

На правах рукописи

Муравлёва Екатерина Анатольевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ
НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ
БИНГАМА

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

*диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Москва 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской Академии наук
Институте вычислительной математики РАН

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук
Замарашкин Николай Леонидович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Репин Сергей Игоревич
доктор физико-математических наук,
профессор Сухинов Александр Иванович

Ведущая организация:

Учреждение Российской Академии наук
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится « 16 » апреля 20 10 г. в 15 часов на
заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Учреждении
Российской Академии наук Институте вычислительной математики РАН
по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения
Российской Академии наук Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан « 12 » марта 20 10 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук

Г. А. Бочаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Существует широкий круг материалов, которые обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определённого предельного значения напряжений среда ведёт себя как жёсткое тело, выше этого предела – как несжимаемая вязкая жидкость. Примерами служат геоматериалы (высокопарафинистая нефть, глины, грязи, сели, кристаллизующаяся лава), кровь в капиллярах, множество косметических и пищевых продуктов, строительные (свежий бетон, масляные краски) и химические материалы. При течении среды Бингама могут образовываться два типа зон: жёсткие зоны, в которых среда неподвижна или движется как твёрдое тело, и зоны течения. При этом естественным образом возникает «предельная» поверхность, разделяющая области с разным движением материала. Таким образом, характерной особенностью задач о течении вязкопластической среды является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает значительные трудности при построении эффективных методов решения. Основная сложность при численном моделировании течения вязкопластической среды связана с сингулярностью определяющих соотношений и невозможностью определения напряжений в жёстких зонах.

Существуют две основные группы методов для преодоления отмеченных математических трудностей: методы эффективной вязкости и методы, основанные на вариационной постановке. Методы эффективной вязкости (регуляризованные модели) состоят в аппроксимации недифференцируемых определяющих соотношений гладкой функцией. Таким образом, среда рассматривается как нелинейная вязкая жидкость. Это упрощённый инженерный подход, который иногда приводит к нефизичным результатам, особенно для нестационарных задач.

Альтернативой регуляризованным моделям может служить вариационная формулировка, впервые предложенная для вязкопластической среды А.А. Ильюшиным (1938). Одно из первых систематических исследований модели Бингама было предпринято П.П. Мосоловым и В.П. Мясниковым (1965-1967). Дюво и Лионсом (1972) с помощью выпуклого анализа задача минимизации функционала энергии сформулирована в виде вариационного неравенства, эквивалентного исходной системе уравнений.

Вариационная формулировка задачи автоматически учитывает наличие неизвестной границы, отделяющей области течения от жёстких областей. Более 30 лет назад в работах французских математиков ¹ были предложены алгоритмы численного решения вариационных неравенств,

¹Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер (1976), М. Фортен (1984), П. Ле Таллек (1989)

однако они казались слишком сложными. В 2001 году алгоритм ALG2 был записан в виде удобной вычислительной процедуры, и стал активно применяться. Дискретизация проводилась методом конечных элементов, для которых он был предложен и обоснован.

Метод конечных разностей в рамках данного подхода не применялся, поэтому построение конечно-разностных схем, для которых обоснована аппроксимация и сходимости, является актуальной задачей, решению которой и посвящена диссертация. Необходимость разработки надёжных (обоснованных) и эффективных численных методов, соответствующих точной математической модели среды Бингама, обуславливает актуальность данной работы.

Цель работы

Основная цель работы состоит в разработке и исследовании новых численных методов решения задач вязкопластичности на основе вариационных неравенств с использованием разностных схем.

Методы исследования

Теория внешних аппроксимаций вариационных неравенств, теория разностных схем, методы оптимизации, методы вычислительной линейной алгебры.

Научная новизна работы

Представленные в диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем:

- Предложены две разностные схемы для смешанной постановки в переменных «скорость-тензор скоростей деформаций-тензор напряжений», являющиеся обобщением хорошо известных в вычислительной гидродинамике схем на разнесённых (MAC-схема) и полуразнесённых сетках, для задачи о течении в канале, плоской и трехмерной задач вязкопластичности. На основе теории внешних аппроксимаций обоснована сходимость решения конечномерной задачи к решению непрерывной.
- Разработаны, обоснованы и численно реализованы новые методы решения задачи течения среды Бингама (на основе алгоритма Узавы и ALG2).
- Для схемы на полуразнесённых сетках в трёхмерном случае проведено аналитическое исследование ядра дискретного оператора градиента. Предложены, обоснованы и численно реализованы два подхода

решения вырожденной задачи Стокса: поиск нормального решения на подпространстве, ортогональном ядру, и стабилизация разностной схемы путём введения дополнительного слагаемого в уравнение несжимаемости.

- На основе разработанных разностных схем и известной схемы по времени проведено численное моделирование нестационарных течений вязкопластической среды для задач течения в каверне и каналах.

Практическая значимость работы

Предложенные разностные схемы могут быть использованы как для расчёта течений среды Бингама, так и других неньютоновских жидкостей, в том числе моделей с нелинейной вязкостью.

Апробация работы

Результаты диссертации обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН, («Вычислительные и информационные технологии в математике» рук. проф. В.И. Лебедев, проф. Ю.М. Нечепуренко, чл.-корр. Е.Е. Тыртышников, 2008, 2009), Института математического моделирования РАН (2008), Института автоматизации проектирования РАН (рук. акад. О.М. Белоцерковский, 2008), Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша (семинар им. К.И. Бабенко, 2009), Института проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского (рук. акад. Д.М. Климов и акад. В.Ф. Журавлёв, 2009), на научно-исследовательских семинарах кафедр механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова: теории упругости (рук. проф. И.А. Кийко, 2008), механики композитов (рук. проф. Б.Е. Победря, 2008), вычислительной математики (рук. проф. Г.М. Кобельков, 2008), оптимального управления (рук. проф. В.М. Тихомиров, 2009), теории пластичности (рук. чл.-корр. Е.И. Ломакин и акад. И.Г. Горячева, 2009); на семинаре кафедры высшей математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (рук. проф. В.Ф. Бутузов, 2009), семинарах университетов Humboldt University, IWTM Kaiserslautern (2007), University of Cape Town, TU Cape Town, TU Darmstadt, Hausdorff Institute of Mathematics (HIM, Bonn) (2008).

Результаты диссертации докладывались на Международной конференции «Ломоносов» (Москва, 2005, 2009), «Ломоносовские чтения» (Москва, 2006, 2009), III International conference «Computational methods in applied mathematics СМАМ-3» (Минск, 2007), II International conference «Matrix methods and operator equations» (Москва, 2007), Седьмой Всероссийский семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2007), Workshop «Viscoplasticity: from Theory to Application» (Тичино, Швейцария, 2007), International Conference on Numerical Analysis and Applied

Mathematics ICNAAM (2008), ENUMATH (Уппсала, Швеция, 2009), Workshop on Advanced Computer Simulations for Junior Scientists (Санкт-Петербург, 2009), Workshop «Viscoplasticity: from Theory to Application» (Лимассол, Кипр, 2009).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 статей в рецензируемых журналах, из них [2-8] - в журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 120 наименований, содержит 44 рисунка и 28 табл. Объем диссертации — 175 страниц.

Личный вклад автора

Постановка задач принадлежит: в работе [1] из списка публикаций — Е. В. Чижонкову, [2-7] — Л. В. Муравлёвой, [8] — автору. Во всех работах, выполненных в соавторстве, основные результаты получены автором. В работе [4] Л. В. Муравлёвой принадлежит совместное доказательство, в [5,7] — совместный анализ результатов, в [6] М. А. Ольшанскому принадлежит доказательство леммы, в [8] И. В. Оселедцу принадлежит обобщение структуры ядра градиента на d -мерный случай.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждаются рассматриваемые в работе задачи и существующие методы их решения, дан краткий обзор современного состояния области исследований. Описывается структура диссертации, кратко формулируются основные полученные результаты.

Первая глава является вводной, в ней приведена постановка задачи (**раздел 1.1**), а также приведены основные понятия и вспомогательные сведения из функционального и выпуклого анализа (**раздел 1.2**), элементы теории внешних аппроксимаций (**раздел 1.3**). Введены определяющие соотношения вязкопластической среды Бингама:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \begin{cases} \tau_{ij} = 2\mu D_{ij}(\mathbf{v}) + \sigma_s \frac{D_{ij}(\mathbf{v})}{|\mathbf{D}(\mathbf{v})|}, & \text{если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \sigma_s, & \text{если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| = 0, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, p — давление, $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений, μ, σ_s — коэффициент вязкости и предел текучести, соответственно; \mathbf{v} — вектор скорости, $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$ — тензор скоростей деформаций и $|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 = \sum_{i,j} D_{ij}(\mathbf{v})D_{ij}(\mathbf{v})$.

Во второй главе рассматривается задача о течении вязкопластической среды в цилиндрической трубе поперечного сечения Ω с границей Γ под действием градиента давления f . Предполагается, что скорость среды направлена вдоль оси Ox_3 , то есть $v = (0, 0, v(x_1, x_2))$.

В разделе 2.1 формулируется вариационная постановка задачи:

$$(P_0) \quad J(v) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u), \quad J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) + j(u) - \int_{\Omega} fu \, dx,$$

где $a(u, w) = \mu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx$, $j(u) = \tau_s \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$, $\tau_s = \sigma_s / \sqrt{2}$. Решение v задачи (P_0) удовлетворяет также вариационному неравенству

$$a(v, u - v) + (j(u) - j(v)) \geq \int_{\Omega} f(u - v) \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

В разделе 2.2 рассматриваются внешние аппроксимации задачи (P_0) . Пусть вектор $h = [h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2$, рассмотрим сетку $R_h = \{M \mid M \in \mathbb{R}^2, M = \{ih_1, jh_2\}, i, j \in \mathbb{Z}\}$. Каждому узлу M сетки R_h поставим в соответствие брус с центром M_{ij} : $\omega_h^0(M) = ((i-1/2)h_1, (i+1/2)h_1) \times ((j-1/2)h_2, (j+1/2)h_2)$ и крест с центром M (e_i означает i -й единичный базисный вектор в \mathbb{R}^2): $\omega_h^1(M) = \omega_h^0(M \pm (h_1 e_1)/2) \cup \omega_h^0(M \pm (h_2 e_2)/2)$. Определим далее

$\Omega_h = \{M \mid \omega_h^1(M) \subset \Omega\}$, $V_h = \{v_h \mid v_h = (v_{ij})_{M \in \Omega_h}, v_{ij} \in \mathbb{R}\}$, и отображение $q_h: V_h \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ по формуле $q_h v_h = \sum_{M \in \Omega_h} v_{ij} \theta_h^M$, где θ_h^M - характеристическая функция множества $\omega_h^0(M)$. Функции θ_h^M не принадлежат пространству $H_0^1(\Omega)$, следовательно, $a(u, w)$, $j(u)$ нельзя определить на V_h . Поэтому производные заменяются отношениями конечных разностей. Для первой внешней аппроксимации положим для $l = 1, 2$

$$\delta_l \varphi(x) = [\varphi(x + (h_l e_l)/2) - \varphi(x - (h_l e_l)/2)]/h_l, \quad (1)$$

для второй внешней аппроксимации определим

$$\begin{aligned} \tau_1 \varphi(x) &= (\delta_1 \varphi(x_1, x_2 + h_2/2) + \delta_1 \varphi(x_1, x_2 - h_2/2))/2, \\ \tau_2 \varphi(x) &= (\delta_2 \varphi(x_1 + h_1/2, x_2) + \delta_2 \varphi(x_1 - h_1/2, x_2))/2. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим формы $a_h^k: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ и функции $j_h^k: V_h \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} a_h^1(u_h, w_h) &= \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \delta_i q_h u_h \delta_i q_h w_h \, dx, & j_h^1(u_h) &= \tau_s \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 (\delta_i q_h u_h)^2 \right)^{1/2} \, dx, \\ a_h^2(u_h, w_h) &= \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \tau_i q_h u_h \tau_i q_h w_h \, dx, & j_h^2(u_h) &= \tau_s \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 (\tau_i q_h u_h)^2 \right)^{1/2} \, dx. \end{aligned}$$

Функционал $J(u)$ аппроксимируем функциями $J_h^k(u_h) : V_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$J_h^k(u_h) = \frac{1}{2} a_h^k(u_h, u_h) + j_h^k(u_h) - \int_{\Omega} f q_h u_h dx, \quad k = 1, 2.$$

В качестве приближенной рассматривается следующая задача:

$$(P_{0h})_k : \min_{u_h \in V_h} J_h^k(u_h), \quad k = 1, 2.$$

Решение задач $(P_{0h})_k$, $k = 1, 2$, существует и единственно. Первая аппроксимация функционала $J(u)$ предложена ранее ², вторая аппроксимация является новой. Доказана сильная сходимость решения приближённой задачи $(P_{0h})_k$ к решению исходной задачи (P_0) . Для нестационарных задач рассматривается задача минимизации функционала

$$J_{th}^k(u_h) = J_h^k(u_h) + \alpha/2 \int_{\Omega} |q_h u_h|^2 dx, \quad k = 1, 2$$

(изменения в доказательстве сходимости технические).

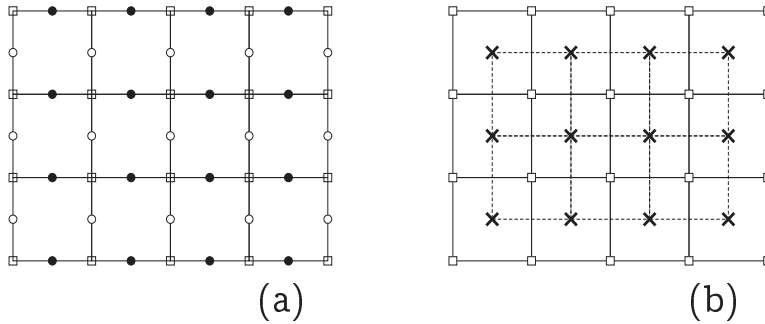


Рис. 1. (a) \square – R_h , \bullet – R_h^1 , \circ – R_h^2 , (b) \square – R_h , \times – R_h^3

В разделе 2.3 задача минимизации функционала J_{th}^k сводится к нахождению седловой точки лагранжиана \mathcal{L}_{rh} . Вводится независимая переменная $q_h = \nabla_h u_h$ (∇_{1h} определяется (1), ∇_{2h} определяется (2)), компоненты которой задаются на пространствах Q_{kh} , $k = 1, 2$, соответственно:

$$Q_{1h} = \{q_h \mid q_h = (q_h^1, q_h^2), q_h^1 = \{q_{i+1/2,j}^1\} \in R_h^1, q_h^2 = \{q_{i,j+1/2}^2\} \in R_h^2\},$$

$$Q_{2h} = \{q_h \mid q_h = (q_h^1, q_h^2), q_h^l = \{q_{i+1/2,j+1/2}^l\} \in R_h^3, l = 1, 2\}.$$

и лагранжиан $\mathcal{L}_{rh} : V_h \times Q_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}_{rh}(u_h, q_h, \mu_h) = \alpha/2 \|u_h\|^2 + \mu/2 \|q_h\|^2 + \tau_s j_h(q_h) - (f_h, u_h) +$$

²См. Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер

$$+(\boldsymbol{\mu}_h, \nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{q}_h) + r/2 \|\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{q}_h\|^2, \quad r > 0.$$

Теорема Пусть $(v_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ – седловая точка $\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$. Тогда она также является седловой точкой $\mathcal{L}_{r'h}$ для любого $r' \geq 0$ и v_h – решение задачи минимизации функционала $J(\mathbf{u})$.

Для поиска седловой точки используется алгоритм типа Узавы (ALG2)³:

$$\begin{aligned} & \text{Пусть заданы} && \text{произвольные } \boldsymbol{\gamma}_h^0, \boldsymbol{\lambda}_h^1 \in \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h; \\ \text{Для } n = 0, 1, 2, \dots &&& \text{с известными } \boldsymbol{\gamma}_h^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_h^n \text{ найти } v_h^n, \boldsymbol{\gamma}_h^n, \boldsymbol{\lambda}_h^{n+1}: \\ \mathcal{L}_{rh}(v_h^n, \boldsymbol{\gamma}_h^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_h^n) &\leq \mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\gamma}_h^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_h^n), \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h, v_h^n \in V_h, & (3) \\ \mathcal{L}_{rh}(v_h^n, \boldsymbol{\gamma}_h^n, \boldsymbol{\lambda}_h^n) &\leq \mathcal{L}_{rh}(v_h^n, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h^n), \quad \forall \mathbf{q}_h \in \mathbf{Q}_h, \boldsymbol{\gamma}_h^n \in \mathbf{Q}_h, & (4) \\ \boldsymbol{\lambda}_h^{n+1} &= \boldsymbol{\lambda}_h^n + \rho(\nabla_h v_h^n - \mathbf{q}_h^n). & (5) \end{aligned}$$

Теорема Пусть $(v_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ – седловая точка \mathcal{L}_{rh} на $V_h \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h$. Если $0 < \rho < r(1 + \sqrt{5})/2$, то имеет место следующая сходимость: $v_h^n \rightarrow v_h$ в V_h , $\boldsymbol{\gamma}_h^n \rightarrow \boldsymbol{\gamma}_h$ в \mathbf{Q}_h . Более того, если $\boldsymbol{\lambda}_h^*$ – предел подпоследовательности $\{\boldsymbol{\lambda}_h^n\}$, то $(v_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\lambda}_h^*)$ – седловая точка \mathcal{L}_{rh} на $V_h \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h$.

Раздел 2.4 посвящён особенностям реализации алгоритма (3)-(5) на предложенных разностных схемах. Для первой схемы он приобретает вид:

Первый шаг: $-r\Delta_{1h}v_h^n = f_h + \nabla_{1h} \cdot \boldsymbol{\lambda}_h^n - r\nabla_{1h} \cdot \boldsymbol{\gamma}_h^{n-1}, v_h^n|_\Gamma = 0$, второй шаг:

$$\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2,j}^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } |\boldsymbol{\tau}| = \left(\sqrt{(\tau_{i+1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i,j+1/2}^2)^2} + \sqrt{(\tau_{i+1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i+1,j+1/2}^2)^2} \right. \\ & \left. + \sqrt{(\tau_{i+1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i+1,j-1/2}^2)^2} + \sqrt{(\tau_{i+1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i,j-1/2}^2)^2} \right) / 4 < \tau_s, \\ \frac{\tau_{i+1/2,j}^1}{4(\mu+r)} \left(1 - \frac{\tau_s}{|\boldsymbol{\tau}|} \right), & \text{иначе, здесь } \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\lambda}_h^n + 2r\nabla_{1h}v_h^n; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,j+1/2}^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } |\boldsymbol{\tau}| = \left(\sqrt{(\tau_{i+1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i,j+1/2}^2)^2} + \sqrt{(\tau_{i+1/2,j+1}^1)^2 + (\tau_{i,j+1/2}^2)^2} \right. \\ & \left. + \sqrt{(\tau_{i-1/2,j}^1)^2 + (\tau_{i,j+1/2}^2)^2} + \sqrt{(\tau_{i-1/2,j+1}^1)^2 + (\tau_{i,j+1/2}^2)^2} \right) / 4 < \tau_s, \\ \frac{\tau_{i,j+1/2}^2}{4(\mu+r)} \left(1 - \frac{\tau_s}{|\boldsymbol{\tau}|} \right), & \text{иначе;} \end{cases}$$

третий шаг: $\boldsymbol{\lambda}_h^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_h^n + \rho(\nabla v_h^n - \boldsymbol{\gamma}_h^n)$.

Здесь Δ_{1h} – стандартная пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа, сеточный оператор дивергенции имеет вид $\nabla_h \cdot : \mathbf{Q}_h^1 \rightarrow V_h$:

$$(\nabla_{1h} \cdot \boldsymbol{\lambda}_h)_{i,j} = ((\lambda_{i+1,j}^1 - \lambda_{i,j}^1)/h_1 + (\lambda_{i,j+1}^2 - \lambda_{i,j}^2)/h_2).$$

³См. M. Fortin, R. Glowinski

Для второй схемы первый и третий шаги формально не меняются, однако оператор Лапласа аппроксимируется девятиточечным шаблоном

$$\begin{aligned}
(\Delta_{2h} \mathbf{u}_h)_{i,j} = & (\mathbf{u}_{i+1,j+1} - 2\mathbf{u}_{i,j+1} + \mathbf{u}_{i-1,j+1} + \\
& + 2\mathbf{u}_{i+1,j} - 4\mathbf{u}_{i,j} + 2\mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{u}_{i+1,j-1} - 2\mathbf{u}_{i,j-1} + \mathbf{u}_{i-1,j-1}) / (4h_1^2) + \\
& + (\mathbf{u}_{i+1,j+1} + 2\mathbf{u}_{i,j+1} + \mathbf{u}_{i-1,j+1} - \\
& - 2\mathbf{u}_{i+1,j} - 4\mathbf{u}_{i,j} - 2\mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{u}_{i+1,j-1} + 2\mathbf{u}_{i,j-1} + \mathbf{u}_{i-1,j-1}) / (4h_2^2),
\end{aligned} \tag{6}$$

сеточный оператор дивергенции имеет вид $\nabla_{2h} \cdot : \mathbf{Q}_h^2 \rightarrow \mathbf{V}_h$:

$$(\nabla_{2h} \cdot \boldsymbol{\lambda}_h)_{i,j} = \frac{(\lambda_{i,j}^{11} - \lambda_{i-1,j}^{11} + \lambda_{i,j-1}^{11} - \lambda_{i-1,j-1}^{11})}{2h_1} + \frac{(\lambda_{i,j}^{12} - \lambda_{i,j-1}^{12} + \lambda_{i-1,j}^{12} - \lambda_{i-1,j-1}^{12})}{2h_2}.$$

Второй шаг принимает вид (здесь $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\lambda}_h^n + 2r\nabla_{2h} \mathbf{v}_h^n$)

$$\gamma_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2,j+1/2}}{4(\mu + r)} \begin{cases} 0, & \text{если } \sqrt{(\tau_{i+1/2,j+1/2}^1)^2 + (\tau_{i+1/2,j+1/2}^2)^2} < \tau_s, \\ \left(1 - \frac{\tau_s}{\sqrt{(\tau_{i+1/2,j+1/2}^1)^2 + (\tau_{i+1/2,j+1/2}^2)^2}}\right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

В разделе 2.5 приведены результаты численных экспериментов.

В разделе 2.6 проведено сравнение полученного численного решения в прямоугольной области с теоретическими оценками ⁴ и результатами других авторов, использовавших конечноэлементную дискретизацию.

В главе 3 рассматривается плоская задача. Течение предполагается медленным, поэтому конвективным слагаемым, как правило, пренебрегают. В разделе 3.1 приводится вариационная постановка: найти $\mathbf{v}(t) \in (H_0^1(\Omega))^d$, $d = 2, 3$, такую, что для каждого $t \in (0, T)$ справедливо

$$\begin{aligned}
\rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) dx + \\
+ \sigma_s \int_{\Omega} (|\mathbf{D}(\mathbf{u})| - |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|) dx \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) dx, \\
\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} = \{\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}, \\
\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}(t) = 0 \text{ на } \Gamma.
\end{aligned}$$

Для дискретизации по времени используется неявная схема Эйлера. Пусть $\Delta t > 0$ – постоянный шаг по времени. Положим $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_0$, $\alpha = \frac{\rho}{\Delta t}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(m\Delta t) + \alpha \mathbf{v}^{m-1}$. На каждом временном шаге для $m \geq 1$, находим $\mathbf{v}^m \in \mathbf{U}$, зная \mathbf{v}^{m-1} (далее индекс m опускаем), как точку минимума $J_\alpha(\mathbf{u})$ на \mathbf{U} (задача (P_0)):

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} J_\alpha(\mathbf{u}), \tag{7}$$

⁴П.П. Мосолов, В.П. Мясников

$$J_\alpha(\mathbf{u}) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})| dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx. \quad (8)$$

В разделе 3.2 рассмотрены две внешние аппроксимации для плоской задачи вязкопластичности. Дополнительная сложность, возникающая в плоской задаче, – условие несжимаемости. Для первой внешней аппроксимации вводится семейство конечномерных пространств \mathbf{V}_{1h} – ступенчатых функций вида

$$\mathbf{u}_{1h}(\mathbf{x}) = \sum_{M \in \Omega_h^1} \mathbf{u}_{1h}(M) \theta_h^M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_{2h}(\mathbf{x}) = \sum_{M \in \Omega_h^2} \mathbf{u}_{2h}(M) \theta_h^M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_{ih}(M) \in \mathbb{R},$$

которые дискретно соленоидальны в следующем смысле:

$$\delta_1 q_h \mathbf{u}_{1h}(M) + \delta_2 q_h \mathbf{u}_{2h}(M) = 0 \quad \forall M \in \mathbb{R}_h,$$

определяется форма $\mathbf{a}_h^1 : \mathbf{V}_{1h} \times \mathbf{V}_{1h} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $j_h^1 : \mathbf{V}_{1h} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h^1(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) &= 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} (\delta_i q_h u_{jh} + \delta_j q_h u_{ih}) \right) \left(\frac{1}{2} (\delta_i q_h w_{jh} + \delta_j q_h w_{ih}) \right) dx, \\ j_h^1(\mathbf{u}_h) &= \sigma_s \int_{\Omega} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} (\delta_i q_h u_{jh} + \delta_j q_h u_{ih}) \right)^2} dx \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{1h}. \end{aligned}$$

Для второй внешней аппроксимации вводится семейство конечномерных пространств \mathbf{V}_{2h} – ступенчатых функций вида

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{M \in \Omega_h} \mathbf{u}_h(M) \theta_h^M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_h(M) \in \mathbb{R}.$$

с условием дискретной соленоидальности

$$\tau_1 q_h \mathbf{u}_{1h}(N) + \tau_2 q_h \mathbf{u}_{2h}(N) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{R}_h^3,$$

определяется форма $\mathbf{a}_h^2 : \mathbf{V}_{2h} \times \mathbf{V}_{2h} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $j_h^2 : \mathbf{V}_{2h} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) &= 2\mu \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} (\tau_i q_h u_{jh} + \tau_j q_h u_{ih}) \right) \left(\frac{1}{2} (\tau_i q_h w_{jh} + \tau_j q_h w_{ih}) \right) dx, \\ j_h^2(\mathbf{u}_h) &= \sigma_s \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} (\tau_i q_h u_{jh} + \tau_j q_h u_{ih}) \right)^2} dx \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{2h}. \end{aligned}$$

Для нестационарных задач билинейные формы

$$\mathbf{a}_{\alpha h}^k(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \mathbf{a}_h^k(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + \alpha (q_h \mathbf{u}_h, q_h \mathbf{w}_h)^2.$$

В качестве приближенной будем рассматривать следующую задачу:

$$(P_{0h})_k : \min_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} J_{\alpha h}^k(\mathbf{u}_h), \quad k = 1, 2.$$

$$J_{\alpha h}^k(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} a_{\alpha h}^k(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + j_h^k(\mathbf{u}_h) - \int_{\Omega} \mathbf{f}_h \mathbf{u}_h \, dx, \quad k = 1, 2.$$

Теорема Пусть \mathbf{v}_h^k – решение задачи $(P_{0h})_k$, $k = 1, 2$, \mathbf{v} – решение задачи (P_0) ; если $h \rightarrow 0$, то

$$\{\mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^1, \delta_1 \mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^1, \delta_2 \mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^1\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \partial \mathbf{v} / \partial x_1, \partial \mathbf{v} / \partial x_2\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^6,$$

$$\{\mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^2, \tau_1 \mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^2, \tau_2 \mathbf{q}_h \mathbf{v}_h^2\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \partial \mathbf{v} / \partial x_1, \partial \mathbf{v} / \partial x_2\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^6.$$

В разделе 3.3 рассмотрен алгоритм Узавы. Задаче минимизации функционала (8) эквивалентна задача поиска седловой точки лагранжиана $L : (H_0^1(\Omega))^d \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}, \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^T, |\boldsymbol{\lambda}| \leq 1 \text{ п.в. на } \Omega\},$$

$$L(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} : \mathbf{D}(\mathbf{u}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx.$$

Для нахождения седловой точки применяется алгоритм Узавы. На каждой итерации этого алгоритма первый шаг состоит в минимизации по переменной \mathbf{v}^n , второй шаг – метод проекции градиента для поиска максимума по переменной $\boldsymbol{\lambda}^n$:

Пусть задан произвольный $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \Lambda$;

Для $n = 0, 1, 2, \dots$ с известным $\boldsymbol{\lambda}^n (\in \Lambda)$:

$$1. \text{ Найти } \mathbf{v}^n \quad \begin{cases} \alpha \mathbf{v}^n - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^n) - \sigma_s \nabla \cdot \boldsymbol{\lambda}^n + \nabla p^n = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^n = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{v}^n = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma; \end{cases} \quad (9)$$

$$2. \text{ Вычислить } \boldsymbol{\lambda}^{n+1} = P_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}^n + r\sigma_s \mathbf{D}(\mathbf{v}^n)), \text{ где} \quad (10)$$

$$P_{\Lambda}(\mathbf{q})(x) = \begin{cases} \mathbf{q}(x), & \text{если } |\mathbf{q}(x)| \leq 1, \\ \mathbf{q}(x)/|\mathbf{q}(x)|, & \text{если } |\mathbf{q}(x)| > 1, \end{cases} \forall \mathbf{q} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}.$$

Теорема Предположим, что выполняется условие $0 < r < 4\mu/\sigma_s^2$. Тогда для последовательности $\{\mathbf{v}^n\}$, порождаемой алгоритмом (9)-(10), верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{v}^n = \mathbf{v}$ в $(H_0^1(\Omega))^d$, где \mathbf{v} – решение (7), (8)

Метод Узавы реализован на двух разностных схемах, соответствующих внешним аппроксимациям, предложенным в разделе 3.2. Определим пространства компонент сеточных функций скорости и давления и сеточных тензорных функций для первой разностной схемы:

$$\mathbf{U}_h^0 = \{ \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbf{R}_h^1, \mathbf{u}_{0,j} = \mathbf{u}_{i,N_1-1} = \mathbf{u}_{i,0} = \mathbf{u}_{N_2,j} = \mathbf{0} \},$$

$$\mathbf{V}_h^0 = \{ \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbf{R}_h^2, \mathbf{v}_{0,j} = \mathbf{v}_{i,N_1} = \mathbf{v}_{i,0} = \mathbf{v}_{N_2-1,j} = \mathbf{0} \},$$

$$\mathbf{V}_{1h}^0 = \mathbf{U}_h^0 \times \mathbf{V}_h^0, \quad \mathbf{P}_{1h} = \{ p_{ij} = p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbf{R}_h, \sum_{i,j} p_{ij} = 0 \},$$

$$\mathbf{Q}_{1h} = \{ \mathbf{q}_h \mid \mathbf{q}_h = \{ \mathbf{q}_h^{11}, \mathbf{q}_h^{12}, \mathbf{q}_h^{21}, \mathbf{q}_h^{22} \}; (\mathbf{q}_h^{11})_{i,j} = \mathbf{q}_h^{11}(x_{ij}),$$

$$(\mathbf{q}_h^{22})_{i,j} = \mathbf{q}_h^{22}(x_{ij}), x_{ij} \in \mathbf{R}_h, (\mathbf{q}_h^{12})_{i,j} = \mathbf{q}_h^{12}(x_{ij}), (\mathbf{q}_h^{21})_{i,j} = \mathbf{q}_h^{21}(x_{ij}), x_{ij} \in \mathbf{R}_h^3 \}$$

Через \mathbf{U}_h , \mathbf{V}_h будем обозначать пространства сеточных векторных функций, заданных только во внутренних точках. Определим разностный аналог тензора скоростей деформаций $\mathbf{D}_{1h} : \mathbf{V}_{1h}^0 \rightarrow \mathbf{Q}_{1h}$, оператора градиента $\nabla_{1h} : \mathbf{P}_h \rightarrow \mathbf{U}_h \times \mathbf{V}_h$ и дивергенции $\nabla_{1h} \cdot : \mathbf{V}_{1h}^0 \rightarrow \mathbf{P}_h$, $\nabla_{1h} \cdot : \mathbf{Q}_{1h} \rightarrow \mathbf{U}_h \times \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{1h}^{11}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j})/h_1, & (\mathbf{D}_{1h}^{22}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= (\mathbf{v}_{i,j} - \mathbf{v}_{i,j-1})/h_2, \\ (\mathbf{D}_{1h}^{12}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= (\mathbf{D}_{1h}^{21}(\mathbf{v}_h))_{i,j} = (\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j})/2h_2 + (\mathbf{v}_{i+1,j} - \mathbf{v}_{i,j})/2h_1, \\ (\nabla_{1h} \mathbf{p}_h)_{i,j} &= ((\mathbf{p}_{i+1,j} - \mathbf{p}_{i,j})/h_1, (\mathbf{p}_{i,j+1} - \mathbf{p}_{i,j})/h_2), \\ (\nabla_{1h} \cdot \mathbf{v}_h)_{i,j} &= (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j})/h_1 + (\mathbf{v}_{i,j} - \mathbf{v}_{i,j-1})/h_2, \\ (\nabla_{1h} \cdot \boldsymbol{\tau}_h)_{i,j} &= \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_{i+1,j}^{11} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{11}}{h_1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{12} - \boldsymbol{\tau}_{i,j-1}^{12}}{h_2}, \frac{\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{21} - \boldsymbol{\tau}_{i-1,j}^{21}}{h_1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{22} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{22}}{h_2} \right), \end{aligned}$$

оператору Лапласа $\Delta_{1h} : \mathbf{V}_{1h}^0 \rightarrow \mathbf{U}_h \times \mathbf{V}_{1h}$ соответствует стандартный пятиточечный шаблон «крест» на сетках \mathbf{R}_h^1 и \mathbf{R}_h^2 . Норма тензорной сеточной функции вводится в соответствии с внешней аппроксимацией функционала.

Определим пространства компонент сеточных функций скорости и давления и сеточных тензорных функций для второй разностной схемы:

$$\mathbf{V}_{2h}^0 = \{ \mathbf{v}_{i,j} = (\mathbf{u}(x_{ij}), \mathbf{v}(x_{ij})) \mid x_{ij} \in \mathbf{R}_h, \mathbf{v}_{0,j} = \mathbf{v}_{i,N_2} = \mathbf{v}_{N_1,j} = \mathbf{v}_{i,0} = \mathbf{0} \},$$

$$\mathbf{P}_{2h} = \{ p_{ij} = p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbf{R}_h^3, \sum_{i,j} p_{ij} = 0 \},$$

$$\mathbf{Q}_{2h} = \{ \mathbf{q}_h \mid \mathbf{q}_h = \{ \mathbf{q}_h^{11}, \mathbf{q}_h^{12}, \mathbf{q}_h^{21}, \mathbf{q}_h^{22} \}; (\mathbf{q}_h)_{i,j} = \mathbf{q}_h(x_{ij}), x_{ij} \in \mathbf{R}_h^3 \}.$$

Через \mathbf{V}_{2h} будем обозначать пространства сеточных векторных функций, заданных только во внутренних точках. Определим разностный аналог тензора скоростей деформации $\mathbf{D}_{2h} : \mathbf{V}_{2h}^0 \rightarrow \mathbf{Q}_{2h}$, оператора градиента

$\nabla_{2h} : P_{2h} \rightarrow V_{2h}$ и дивергенции $\nabla_{2h} \cdot : V_{2h}^0 \rightarrow P_{2h}$, $\nabla_{2h} \cdot : Q_{2h} \rightarrow V_{2h}$

$$\begin{aligned} (\nabla_{2h} \cdot \mathbf{v}_h)_{i,j} &= \frac{\mathbf{u}_{i+1,j+1} - \mathbf{u}_{i,j+1} + \mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}}{2h_1} + \frac{\mathbf{v}_{i+1,j+1} - \mathbf{v}_{i+1,j} + \mathbf{v}_{i,j+1} - \mathbf{v}_{i,j}}{2h_2}, \\ (\nabla_{2h} p_h)_{i,j} &= \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_1}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_2} \right), \\ (D_{2h}^{11}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= (\mathbf{u}_{i+1,j+1} - \mathbf{u}_{i,j+1} + \mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j})/2h_1, \\ (D_{2h}^{22}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= (\mathbf{v}_{i+1,j+1} - \mathbf{v}_{i+1,j} + \mathbf{v}_{i,j+1} - \mathbf{v}_{i,j})/2h_2, \\ (D_{2h}^{12}(\mathbf{v}_h))_{i,j} &= \frac{\mathbf{u}_{i+1,j+1} - \mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}}{4h_2} + \frac{\mathbf{v}_{i+1,j+1} - \mathbf{v}_{i,j+1} + \mathbf{v}_{i+1,j} - \mathbf{v}_{i,j}}{4h_1}, \\ (\nabla_{2h} \cdot \boldsymbol{\lambda}_h)_{i,j} &= \left(\frac{\lambda_{i,j}^{11} - \lambda_{i-1,j}^{11} + \lambda_{i,j-1}^{11} - \lambda_{i-1,j-1}^{11}}{2h_1} + \frac{\lambda_{i,j}^{12} - \lambda_{i,j-1}^{12} + \lambda_{i-1,j}^{12} - \lambda_{i-1,j-1}^{12}}{2h_2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_{i,j}^{21} - \lambda_{i-1,j}^{21} + \lambda_{i,j-1}^{21} - \lambda_{i-1,j-1}^{21}}{2h_1} + \frac{\lambda_{i,j}^{22} - \lambda_{i,j-1}^{22} + \lambda_{i-1,j}^{22} - \lambda_{i-1,j-1}^{22}}{2h_2} \right), \end{aligned}$$

оператор Лапласа $\Delta_{2h} : V_{2h}^0 \rightarrow V_{2h}$ определяется шаблоном (6).

В разделе 3.4 рассматривается ALG2, изложенный в предыдущей главе, в применении к плоской задаче вязкопластичности. Введём лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\mu}_h) &= \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 + \mu \|\mathbf{e}_h\|^2 + \sigma_s j_h(\mathbf{e}_h) - (\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h) + \\ &\quad + (\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{e}_h) + r \|\mathbf{D}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{e}_h\|^2, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Теорема Пусть $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ – седловая точка $\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$. Тогда она также является седловой точкой $\mathcal{L}_{r'h}$ для любого $r' \geq 0$ и \mathbf{v}_h – решение задачи (7). Для нахождения седловой точки $\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$ запишем ALG2:

- Пусть заданы произвольные $\boldsymbol{\varepsilon}_h^0, \boldsymbol{\tau}_h^0 \in \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h$;
Для $n = 0, 1, 2, \dots$ с известным $\boldsymbol{\varepsilon}_h^n, \boldsymbol{\tau}_h^n$:
1. Найти $\mathbf{v}_h^{n+1}, p_h^{n+1}$

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{v}_h^{n+1} - r \Delta_h \mathbf{v}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^{n+1} = \nabla_h \cdot (\boldsymbol{\tau}_h^n - 2r \boldsymbol{\varepsilon}_h^n) + \mathbf{f}_h, \\ \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h^{n+1} = 0, \mathbf{v}_h^{n+1}|_\Gamma = 0. \end{cases}$$
 2. Вычислить $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } |\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r \mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1})| < \sigma_s, \\ \left(1 - \frac{\sigma_s}{|\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r \mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1})|}\right) \frac{\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r \mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1})}{2(r+\mu)}, & \text{иначе;} \end{cases}$
 3. Вычислить $\boldsymbol{\tau}_h^{n+1} = \boldsymbol{\tau}_h^n + 2\rho(\mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1})$.
Если $|\boldsymbol{\tau}_h^{n+1} - \boldsymbol{\tau}_h^n| > \varepsilon$, то переходим к 1.

Теорема Пусть $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ – седловая точка \mathcal{L}_{rh} на $V_h \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h$. Если $0 < \rho < r(1 + \sqrt{5})/2$, то имеет место следующая сходимость: $\mathbf{v}_h^n \rightarrow \mathbf{v}_h$ в V_h , $\boldsymbol{\varepsilon}_h^n \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_h$ в \mathbf{Q}_h .

В разделе 3.5 содержатся численные эксперименты. Алгоритмы верифицировались на задачах о течении вязкой жидкости и вязкопластической среды, имеющих аналитические решения. Решена тестовая задача о течении вязкопластической среды в каверне с движущейся крышкой, проведено сравнение с результатами других авторов, использовавших регуляризованные модели и конечноэлементную дискретизацию.

Глава 4 посвящена исследованию трехмерной задачи вязкопластичности. Поскольку при обобщении предложенных разностных схем на пространственный случай вторая разностная схема оказывается более удобной, то именно она была выбрана для численной реализации. В разделе 4.1 приводится вариационная постановка задачи, рассмотрены две внешние аппроксимации, для которых доказана сходимость приближённого решения к точному.

Первый шаг как метода Узавы, так и ALG2 состоит в решении задачи Стокса. Для схемы с неразнесёнными сетками матрица системы, соответствующей дискретной обобщённой задаче Стокса, имеет нетривиальное ядро, причем размер этого ядра не меньше, чем $3n - 2$, где n — число узлов по одному направлению. В разделе 4.2 приводится доказательство этого факта, а также получен явный вид базисных векторов ядра. Из наличия ядра следует, что данная схема не удовлетворяет условию LBB и, следовательно, решение задачи не может быть получено без дополнительных ограничений. В диссертации рассмотрено два подхода к решению этой проблемы. В разделе 4.3 используется техника стабилизации решений, предложен новый тип стабилизации. Обоснование данного метода основывается на понятии «слабого» LBB-неравенства⁵. Для рассматриваемой схемы оно имеет вид

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h d\Omega_h}{\|\mathbf{u}_h\|_{2h}} \geq C_1 \|p_h\|_0 - C_2 h^{\frac{1}{2}} \|[p_h]\|_{\Gamma_h}. \quad (11)$$

На основании (11) с помощью проектора Π строится стабилизирующая добавка к уравнению для давления.

Теорема Для любых $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ и $p_h \in P_h$ существуют $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ и $q_h \in P_h$ такие, что ($C = \text{const}$ не зависит от параметра сетки h)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ p_h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^* & -(I - \Pi)^*(I - \Pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix} \geq C(\|\mathbf{u}_h\|_{2h} + \|p_h\|_0)(\|\mathbf{v}_h\|_{2h} + \|q_h\|_0).$$

В разделе 4.4 исследован подход, основанный на использовании структуры базисных векторов ядра. Показано, что для прямоугольных областей

⁵См. M.D. Gunzburger, P.Bochev (2006)

ядро имеет тензорную структуру, на основе которой предложен быстрый алгоритм построения проекции вектора на линейное пространство, ортогональное ядру. Показано, что рассматриваемая на подпространстве ортогональном ядру матрица, соответствующая задаче Стокса, имеет $(n - 2)^3$ собственных значений, равных 1, и ограниченное спектральное число обусловленности. В разделе 4.5 содержатся результаты численных экспериментов с использованием двух предложенных подходов для задачи Стокса и для задачи о течении среды Бингама, проведено сравнение эффективности.

В пятой главе на основе предложенных разностных схем решены нестационарные задачи. Важной качественной особенностью задач о нестационарном движении вязкопластических сред является конечность промежутка времени затухания движения при отсутствии внешних сил или их уменьшении до величины ниже некоторого порогового значения. Это является принципиальным отличием от соответствующего течения вязкой жидкости, которое затухает экспоненциально за бесконечно большое время. Численно исследованы задачи об установлении и об остановке течения в каналах и каверне. Полученные результаты правильно воспроизводят поведение вязкопластической среды и полностью согласуются с теоретическими оценками.

При решении обнаружены неизвестные ранее качественные особенности нестационарных режимов – появление застойных зон, полностью или частично охватывающих контур границы; при этом застойные зоны выходят за критические кривые, ограничивающие застойные зоны в стационарном случае.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Основной результат

— на основе постановки в виде вариационного неравенства и теории разностных схем разработаны и исследованы новые численные методы решения задач вязкопластичности (среды Бингама). Этот результат состоит в следующем:

- Предложены две разностные схемы для смешанной постановки в переменных «скорость-тензор скоростей деформаций-тензор напряжений», являющиеся обобщением хорошо известных в вычислительной гидродинамике схем на разнесённых (MAC-схема) и полуразнесённых сетках, для задачи о течении в канале, плоской и трёхмерной задач вязкопластичности. На основе теории внешних аппроксимаций обоснована сходимость решения конечномерной задачи к решению непрерывной.
- Разработаны, обоснованы и численно реализованы новые методы решения задачи течения среды Бингама (на основе алгоритма Узавы и ALG2)
- Для схемы на полуразнесённых сетках в трехмерном случае проведено аналитическое исследование ядра дискретного оператора градиента. Предложены, обоснованы и численно реализованы два подхода решения вырожденной задачи Стокса: поиск нормального решения на подпространстве, ортогональном ядру, и стабилизация разностной схемы путём введения дополнительного слагаемого в уравнение несжимаемости.
- На основе разработанных разностных схем проведено численное моделирование нестационарных течений вязкопластической среды для задач течения в каверне и каналах.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Н.Л. Замарашкину за научное руководство и внимание к работе. Автор искренне благодарит проф. В.И. Агошкова, проф. А.В. Лапина, проф. Е.Е. Тыртышникову за ценные советы и поддержку. Автор благодарит проф. А.Е. Алояна, проф. О.Б. Арушаняна, д.ф.-м.н. А.Б. Богатырёва, проф. В.А. Васенина, к.ф.-м.н. И.В. Оселедца, проф. Б.Е. Победрю, к.ф.-м.н. И.А. Султанова, д.ф.-м.н. Н.Г. Яковлева за плодотворные обсуждения и поддержку. Автор выражает глубокую признательность к.ф.-м.н. Л.В. Муравлёвой за постановку ряда проблем, исследованных в диссертации, и всестороннюю поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Муравлёва Е.А. О ядре дискретного оператора градиента // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9, №1. С. 97–104.
2. Муравлёва Е.А. Разностные схемы для расчета течений вязкопластической среды в канале // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. №12. С. 76–88.
3. Муравлёва Е.А. Задача об остановке течения вязкопластической среды в канале // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009. №1. С. 68–71.
4. Муравлёва Е.А., Муравлёва Л.В. Нестационарные течения вязкопластической среды в каналах // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №5. С. 164–188.
5. Muravleva L.V., Muravleva E.A. Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2009. V. 24. №6. P. 543–563.
6. Muravleva E.A., Olshanskii M.A. Two finite-difference schemes for the Bingham cavity flows // Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2008. V. 23. №6. P. 615–634.
7. Муравлёва Л.В., Муравлёва Е.А. Торможение течений вязкопластической среды в каналах // Доклады РАН. 2010. Т. 430. №3. С. 1-4.
8. Oseledets I.V., Muravleva E.A. Fast orthogonalization to the kernel of the discrete gradient operator with application to Stokes problem // Linear Algebra and its Applications. 2010. V. 432. №6. P. 1492-1500.

Изд. лиц. ИД №03991 от 12.02.2001. Компьютерный набор.
Подписано в печать 05.03.2010. Усл. печ. л. 1.1. Тираж 100 экз.

Институт вычислительной математики РАН. 119333, Москва, ул. Губкина, 8.