F_q^n) dV, f = p_s q \quad (20)$$

Раздел 3.4 посвящен вопросам реализации разработанной модели динамики атмосферы на параллельных вычислительных системах. Для параллельной реализации применяется метод одномерной декомпозиции расчетной области по широте, т.е. каждый процессор производит вычисления в определенной полосе широт. В настоящий момент модель реализована на вычислительных системах с общей памятью и использует 16 процессоров (максимальное число процессоров на общей памяти) с эффективностью 70%.

Параллельная реализация разработанной модели на 16 процессорах с общей памятью оказалась достаточной для проведения численных экспериментов, предусмотренных целями диссертации. При практическом внедрении модели в системы долгосрочного прогноза погоды и моделирования климата потребуется ее реализация на массивно-параллельных системах с распределенной памятью. В силу структуры алгоритмов модели подобная реализация возможна и не будет отличаться от параллельной реализации стандартной версии модели ПЛАВ, которая может эффективно использовать до 1000 процессоров.

В разделе 3.5 описываются результаты численных экспериментов с разработанной моделью динамики атмосферы. Были проведены эксперименты по моделированию адиабатической атмосферы: «Гидростатическое обтекание изолированной горы потоком» и «Бароклиновая неустойчивость», а также неадиабатические эксперименты: «Моделирование циркуляции атмосферы на длительный промежуток времени при наличии внешнего воздействия» и «Моделирование атмосферной циркуляции на 72 часа» (численный прогноз погоды). Эксперименты «Гидростатическое обтекание изолированной горы потоком», «Бароклиновая неустойчивость» и «Моделирование циркуляции атмосферы на длительный промежуток времени» входят в стандартизированный набор экспериментов международного проекта по сравнению динамических блоков моделей общей циркуляции атмосферы DCMIP (<http://www.earthsystemcog.org/projects/dcmip/>).

Начальные условия эксперимента «Бароклиновая неустойчивость» (Jablonowski, 2006)¹⁸ представляют собой атмосферу в геострофическом равновесии с небольшим возмущением зональной скорости ветра. Начальное состояние воспроизводит такие особенности реальной циркуляции, как струйные течения в средних широтах и тропопаузу. Возмущение зональной скорости нарушает геострофический баланс в районе максимума скорости струйного течения в средних широтах Северного полушария и вызывает развитие бароклиновой волны.

¹⁸Jablonowski C., Williamson D. L. A baroclinic instability test case for atmospheric model dynamical cores // Q. J. Roy. Meteorol. Soc. 2006. Vol. 132. P. 2943 – 2975.

Эксперименты с созданной моделью проводились на регулярных широтно-долготных сетках с разрешением 100 км, 63 км, 50 км и 33 км на экваторе. При самом высоком разрешении модель была устойчива при тех же числах Куранта, что и при самом грубом, шумы и другие негативные эффекты увеличения разрешения не возникли. Была обнаружена сходимость численных решений на более грубых сетках к решению на сетке с самым высоким разрешением.

Развитие бароклинной волны по результатам эксперимента с разработанной моделью согласуется с результатами зарубежных моделей общей циркуляции атмосферы, опубликованными в литературе и на странице проекта DCMIP в сети интернет. Нормы отклонения численного решения разработанной модели от численного решения спектральной полулагранжевой модели высокого разрешения, общепринятого в качестве эталонного результата, меньше уровня неопределенности численного решения данной задачи, вычисленного в (Jablonowski, 2006). В экспериментах с разработанной моделью струйное течение в Южном полушарии остается невозмущенным, в отличие от ряда моделей (ICON-DWD, OLAM), использующих гексагональные вычислительные сетки (сетки из треугольных или шестиугольных элементов). В подобных моделях структура сетки вызывает ложные нарушения геострофического равновесия и развитие волны №5 (т.н. «отпечаток сетки»).

Полная энергия атмосферы в экспериментах по моделированию бароклинной неустойчивости уменьшается, т.е. разработанная модель диссипативна. Отток энергии около $0,5 \text{ Вт/м}^2$, обнаруженный в эксперименте на сетке с разрешением 100 км на экваторе, оказался в 2,5 раза больше, чем в случае модели (Gassmann, 2013)¹⁹ с эквивалентным горизонтальным разрешением, динамический блок которой сохраняет полную энергию с машинной точностью (отток энергии в данной модели возникает за счет введения явной диссипации, необходимой для устойчивости). Однако, величина $0,5 \text{ Вт/м}^2$ значительно меньше потери энергии, наблюдаемой в большинстве современных моделей климатической системы Земли, вследствие неконсервативности и несогласованности некоторых параметризаций подсеточных процессов (Lucarini, 2011)²⁰.

Цель эксперимента по моделированию циркуляции атмосферы на длительный промежуток времени (Held, 1994)²¹ – проверка точности воспроизведения характеристик атмосферной циркуляции, осредненных за длительный промежуток времени. В этом эксперименте изотермическая атмосфера, находящаяся в состоянии покоя с небольшими возмущениями, приводится в движение с помощью внешнего

¹⁹Gassmann A. A global hexagonal C-grid non-hydrostatic dynamical core (ICON-IAP) designed for energetic consistency // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 2012. Vol. 139. P. 152–175.

²⁰Lucarini V., F. Ragone. Energetics of climate models: net energy balance and meridional enthalpy transport // Reviews of Geophysics. 2011. Vol. 49. 29 p.

²¹Held I. M., Suarez M. J. A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models // Bull. Am. Meteorol. Soc. 1994. Vol. 75. P. 1825 — 1830.

воздействия, создающего разницу температур полюс – экватор. Производится интегрирование уравнений динамики атмосферы на 1200 дней. Характеристики возникшей циркуляции осредняются за последние 1000 дней интегрирования (первые 200 дней отводятся на развитие и установление движения атмосферы).

На Рис. 3 показаны поля зонального ветра и температуры, осредненные по долготе и времени (за последние 1000 дней интегрирования). Положение и величина максимумов скорости ветра с хорошей точностью совпадают с результатами других моделей, доступными в литературе, в том числе с результатами моделей Немецкой метеослужбы и Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (Jablonski, 1998)²². Распределение температуры на Рис. 3 хорошо согласуется с моделями ICON-IAP (Gassmann, 2013) и спектральной модели (Held, 1994), сохраняющими полную энергию (без учета диффузии).

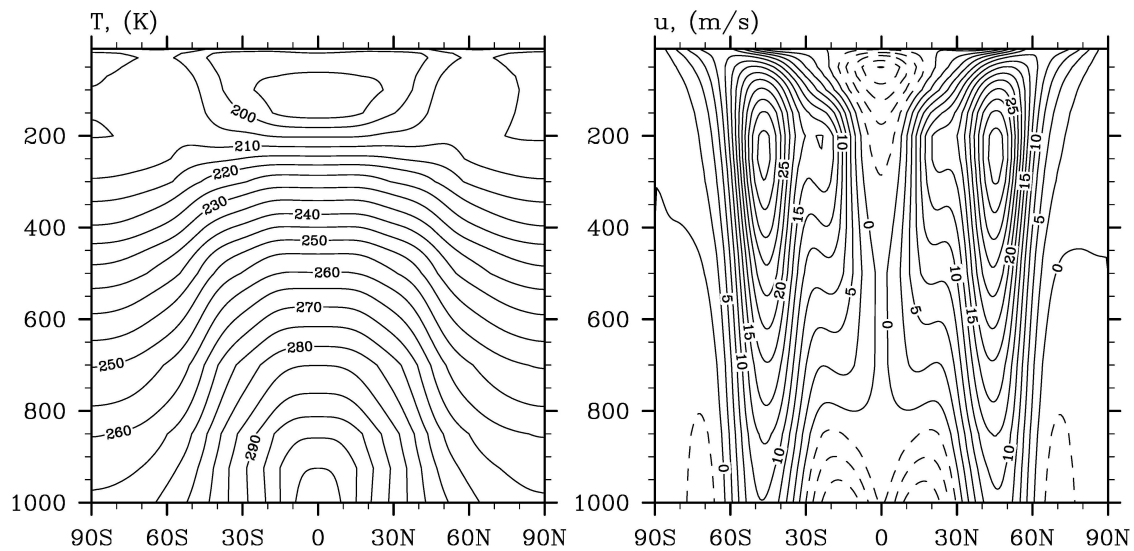


Рис. 3: Эксперимент «Моделирование циркуляции атмосферы на длительный промежуток времени». Слева - зонально осредненное поле температуры, справа – зонально осредненное поле компоненты u скорости ветра, прерывистые линии соответствуют отрицательным значениям (восточный ветер). Поля осреднены с 201-ого по 1200-й день интегрирования.

В данном эксперименте большое значение имеет воспроизведение вихревых потоков тепла и импульса, так как бароклинный вихревой перенос является главным механизмом перераспределения этих величин от полюса к экватору. Интенсивность вихревого переноса можно оценить по полю вихревой кинетической энергии. Характеристики вихревого переноса в эксперименте с разработанной моделью (потоки тепла и импульса, вихревая кинетическая энергия), изображенные на Рис. 4, хорошо согласуются с результатами зарубежных моделей, в том числе с результатами моделей, сохраняющих полную энергию (Gassmann, 2013), (Held, 1994).

²²Jablonski C. Test of the Dynamics of two global Weather Prediction Models of the German Weather Service: The Held-Suarez Test: Master's thesis: Meteorological Institute of the University of Bonn, Germany. 1998. URL: <http://www-personal.umich.edu/~cjablono/comparison.html>.

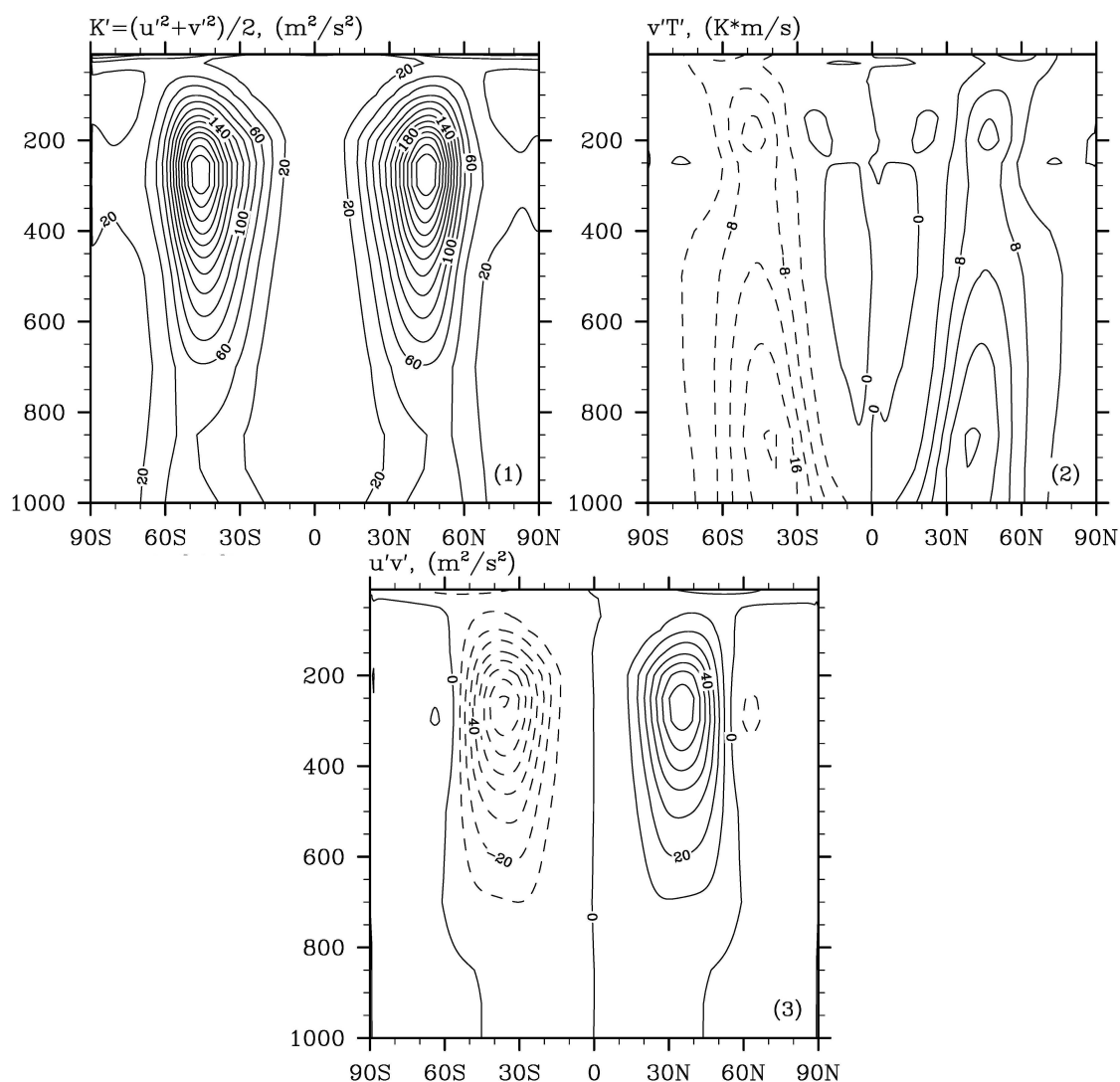


Рис. 4: Эксперимент «Долгопериодное интегрирование». (1) – Зонально осредненная вихревая кинетическая энергия K' . (2) – Зонально осредненный вихревой поток тепла $v'T'$. (3) – Зонально осредненный вихревой поток зонального импульса $u'v'$. Все поля осреднены по времени с 201-ого по 1200-й день интегрирования. Прерывистые линии соответствуют отрицательным значениям.

Эксперимент по численному прогнозу погоды на 72 часа производился с целью проверить устойчивость и другие свойства разработанной модели в условиях моделирования реальной атмосферы. Основные факторы, осложняющие моделирования реальной атмосферы – начальные данные с большим количеством мелкомасштабных структур и большими значениями градиента полей, негладкое поле высоты земной поверхности, наличие физических процессов подсеточного масштаба.

Точность прогноза погоды по большинству показателей соответствовала стандартной версии модели ПЛАВ, применяемой в качестве основной модели глобального прогноза погоды в Гидрометцентре РФ. Отмечено некоторое усиление ложного орографического резонанса (паразитный эффект в численном решении, возникающий во всех полулагранжевых моделях) по сравнению со стандартной

версией модели. Разработанная модель, в отличие от стандартной версии модели ПЛАВ, сохраняет массу атмосферы и водяного пара с точностью машинной арифметики. Эффекты несохранения массы не проявляются при моделировании на короткие промежутки времени (такие, как 72 часа), но в более длительных экспериментах (сезон, год) неизбежно приведут к ошибкам моделирования.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Создан локально-консервативный полулагранжев алгоритм численного решения трехмерного уравнения переноса на сфере. Впервые в мире подобный алгоритм реализован на редуцированной широтно-долготной сетке. Созданный алгоритм обладает высокой вычислительной эффективностью полулагранжевых методов (за счет возможности использовать большие шаги по времени) и, в то же время, сохраняет массу переносимой величины локально и глобально.
2. Разработан динамический блок модели общей циркуляции атмосферы (модель динамики атмосферы) мезомасштабного разрешения с использованием конечно-объемного полулагранжева подхода. Динамический блок может использоваться в моделях общей циркуляции атмосферы для целей долгосрочного прогноза и моделирования изменений климата, в частности, в глобальной полулагранжевой модели атмосферы ПЛАВ. Разработанный динамический блок воспроизводит атмосферную циркуляцию с точностью, соответствующей современному мировому уровню, и устойчив при высоком разрешении.
3. Показана принципиальная возможность применения численных методов, разработанных в диссертации, для моделирования атмосферы с разрешением около 10 км (за счет возможности работы на редуцированной широтно-долготной сетке).

Публикации автора по теме диссертации

1. Шашкин В.В. Локально-консервативный полулагранжев алгоритм решения уравнения переноса на сфере // Труды 52-ой научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть 8: Проблемы современной физики. М.: МФТИ, 2009, С. 269–271.
2. Шашкин В.В. Толстых М.А. Полулагранжева модель мелкой воды на сфере на редуцированной сетке, сохраняющая массу // Избранные труды школы-конференции СИТЕС-2011. Томск: ЦНТИ, 2011, С. 57–60.
3. Tolstykh M., Shashkin V. **Vorticity–divergence mass-conserving semi-Lagrangian shallow-water model using the reduced grid on the sphere // J. Comput. Phys. 2012. Vol. 231. P. 4205 — 4233. doi: 10.1016/j.jcp.2012.02.016.**
4. Шашкин В.В. Локально-консервативный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса на сфере в трехмерном случае в z-системе координат по вертикали // Труды Гидрометцентра России. 2012. Вып. 348. С. 64–82. URL: <http://method.hydromet.ru/publ/tr/tr348/shashkin.pdf>.
5. Shashkin V., Tolstykh M. **Inherently mass-conservative version of the semi-Lagrangian SL-AV atmospheric model dynamical core // Geosci. Model. Dev. Discuss. 2013. Vol. 6. P. 4809–4832. doi:10.5194/gmdd-6-4809-2013.**
6. Lauritzen P., Ullrich P., Jablonowski C., Bosler P. A., Calhoun D., Conley A. J., Enomoto T., Dong L., Dubey S., Guba O., Hansen A. B., Kaas E., Kent J., Lamarque J.-F., Prather M. J., Reinert D., Shashkin V. V., Skamarock W. C., Sørensen B., Taylor M. A., Tolstykh M. A. **A standard test case suite for two-dimensional linear transport on the sphere: results from a collection of state-of-the-art schemes // Geosci. Model. Dev. Discuss. 2013. Vol. 6. P. 4983 — 5076. doi: 10.5194/gmdd-6-4983-2013.**