На правах рукописи

Никит

Никитин Кирилл Дмитриевич

Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в *Учреждении Российской академии наук Институт вычислительной математики РАН.*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, доцент, Василевский Юрий Викторович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, доцент, Нечепуренко Юрий Михайлович*
	кандидат физико-математических наук, доцент, Богачев Кирилл Юрьевич
Ведущая организация:	*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН*

Защита состоится «24» декабря 2010 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета *Д 002.045.01* при *Учреждении Российской академии наук Институт вычислительной математики РАН*, расположенном по адресу: *119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Учреждения Российской академии наук Институт вычислительной математики РАН.*

Автореферат разослан «24» ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук *Бочаров Г. А.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При моделировании процессов переноса и фильтрации в пористой среде часто приходится сталкиваться с сильно неоднородными свойствами среды и проводить расчеты на произвольных сетках с многогранными ячейками. Важным требованием к используемым схемам является сохранение неотрицательности получаемого численного решения, поскольку отрицательные значения таких величин, как концентрация или насыщенность, могут порождать сложности при расчете свойств жидкостей и химических взаимодействий. По этой причине востребованными являются монотонные консервативные схемы дискретизации, работающие на произвольных неструктурированных расчетных сетках и позволяющие решать задачи в неоднородных средах. При изучении динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью важным критерием является достоверный расчет положения и характеристик свободной поверхности. Эффективное решение подобных задач требует использования динамических адаптивных расчетных сеток высокого разрешения и экономичных методов численного моделирования совместной динамики жидкости и свободной поверхности.

Цель диссертационной работы. Целями диссертационной работы являются разработка монотонной консервативной схемы дискретизации уравнения конвекции-диффузии с компактным шаблоном дискретизации потока, создание на ее основе численной модели процессов двухфазной фильтрации в пористой среде, разработка экономичной технологии моделирования трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей.

Научная новизна. В работе предложена и исследована монотонная нелинейная схема дискретизации конвективного потока для уравнения конвекции-диффузии на неструктурированных сетках с многогранными ячейками. Проведен сравнительный анализ использования традиционной линейной и новой нелинейной схем дискретизации потока с двухточечным шаблоном на примере задачи двухфазной фильтрации. Разработана и исследована экономичная технология моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей.

Практическая значимость. Практическая значимость диссертационной работы заключается в создании комплекса программ для приближенного решения уравнения конвекции-диффузии на сетках с многогранными ячейками и численного моделирования процесса двухфазной фильтрации в пористой среде, описывающего разработку нефтегазовых месторождений. Создана технологическая цепочка, включающая в себя задание расчетной области, численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и последующую визуализацию.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Предложена и исследована новая монотонная нелинейная схема дискретизации уравнения конвекции-диффузии на основе метода конечных объемов на сетках с многогранными ячейками.

2. На основе предложенной схемы дискретизации разработана численная модель двухфазной фильтрации в пористой среде и проведен сравнительной анализ предложенной схемы дискретизации с традиционной линейной схемой.

3. Разработана экономичная технология, включающая численные методы, алгоритмы, структуры данных и комплекс программ, для моделирования трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН, Института прикладной математики РАН, Вычислительного центра РАН, Московского физико-технического института, Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Upstream Research Center of ExxonMobil corp. г.Хьюстон (США) и на следующих научных конференциях: конференция "Тихоновские чтения" (МГУ, Москва, ноябрь 2007); конференции "Ломоносов" (МГУ, Москва, апрель 2008, апрель 2010); конференции "Ломоносовские чтения" (МГУ, Москва, апрель 2009, апрель 2010); конференция молодых ученых "Технологии высокопроизводительных вычислений и компьютерного моделирования" (СПбГУ ИТМО, С.-Петербург, апрель 2009); международная конференция "SIAM Geosciences 2009" (Лейпциг, Германия, июнь 2009); международная конференция "Computational Methods in Applied Mathematics: CMAM-4" (Познань, Польша, июнь 2010); международные конференции "NUMGRID-2008" и "NUMGRID-2010" (ВЦ РАН, Москва, июнь 2008, октябрь 2010); международный научный семинар "Advances on Numerical Methods for Multiphase and Free Surface Flows" (ИВМ РАН, Москва, июнь 2009); международный научный семинар "Computational Mathematics and Applications" (Технологический университет Тампере, Тампере, Финляндия, сентябрь 2009).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах: 4 статьи – в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК, [1–4] и 3 статьи – в сборниках научных трудов [5–7].

Личный вклад автора. В совместных работах [1, 6, 7] вклад автора заключался в разработке вычислительного ядра технологии моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей и проведении численных экспериментов.

В совместной работе [2] вклад автора заключался в разработке нелинейной схемы дискретизации уравнения конвекции-диффузии в трехмерном пространстве, программной реализации метода и проведении численных экспериментов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, обзора используемой терминологии, трех глав, заключения и списка литературы из 95 наименований. Диссертационная работа содержит 28 рисунков и 12 таблиц. Общий объем диссертационной работы – 105 страниц.

Содержание работы

Во *введении* определяется область практического применения предлагаемых в работе методов, обосновывается актуальность диссертационной работы, приводится обзор работ, посвященных решению уравнений конвекции-диффузии, моделированию двухфазной фильтрации и течений со свободной границей, формулируются основные результаты, описывается структура диссертации.

В *обзоре используемой терминологии* дано краткое разъяснение используемых в работе понятий и терминов.

В *первой главе* диссертации описывается метод конечных объемов для стационарной задачи конвекции-диффузии на произвольных сетках с многогранными ячейками, полным анизотропным кусочно-непрерывным тензором диффузии и кусочно-непрерывным полем скорости [2]. Метод основан на консервативной монотонной схеме дискретизации диффузионного и конвективного потоков.

В *разделе 1.1* дана постановка задачи. Пусть Ω – трехмерная многогранная область с границей, состоящей из двух частей: $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, таких что $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$, и множество Γ_D замкнуто и непусто: $\Gamma_D = \bar{\Gamma}_D$, $\Gamma_D \neq \emptyset$. Предположим, что Ω представима в виде объединения конечного числа многогранных подобластей Ω_i, $i = 1, \ldots, k$, таких что $\bar{\Omega} = \cup_i \bar{\Omega}_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ для $i \neq j$. На замыкании каждой подобласти $\bar{\Omega}_i$ определяется симметричный, положительно определенный, полный, возможно анизотропный, непрерывный тензор диффузии $\mathbb{K}(\mathbf{x})$ с компонентами из $L^2(\Omega_i)$ и непрерывное поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ с компонентами из $L^2(\Omega_i)$, причем $\int\limits_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla w \; dx \le 0$, $\forall w \in C_0^1(\Omega)$, $w \ge 0$.

Рассматривается стационарная задача конвекции-диффузии для неизвестной концентрации c:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\,(\mathbf{v}c - \mathbb{K}\nabla c) &= g \quad \text{в} \quad \Omega, \\ c &= g_D \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \\ -(\mathbb{K}\nabla c)\cdot \mathbf{n} &= g_N \quad \text{на} \quad \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

где $g \in L^2(\Omega)$ – внешние источники, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали, а g_D и g_N – заданные граничные условия. Обозначим через Γ_{out} – часть границы Γ, на которой $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \ge 0$, а через $\Gamma_{\text{in}} = \Gamma \setminus \Gamma_{\text{out}}$. Предполагается, что $\Gamma_N \subset \Gamma_{\text{out}}$.

При вышеописанных условиях и соответствующих ограничениях на g_D, g_N, задача (1) имеет единственное обобщенное решение $c \in W_2^1(\Omega)$. Предполагается, что выполняются достаточные условия неотрицательности решения $c(x)$: $g(x) \ge 0$, $g_D \ge 0$, $g_N \le 0$.

В *разделе 1.2* формулируется метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии с двухточечной аппроксимацией полного потока $\mathbf{q} = -\mathbb{K}\nabla c + c\mathbf{v}$ на сеточной грани f:

$$\mathbf{q}_f^h \cdot \mathbf{n}_f = M_f^+ C_{T_+} - M_f^- C_{T_-},$$

где $C_{T_\pm}$ – среднее значение концентрации в ячейке $T_\pm$, f – общая грань для T_+ и T_-, вектор нормали $\mathbf{n}_f$ – внешний для T_+, а $\mathbf{q}_f$ – средняя плотность потока на грани f. Коэффициенты $M_f^\pm(C) = D_f^\pm(C) + A_f^\pm(C)$ зависят от значений концентрации C в соседних ячейках и представляются как сумма коэффициентов для диффузионной и конвективной составляющих потока, соответственно.

Разработанная дискретизация конвективного потока основана на монотонной противопотоковой схеме, использующей кусочно-линейное разрывное восполнение решения с ограничителем наклона на многогранных ячейках.

Для аппроксимации диффузионного потока используется двухточечная схема, предложенная А.А.Даниловым и Ю.В.Василевским (RJNAMM, 2009, 24(3)).

В *разделе 1.3* предлагается алгоритм формирования системы нелинейных уравнений для вектора неизвестной концентрации C:

$$\mathbb{M}(C)\ C = \mathbb{G}(C). \tag{2}$$

Для решения системы (2) применяется метод итераций Пикара: решается система линейных уравнений $\mathbb{M}(C^{k-1})C^k = G(C^{k-1})$, пока относительная невязка $\|\mathbb{M}(C^k)C^k - G(C^k)\|\ /\ \|\mathbb{M}(C^0)C^0 - G(C^0)\|$ не станет меньше ε_{non}.

Формулируются и доказываются две следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Пусть* $\Gamma_N = \emptyset$, $g \geq 0$, $\mathrm{div}\ \mathbf{v} \geq 0$ *в* Ω, $g_D \geq 0$ *на* $\Gamma_D \equiv \partial\Omega$ *и решение* C *для* (2) *существует. Тогда* $C \geq 0$.

Теорема 1.2. *Пусть* $g \geq 0$, $g_D \geq 0$, $g_N \leq 0$ *и* $\Gamma_D \neq \emptyset$ *в* (1). *Если* $C^0 \geq 0$ *и линейные системы в методе Пикара решаются точно, тогда* $C^k \geq 0$ *для* $k \geq 1$.

В *разделе 1.4* описываются расчетные сетки, используемые в экспериментах, вводятся дискретные нормы для оценки ошибки дискретизации, приводятся результаты численных экспериментов.

Новый метод показывает второй порядок сходимости в дискретной L_2-норме для концентрации и, как минимум, первый порядок для потоков на гладком решении в задаче с доминирующей диффузией, а также вторые порядки сходимости для концентрации и потоков в задаче с доминирующей конвекцией на гексаэдральных, призматических и тетраэдральных сетках. В задаче с разрывными тензором диффузии и полем скорости нелинейная схема сохраняет второй порядок сходимости на гладком решении для концентрации и первый – для потоков. По числу осцилляций и диссипативности для тестового сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии новая схема не уступает лучшим линейным и нелинейным конечно-элементным схемам [2]. Получаемое дискретное решение является неотрицательным при выполнении условий теоремы 1.2, однако может не удовлетворять дискретному принципу максимума.

Во *второй главе* рассматривается численная модель, основанная на представлении двухфазных течений через насыщенности двух фаз [3]. Данная модель используется для моделирования второго этапа разработки нефтегазового месторождения, во время которого закачиваемая в нагнетательные скважины вода вытесняет из пористой среды нефть, добываемую на производящей скважине.

В *разделе 2.1* описываются уравнения двухфазной фильтрации в пористой среде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi\rho_\alpha S_\alpha}{B_\alpha}\right) = -\mathrm{div}\left(\frac{\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{B_\alpha}\right) + q_\alpha, \qquad \alpha = w, o, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}\mathbb{K}\big(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z\big), \qquad \alpha = w, o, \tag{4}$$

$$S_w + S_o = 1, \tag{5}$$

$$p_o - p_w = p_c(S_w). \tag{6}$$

В этих уравнениях α – фаза жидкости (w – вода или o – нефть), p_α – неизвестное давление фазы α, S_α – неизвестная насыщенность, $\mathbf{u}_\alpha$ – неизвестная скорость Дарси, $\mathbb{K}$ – тензор абсолютной проницаемости, ρ_α – фазовая плотность, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p)$ – вязкость, $B_\alpha = B_\alpha(p)$ – фактор сжатия, $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S)$ – относительная проницаемость фазы α, $p_c(S)$ – капиллярное давление,$\phi = \phi(p)$ – пористость, g – гравитационный член, z – глубина, а q_α – источник или сток для скважины. На границе расчетной области задается условие непротекания, а на скважинах – фиксированное забойное давление.

В *разделе 2.2* описывается метод интегрирования по времени системы уравнений двухфазной фильтрации (3)-(6) неявный по давлению и явный по насыщенности (IMPES – Implicit Pressure, Explicit Saturation). Метод состоит из последовательного решения уравнения для давления (неявная схема) и явного решения уравнения для насыщенности.

В *разделе 2.3* рассматривается полностью неявная схема для интегрирования по времени системы уравнений (3)-(6). Выписывается неявная схема и нелинейная невязка для уравнения (3) в ячейке T_i :

$$R^l_{\alpha,i} = \int\limits_{T_i} \left[\left(\frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right)^l_i - \left(\frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right)^n_i + \Delta t^{n+1} \left(\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha - \frac{q_\alpha}{\rho_\alpha} \right)^l_i \right] \mathrm{d}x, \quad \alpha = w, o,$$

для l-го приближения к значению на временном шаге $n+1$.

Получаемая нелинейная система $R_{\alpha,i} = 0$ для $\alpha = w, o$ решается методом Ньютона:

$$\begin{aligned} J(x^l)\delta x^l =& - R(x^l), \\ x^{l+1} =& x^l + \delta x^l, \end{aligned}$$

где $x = \begin{pmatrix} p_o \\ S_w \end{pmatrix}$ – вектор независимых переменных по всем ячейкам сетки, $R(x) = \begin{pmatrix} R_w(x) \\ R_o(x) \end{pmatrix}$ – вектор нелинейных невязок по всем ячейкам сетки, а $J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_w}{\partial p_o}(x) & \frac{\partial R_w}{\partial S_w}(x) \\ \frac{\partial R_o}{\partial p_o}(x) & \frac{\partial R_o}{\partial S_w}(x) \end{pmatrix}$ – явно формируемая матрица якобиана.

В *разделе 2.4* описывается построение линейной и нелинейной схем дискретизации фильтрационного потока. Рассматривается использование нелинейной противопотоковой аппроксимации для значений насыщенности на гранях сетки на основании линейного восполнения с ограничителем наклона, введенного в первой главе.

В *разделе 2.5* приводятся численные эксперименты, демонстрирующие преимущества новой нелинейной схемы дискретизации потока с двухточечным шаблоном по сравнению с линейной схемой: (i) Нелинейная схема имеет традиционный линейный шаблон в случае ортогональных расчетных сеток с изотропным или анизотропным, но сонаправленным сетке тензором абсолютной проницаемости; (ii) Нелинейная схема позволяет получать более точное воспроизведение формы фронта обводнения, времени водяного прорыва и деби́тов нефти и воды на добывающей скважине в случае неортогональных сеток и полного анизотропного тензора проницаемости; (iii) Использование новой дискретизации вместе с полностью неявной схемой сравнимо по вычислительной сложности с использованием традиционной линейной дискретизации.

В *третьей главе* диссертации рассматривается подход к представлению двухфазного течения через явную границу раздела фаз.

В *разделе 3.1* описывается математическая модель течения вязкой несжимаемой жидкости в изменяющейся во времени расчетной области $\Omega(t)$. Граница области $\overline{\partial\Omega(t)} = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma(t)}$, где Γ_D – меняющаяся часть неподвижной границы, а $\Gamma(t)$ – свободная граница.

Течение жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{aligned}\right. \quad \text{в} \;\; \Omega(t), \tag{7}$$

где $\mathbf{u}$ – векторное поле скорости, p – кинематическое давление, $\mathbf{f}$ – внешняя сила (например, сила тяжести), ρ – плотность и ν – кинематическая вязкость.

Определяются начальные и граничные условия. На Γ_D задается условие Дирихле для скорости $\mathbf{u}$. На свободной поверхности накладываются кинематическое условие на нормальную компоненту скорости на свободной границе $v_\Gamma = \mathbf{u}|_\Gamma \cdot \mathbf{n}_\Gamma$ и условие компенсации нормальной компоненты тензора напряжения $\boldsymbol{\sigma} = \nu[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]/2 - p\mathbb{I}$ силами поверхностного натяжения $\tau\kappa$ и внешним давлением p_{ext}: $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_\Gamma|_\Gamma = \tau\kappa\mathbf{n}_\Gamma - p_{\text{ext}}\mathbf{n}_\Gamma$. Здесь κ – сумма главных кривизн, а τ – коэффициент поверхностного натяжения.

Вводится скалярная функция уровня ϕ и уравнение движения свободной поверхности в продолженном с поверхности гладком поле скорости $\widetilde{\mathbf{u}}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\phi = 0 \quad \text{в} \;\; \mathbb{R}^3 \times (0, T]. \tag{8}$$

В *разделе 3.2* описывается метод дробных шагов для интегрирования по времени уравнений (7), (8). Временной шаг алгоритма разбивается на подшаги:

- Вычисление нового положения свободной поверхности, состоящее из 4 подшагов. (i) Полулагранжев перенос функции уровня $\phi(t+\Delta t)$ по текущему полю скорости. (ii) Перенос частиц по текущему полю скорости. (iii) Коррекция объема жидкости. (iv) Восстановление функции уровня $\phi(t + \Delta t)$ как расстояния со знаком до поверхности.

- Адаптивное перестроение расчетной сетки.

- Вычисление нового поля скорости $\mathbf{u}(t+\Delta t)$, состоящее из 4 подшагов. (i) Полулагранжев перенос $\mathbf{u}(t+\Delta t)$ по полю скорости $\mathbf{u}(t)$ с предыдущего шага. (ii) Обновление $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ с учетом вязкости и внешних сил. (iii) Проекция $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ на подпространство бездивергентных скоростей. (iv) Продолжение $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ с поверхности на внешнюю часть объема жидкости.

- Выбор нового шага по времени из CFL-условия.

В *разделе 3.3* рассматриваются динамические гексаэдральные сетки типа восьмеричное дерево. С учетом особенностей структуры сеток вводятся дискретизации основных дифференциальных операторов: градиента давления, дивергенции скорости, оператора Лапласа скорости. Определяются операторы коррекции объема и восстановления расстояния со знаком до поверхности.

В *разделе 3.4* приводятся два численных эксперимента, показывающие сравнение результатов численного моделирования с реальными физическими экспериментами.

В первом эксперименте рассматривается задача об обрушении дамбы, показывается соответствие результатов численного моделирования экспериментальным данным.

Во втором эксперименте изучается задача о падении капли внутри контейнера, частично заполненного жидкостью. Исследуется процесс образования "капли" во время обратного всплеска. Анализируются вычислительная сложность используемых алгоритмов и показывается линейная зависимость времени работы шага алгоритма от числа расчетных ячеек, заполненных жидкостью.

В *заключении* кратко сформулированы результаты диссертационной работы и сделаны выводы о ее теоретической и практической ценности.

Основные результаты и выводы

Диссертационная работа посвящена разработке и исследованию численных методов, применяемых для трехмерного моделирования двухфазных течений.

В работе предложена и исследована новая монотонная нелинейная схема дискретизации уравнения конвекции-диффузии на основе метода конечных объемов на сетках с многогранными ячейками. Предлагаемая схема гарантирует сохранение неотрицательности дискретного решения, является низкодиссипативной и показывает второй порядок сходимости в дискретной L_2-норме для концентрации и первый порядок для потоков на гладком решении.

На основе предложенной схемы дискретизации разработана численная модель двухфазной фильтрации в пористой среде и проведен сравнительный анализ предложенной схемы дискретизации потока с традиционной линейной схемой. Результаты экспериментов с использованием двух схем дискретизации по времени – неявной по давлению, явной по насыщенности IMPES-схемы и полностью неявной схемы – демонстрируют устойчивость решения к неортогональности расчетной сетки и анизотропии тензора проницаемости, а также невысокую вычислительную сложность новой схемы.

Разработана экономичная технология, включающая численные методы, алгоритмы, структуры данных и комплекс программ, для моделирования трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Технология основана на одновременном решении уравнений Навье-Стокса и уравнения функции уровня, описывающего динамику свободной поверхности. Ключевые составляющие технологии – динамические гексаэдральные расчетные сетки, метод дробных шагов для дискретизации по времени и эффективные конечно-объемные и конечно-разностные схемы для дискретизации по пространству.

Список публикаций

1. Nikitin K., Vassilevski Yu. Free surface flow modelling on dynamically refined hexahedral meshes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. Vol. 23, no. 5. Pp. 469–485.

2. Nikitin K., Vassilevski Yu. A monotone finite folume method for advection-diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. Vol. 25, no. 4. Pp. 335–358.

3. Никитин К. Д. Нелинейный метод конечных объемов для задач многофазной фильтрации // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 11. С. 131–147.

4. Никитин К. Д. Реалистичное моделирование свободной водной поверхности на адаптивных сетках типа восьмеричное дерево // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. Т. 70, № 6. С. 60–64.

5. Никитин К. Д. Технология расчёта течений со свободной границей с использованием динамических гексаэдральных сеток // Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. М.: МГУ, 2008. С. 183–198.

6. Никитин К. Д., Сулейманов А. Ф., Терехов К. М. Технология моделирования течений со свободной поверхностью в реалистичных сценах // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2009. Т. 39. С. 305–307.

7. Nikitin K. D., Olshanskii M. A., Terekhov K. M., Vassilevski Yu. V. Preserving distance property of level set function and simulation of free surface flows on adaptive grids // Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления. 2010. Pp. 25–32.