На правах рукописи

Карасева Ирина Андреевна

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕДУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

Специальность: 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва-2012

Работа выполнена в Национальном исследовательском центре «Курчатовский институт»

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИВМ РАН, Нечепуренко Юрий Михайлович
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики МГУ, Корнев Андрей Алексеевич кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИВМ РАН, Горейнов Сергей Анатольевич
Ведущая организация	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук

Защита состоится "16" марта 2012 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук, расположенном по адресу:
119333, г. Москва, у. Губкина, д.8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институте вычислительной математики Российской академии наук.

Автореферат разослан "15" февраля 2012.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Бочаров Г.А.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

САПР – система автоматизированного проектирования.
RC-схема – схема, содержащая резисторы и конденсаторы.
RCL-схема – схема, содержащая резисторы, конденсаторы и индуктивности.
RCLM-схема – схема, содержащая резисторы, конденсаторы и индуктивности с учетом взаимных индуктивностей.
PACT - Pole Analysis via Congruence Transformations, широко используемый спектральный метод редукции RC-схем, сохраняющий пассивность.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Неидеальность межсоединений в микросхемах оказывает значительное влияние на прохождение сигнала, вызывая задержки, шумы, рассеяние энергии.

Развитие технологии привело к уменьшению размеров конструктивных элементов микросхем, увеличению рабочих частот и увеличению функциональности устройств, а значит и их сложности. С уменьшением размеров возрастает важность учета как емкостных, так и индуктивных влияний фрагментов межсоединений друг на друга. Кроме того, все более важное значение приобретает учет влияния подложки на срабатывание расположенной на ней микросхемы. Таким образом, возрастает важность учета влияния межсоединений и подложки на функционирование схемы.

Электромагнитный анализ, включенный, как этап проектирования, во все современные САПР микроэлектроники, сводит анализ эффектов, вызванных неидеальностью межсоединений, к анализу различных электрических схем.

Методы редукции исходной схеме ставят в соответствие схему с существенно меньшим количеством элементов и, таким образом, позволяют учитывать влияние неидеальности межсоединений за приемлемое время. В прошедшие несколько десятилетий было разработано множество различных алгоритмов редукции как для RC-схем, так и для RCL-схем и RCLM-схем. Однако разработка новых более эффективных алгоритмов продолжает оставаться актуальной задачей.

Редукции позволяют существенно уменьшить размер исходной системы, однако сами редукции достаточно дороги с вычислительной точки зрения. Применение редукции целесообразно, если редуцированная система будет использоваться многократно. К задачам, не требующим многократного решения относиться, в том числе, задача определения времени задержки сигнала. Поэтому разработка новых более эффективных методов быстрого вычисления задержки сигнала является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы. Работа посвящена разработке и исследованию спектрального алгоритма редукции для RCLM-схем и метода быстрого вычисления задержки сигнала для RC-схем.

Научная новизна. Исходная система пассивна, т.е. не генерирует энергию, поэтому одним из главных требований к редукции является сохранение пассивности. Спектральный алгоритм редукции, представленный в диссертации, снабжен эффективными средствами сохранения пассивности. Для RC-схем этот метод подобен хорошо известному методу PACT, основанному на преобразованиях конгруэнтности, и может трактоваться как его обобщение. До настоящего времени не существовало спектральных алгоритмов для RLCM-схем, позволяющих сохранять пассивность, для редукции RCL и RCLM схем применялись другие методы, главным образом технология PRIMA, основанная на аппроксимации в подпространствах Крылова.

Предложенный в диссертации алгоритм быстрого вычисления задержки сигнала основан на приближении входного сигнала несколькими первыми функциями Лагерра, а выход системы находится в виде суммы нескольких функций Лагерра и одного из собственных векторов матричного пучка, отвечающего системе (спектральная коррекция решения). Функции Лагерра хорошо приближают многие актуальные сигналы, используемые в микроэлектронике. Однако для вычисления задержки сигнала они используются впервые.

Методы исследования. Для разработки и обоснования алгоритмов в диссертации используются методы матричного анализа.

Практическая значимость. Алгоритмы представленные в данной работе были протестированы на схемах, взятых из промышленных дизайнов. В частности для метода быстрого вычисления задержки сигнала численные эксперименты проводились с использованием набора состоящего из 35000 тестов. Результаты тестирования показали высокую эффективность обоих алгоритмов и целесообразность их использования в промышленном дизайне микроэлектроники.

Апробация результатов. Основные положения, сформулированные в диссертационной работе, обсуждались на семинарах в ФГБУ науки Институте вычислительной математики РАН, московском отделении Cadence Design Systems, ФГБУ науки Институте проблем проектирования в микроэлектронике, ФГБУ науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, НИЦ "Курчатовский институт", международной конференции "Matrix Methods and Operator Equations" (г. Москва, 2008 год), школе-конференции молодых ученых конференции "Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания" (г. Обнинск, 2011 год).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в четырех печатных работах, две из которых опубликованы в журналах, рекомендованых ВАК.

Личный вклад автора. В работах [1,3], написанных в соавторстве, личный вклад автора в равных долях с соавторами.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, состоящего из 51 наименований. Общий объем составляет 107 страниц, в том числе 23 таблицы и 10 рисунков.

Благодарности. Диссертант выражает особую благодарность своему научному руководителю Юрию Михайловичу Нечепуренко за постоянную помощь и ценные советы в работе над диссертацией. Автор выражает искреннюю благодарность ныне ушедшей из жизни Алене Станиславовне Потягаловой, вместе с которой была начата работа над методом быстрого вычисления задержки сигнала.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и указана практическая значимость и научная новизна работы.

В первой главе предлагается и обосновывается алгоритм спектральной редукции для RCLM схем, позволяющий сохранить пассивность. Такие схемы моделируются системами дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида:

$$E\frac{dx}{dt} + Ax = Bu, \quad y = B^T x. \tag{1}$$

Здесь u означает n_1-компонентный вектор напряжений в портах схемы (вход системы), y – n_1-компонентный вектор токов, втекающих через порты из внешней схемы (выход), а x – n-компонентный вектор внутренних переменных (вектор состояния); A и E – квадратные вещественные матрицы порядка n, а B – прямоугольную матрицу размера $n \times n_1$, имеющие следующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & -I_{n_1} \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} & 0 \\ -A_{13}^T & -A_{23}^T & A_{33} & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 \\ E_{12}^T & E_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{n_1} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} и E_{ij} – матрицы размеров $n_i \times n_j$ и $n_1 + n_2 + n_3 + n_1 = n$, а через I_m здесь и далее обозначена единичная матрица порядка m.

Рассматриваемая система отвечает пассивной, т.е. не генерирующей энергию схеме. Поэтому суммарная энергия, поступившая в систему извне в любой момент времени $\tau \geq 0$, неотрицательная. Иначе говоря, для любой достаточно гладкой функции u

$$\mathcal{E}(\tau) = \int_0^\tau (u(t), y(t))dt \geq 0, \quad \tau \geq 0.$$

Справедливость этого гарантируют следующие свойства матриц A и E:

$$A + A^T \geq 0, \; E = E^T \geq 0,$$

которыми на практике они обладают.

Если существуют преобразования Лапласа управления $\hat{u}(s)$ и состояния $\hat{x}(s)$ системы (1), то они связаны равенством $(A+sE)\hat{x} = B\hat{u}$. Если, кроме того, матричный пучок $A + sE$ – регулярный, то $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$, где

$$G(s) = B^T(A + sE)^{-1}B.$$

Функцию $G(s)$ называют передаточной функцией системы (1).

Алгоритм состоит из трех этапов: предварительных преобразований, блочной диагонализации на основе сбалансированной дихотомии и непосредственно редукции.

`На первом этапе` используя преобразования конгруэнтности, исходная система приводится к эквивалентной системе с новыми матрицами A и E следующего вида

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & V & -I_{n_1} \\ JV^T & F & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2+n_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$F = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ -A_{23}^T & A_{33} \end{bmatrix}, \ V = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}, \ J = \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 \\ 0 & -I_{n_3} \end{bmatrix}.$$

Блоки матриц A_{ij} и E_{ij} отличаются от исходных. Размер системы может, вообще говоря, уменьшится. Полученная система пассивна, а конечный спектр пучка $A + sE$ остается неизменным.

`На втором этапе` выполняется блочная диагонализация. Система полученная после предварительных преобразований приводится к новой системе с теми же матрицами E и B, но новой матрицей A вида

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & V_1 & \dots & V_p & -I_{n_1} \\ J_1 V_1^T & F_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ J_p V_p^T & & & F_p & \\ I_{n_1} & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где

$$F_j = \begin{bmatrix} A_{22}^j & A_{23}^j \\ -A_{23}^{jT} & A_{33}^j \end{bmatrix}, \ V_j = \begin{bmatrix} A_{12}^j & A_{13}^j \end{bmatrix}, \ J_j = \begin{bmatrix} I_{n_2^j} & 0 \\ 0 & -I_{n_3^j} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

блоки A_{kk}^j являются симметричными неотрицательно определенными матрицами и каждый блок с индексами kl имеет размерность $n_k^j \times n_l^j$,

$$n_1^j = n_1, \quad \sum_{j=1}^{p} n_k^j = n_k, \ k = 2, 3.$$

Для новой системы достаточное условие пассивности можно записать как

$$H = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^1 & \dots & A_{12}^p \\ A_{11}^{1T} & A_{22}^1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{12}^{pT} & & & A_{22}^p \end{bmatrix} \geq 0, \ A_{33}^j \geq 0, \ j = 1, ..., p, \quad E_{11} \geq 0.$$

Условие $H \geq 0$ означает, в частности, что все подматрицы $A_{22}^j \geq 0$. Определим для каждой такой подматрицы матрицы $A_{22}^{'j}$, $A_{12}^{'j}$ следующим образом. Если A_{22}^j невырожденная, то $A_{22}^{'j} = A_{22}^j$, $A_{12}^{'j} = A_{12}^j$. В противном случае $A_{22}^{'j}$ – это квадратная невырожденная матрица, входящая в некоторое произвольное (например, спектральное) разложение вида $A_{22}^j = P_j \; diag(A_{22}^{'j}, 0) P_j^T$ с ортогональной матрицей P_j, а $[A_{12}^{'j}, A_{12}^{''j}] = A_{12}^j P_j$, где число столбцов матрицы $A_{12}^{'j}$ совпадает с порядком матрицы $A_{22}^{'j}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть матрицы $A_{12}^{''j}$ нулевые для всех тех j, при которых матрица A_{22}^j вырожденная. Тогда $H \geq 0$ в том, и только том случае, если*

$$\Delta = \sum_{j=0}^{p} \Delta_j \geq 0,$$

где

$$\Delta_0 = A_{11}, \quad \Delta_j = -A_{12}^{'j} (A_{22}^{'j})^{-1} A_{12}^{'jT}.$$

Лемма 1 обосновывает следующее достаточное условие пассивности.

Критерий пассивности 1. Система (1) пассивна, если $A_{33}^j \geq 0$ $(j = 1, ..., p)$, $E_{11} \geq 0$ и выполнены условия леммы 1.

Однако на практике, часто оказываются выполненными более жесткие условия.

Критерий пассивности 2. Система (1) пассивна, если

$$A_{22}^j > 0, \; A_{33}^j \geq 0, \; j = 1, ..., p; \quad \Delta = \sum_{j=0}^{p} \Delta_j \geq 0, \quad E_{11} \geq 0,$$

где

$$\Delta_0 = A_{11}, \quad \Delta_j = -A_{12}^j (A_{22}^j)^{-1} A_{12}^{jT}.$$

Мы будем приводить матрицу A, полученную после предварительных преобразований, к виду (3) преобразованиями подобия, последовательно шаг за шагом увеличивая число блоков p на единицу. Первый шаг состоит в умножении второй блочной строки матрицы A в (2) слева на Y^{-1} и второго блочного столбца справа на Y, где Y – невырожденная матрица порядка $m = n_2 + n_3$ такая, что

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} Y^T J, \; Y^{-1} F Y = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \; J_j = \begin{bmatrix} I_{n_2^j} & 0 \\ 0 & -I_{n_3^j} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

а матрицы F_j удовлетворяют равенству $(JF)^T = FJ$, $(J_jF)^T = FJ_j$, и их спектры являются непересекающимися взаимно дополнительными самосопряженными подмножествами спектра матрицы F.

Затем аналогичному преобразованию, которое в [1,3] было названо сбалансированной дихотомией, подвергаются вторые либо третьи блочные строки и столбцы полученной матрицы. И так далее. Поскольку каждый шаг является преобразованием подобия исходной матрицы A, и не является, вообще говоря, преобразованием конгруэнтности, матрица (3) при $p \geq 2$ может не удовлетворять достаточному условию пассивности $A + A^T \geq 0$. Однако критерий пассивности 1 либо 2, позволяет эффективно следить за выполнением этого условия после каждой дихотомии.

Кроме того, поскольку $Y^{-1} = (Y^TY)^{-1}Y^T$, в качестве меры отклонения очередного преобразования подобия от преобразования конгруэнтности можно рассматривать величину $\nu = \mathrm{cond}_2(Y^TY)$. Сбалансированная дихотомия включает в себя выбор для заданной матрицы F такой матрицы Y, что бы величина ν не превосходила заданной величины. Существование этой матрицы обосновывают следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть F и J – вещественные квадратные матрицы порядка m такие, что*

$$J^T = J, \quad J^2 = I, \quad (JF)^T = JF,$$

Q_1 – вещественная $m \times m_1$ матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в инвариантном подпространстве матрицы F, отвечающем некоторому изолированному самосопряженному подмножеству $\lambda(F)_1$ ее спектра $\lambda(F)$, и Q_2 – вещественная $m \times m_2$ ($m_2 = m - m_1$) матрица, дополняющая Q_1 до ортогональной квадратной. Тогда матрица $Z = [Q_1, JQ_2]$ – невырожденная и справедливы следующие равенства:

$$Z^TJFZ = \begin{bmatrix} Q_1^TJFQ_1 & 0 \\ 0 & Q_2^TFJQ_2 \end{bmatrix}, \quad Z^TJZ = \begin{bmatrix} Q_1^TJQ_1 & 0 \\ 0 & Q_2^TJQ_2 \end{bmatrix},$$

$$(Q_1^TJQ_2)(Q_2^TJQ_1) + (Q_1^TJQ_1)^2 = I_{m_1},$$

$$(Q_2^TJQ_1)(Q_1^TJQ_2) + (Q_2^TJQ_2)^2 = I_{m_2}.$$

Пусть, в условиях леммы 2 $Q_j^T J Q_j = U_j D_j J_j U_j^T$ есть спектральное разложение матрицы $Q_j^T J Q_j$, где D_j – положительная диагональная матрица модулей собственных значений этой матрицы, или, что тоже самое, ее сингулярных чисел, U_j – вещественная ортогональная матрица, а J_j – диагональная матрица состоящая из ± 1, т.е. знаков собственных значений. Отметим, что суммарное количество 1 (-1) в матрицах J_1 и J_2 равно количеству 1 (-1) в матрице J. Рассмотрим матрицу

$$Y = [Y_1, Y_2], \quad Y_1 = Q_1 U_1 D_1^{-1/2}, \quad Y_2 = J Q_2 U_2 D_2^{-1/2}. \tag{6}$$

В диссертации показывается, что эта матрица удовлетворяет (5), а для полученных F_1 и F_2 справедливо $(J_j F)^T = F J_j$.

Лемма 3. *Минимальные диагональные элементы матриц D_1 и D_2 равны между собой и не превосходят единицу, а для матрицы Y справедливо следующее неравенство*

$$\nu = cond_2(Y^T Y) \le \nu_* = d_{min} \left(1 - \sqrt{1 - d_{min}^2}\right)^{-2},$$

где d_{min} – величина этих минимальных диагональных элементов.

В диссертации показано, как выбрать для заданных матриц F и J описанные в лемме 2 матрицы Q_1 и Q_2, оценить величину ν через минимальное сингулярное число матрицы $Q_1^T J Q_1$ либо $Q_2^T J Q_2$ и, если эта величина нас устраивает, выполнить сбалансированную дихотомию.

`Третьим этапом` являться редукция. Редукция производиться на основе редукции передаточной функции. Передаточная функция полученной системы, т.е. системы (1), с матрицей E вида (2) и матрицей A вида (3), представима в виде

$$G(s) = \sum_{j=0}^{p} G_j(s), \tag{7}$$

где

$$G_0(s) = A_{11} + sE_{11}, \quad G_j(s) = -V_j (F_j + sI_{m_j})^{-1} J_j V_j^T.$$

Лемма 4. *Для слагаемых передаточной функции (7) справедливы следующие представления: $G_j(s) = G_{j0} + sG_{j1}(s) = G_{j0} + sG_{j10} + s^2 G_{j11}(s)$, где*

$$G_{j0} = -V_j F_j^{-1} J_j V_j^T, \quad G_{j10} = V_j F_j^{-1} J_j F_j^{-T} V_j^T,$$

$$G_{j1}(s) = V_j(F_j + sI_{m_j})^{-1} J_j F_j^{-T} V_j^T,$$
$$G_{j11}(s) = -V_j F_j^{-1}(F_j + sI_{m_j})^{-1} J_j F_j^{-T} V_j^T.$$

Близость редуцированной системы к исходной оценивается непосредственно по формуле

$$\max \|G(\mathbf{i}\omega) - \tilde{G}(\mathbf{i}\omega)\|_2 / \|G(\mathbf{i}\omega)\|_2, \quad \omega = \omega_k,\ k = 1, ..., q,$$

для заданного набора контрольных частот

$$0 \le \omega_1 < ... < \omega_q = \omega_{max}.$$

Используются следующие варианты редукции:

a) слагаемое $G_j(s)$ отбрасывается полностью,

b) сохраняется нулевой момент G_{j0},

c) сохраняются два первых момента, т.е. $G_{j0} + sG_{j10}$.

Соответствующая редуцированная система получается из исходной отбрасыванием $j+1$-х блочных строк и столбцов матриц A и E и $j+1$-й блочной строки матрицы B. При сохранении нулевого момента, помимо этого меняется матрица A_{11}: $A_{11}^{new} = A_{11} + G_{j0}$, а при сохранении еще и первого момента меняется также и матрица E_{11}: $E_{11}^{new} = E_{11} + G_{j10}$. Для того, чтобы редуцированная система продолжала удовлетворять критерию пассивности 1 либо 2 надо, что бы $\Delta^{new} \ge 0$, где $\Delta^{new} = \Delta - \Delta_j$ в случае полного отбрасывания слагаемого $G_j(s)$ и $\Delta^{new} = \Delta - \Delta_j + G_{j0}$ в случае сохранения нулевого момента. Кроме того, при сохранении первого момента необходимо убедиться, что $E_{11}^{new} \ge 0$.

После редукции для уменьшения числа ненулевых элементов можно выполнить блочную диагонализацию (уже не обращая внимание на критерий пассивности) тех блоков, которые не удалось разбить с сохранением выполнения критерия пассивности.

Предложенный алгоритм был протестирован на RCL и RCLM схемах из промышленного дизайна. Порядок матриц от 41 до 142. Результаты экспериментов представлены в таблицах. В таблице 1 представлено количество резисторов (R), конденсаторов (C), индуктивностей (L), взаимных индуктивностей (M), размеры исходных (n_i) и редуцированных матриц (n_r), а также отношение размера редуцированных матриц к исходным.

Таблица 1. Порядок исходных и редуцированных матриц

Тест	R	C	L	M	n_i	n_r	n_r/n_i
1	32	15	13	–	41	6	0.15
2	141	48	46	–	142	12	0.08
3	95	48	46	–	142	15	0.10
4	500	1070	41	610	141	9	0.06

Таблица 2 для каждого теста показывает качество редукции. А именно количество ненулевых элементов исходных матриц (N_i), количество ненулевых элементов редуцированных матриц (N_r), а так же отношение количества ненулевых элементов исходных матриц к ненулевым элементам редуцированных матриц. Кроме того в 5-й колонке представлена погрешность редукции.

Таблица 2. Качество редукции

Тест	N_i	N_r	N_r/N_i	Погрешность редукции
1	142	26	0.18	0.042
2	517	56	0.1	0.069
3	420	57	0.14	0.068
4	4677	54	0.01	0.047

Из таблицы 1 видно, что предложенный алгоритм редукции позволяет существенно уменьшить размер системы и, как показано в таблице 2, при этом количество ненулевых элементов значительно сокращается. Отдельно стоит выделить RCLM-схему, которая имеет намного больше ненулевых элементов. Поэтому отношение количества ненулевых элементов исходных матриц к ненулевым элементам редуцированных матриц значительно меньше, и равно 0.01, в то время как для RCL-схем, представленных в таблицах, эта цифра варьируется от 0.1 до 0.18.

Во второй главе предлагается метод быстрого вычисления задержки сигнала. Рассматриваются RC-схемы с n_1-м портовым узлом и n_2-я внутренними узлами, из которых только один является выходом. Моделирование таких RC-схем на основе законов Ома и Кирхгофа приводит к линейной системе обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида:

$$E\frac{dx}{dt} + Ax = Bu_{in}, \quad u_{out} = Cx, \tag{8}$$

с начальным условием

$$x_2(0) = 0, \tag{9}$$

где $x = (x_1^T, x_2^T, x_3^T)^T$ – n-компонентный вектор, $x_1 = u_{in}$, x_2 – n_2-компонентный вектор напряжений во внутренних узлах, x_3 – n_1–компонентный вектор токов, вытекающих из портовых узлов, и $n = 2n_1 + n_2$. Задержка определяется как разность времени, за которое напряжение, поданное на вход, достигает определенного значения, и времени, за которое напряжение на выходе достигает того же значения. Таким образом, для приближенного вычисления задержки сигнала для заданного входного сигнала $u_{in}(t)$, необходимо найти приближенное значение $u_{out}(t)$ при $t \geq T_{max}$, где T_{max} некоторое заданное время.

`На первом этапе` ищем решение, удовлетворяющее только (8). Для этого мы приближаем u_{in} несколькими функциями Лагерра:

$$u_{in}(t) \approx \tilde{u}_{in}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i F_i^p(t),$$

где

$$F_i^p(t) = \sqrt{2p}e^{-pt}L_i(2pt), \; a_i = \int_0^\infty u_{in}F_i^p(t)dt, \; L_i(t) = \frac{e^t}{i!}\frac{d^i}{dt^i}(t^i e^{-t}).$$

Здесь $F_i^p(t)$ - i-я функция Лагерра, $L_i(t)$ - полином Лагерра i-й степени, a_i - вектор коэффициентов. Затем ищем приближение вектора x в следующем виде:

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i F_i^p(t),$$

где c_i некоторые неизвестные векторы коэффициентов. Таким образом, вычисление $\tilde{u}_{out} = C\tilde{x}$ сводится к вычислению векторов c_i. Для того чтобы вычислить c_i подставляем $\tilde{u}_{in}$, $\tilde{x}$ и $d\tilde{x}/dt$ в (8) и приравниваем слагаемые при одинаковых функциях Лагерра. Для вычисления производной функции Лагерра используем следующие равенства:

$$\frac{dF_0^p(t)}{dt} = -pF_0^p(t), \quad \frac{dF_i^p(t)}{dt} = -pF_i^p(t) + 2p\sum_{j=1}^{i} b_j^i F_{i-j}^p(t), \quad i \geq 1,$$

где b_j^i – числовые коэффициенты, которые можно найти, используя явный вид функций Лагерра. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} A-pE & 2pb_1^1E & \dots & 2pb_{k-2}^{k-2}E & 2pb_{k-1}^{k-1}E \\ 0 & A-pE & \dots & 2pb_{k-3}^{k-2}E & 2pb_{k-2}^{k-1}E \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A-pE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ba_0 \\ Ba_1 \\ \dots \\ Ba_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Найденное приближенное решение удовлетворяет (8), но, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (9).

`На втором этапе` выполняется **спектральная коррекция решения**. К полученному решению добавляется решение однородной системы уравнений

$$E\frac{dx}{dt} + Ax = 0$$

с начальным условием $x_2(0) = -\tilde{x}_2(0)$. Известно, что решение этой системы можно представить в виде суммы решений вида

$$d_i e^{\lambda_i t} z_i,$$

где λ_i – конечное собственное значение пучка $\lambda E + A$, z_i – собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, а d_i – числовой коэффициент.

Как показывают численные эксперименты, для хорошего приближения u_{out} достаточно потребовать, что бы $\tilde{u}_{out}(0) = 0$. Для этого достаточно использовать только одно из решений, отвечающее минимальному собственному значению λ_{min} пучка $\lambda E + A$. Добавляя это решение, к полученному ранее приближенному решению, получим:

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i F_i^p(t) + de^{\lambda_{min} t} z_{min},$$

где

$$d = -\sum_{i=0}^{k-1} Cc_i F_i^p(0).$$

Предложенный метод был использован для быстрого вычисления задержки сигнала для `частного случая`, когда на один из портов подавалось напряжение, которое растет линейно от 0 до 1 вольта за время T и далее не меняется.

Для быстрого вычисления задержки, u_{in} приближался двумя функциями Лагерра.

Приближение выходного сигнала двумя функциями Лагерра не позволяет гарантировать хорошее приближение задержки сигнала для всех схем. Однако были предложены критерии, позволяющие определить, будет ли гарантированно хорошее приближение для каждой из схем:

Критерий 1: $s < T_h$, где s обратная величина максимального собственного значения λ_{max} пучка $A + \lambda E$, взятая с противоположным знаком, т.е. $s = -1/\lambda_{max}$.

Критерий 2: $RC_{tot} < T_h$, величина $RC_{tot} = (\sum R_i)(\sum C_i)$, равная произведению суммы всех сопротивлений резисторов на сумму емкостей всех конденсаторов схемы.

Здесь T_h задается пользователем. Схемы, удовлетворяющие критерию 1 или критерию 2, отвечают схемам с небольшой задержкой сигнала.

Для сигналов, которые достигают 1 вольта за время $T = 100$, 200 и 400 пикосекунд были проведены численные эксперименты при помощи набора, состоящего из 35000 схем из промышленных дизайнов. Из этого набора выбирались схемы для дальнейшего исследования при помощи одного из двух описанных выше критериев. Если схема удовлетворяла выбранному критерию, то для него вычислялось $\tilde{u}_{out}$, приближенное и точное время задержки и погрешность. В противном случае схема отбрасывалась.

Был проведен ряд численных экспериментов с использованием s-критерия. В таблице 3 показано количество схем, удовлетворявших условию $s < T_h$, максимальная точная задержка сигнала T_{del}^{max}, максимальная и средняя погрешности, а так же дисперсия, которая вычислялась по формуле

$$\frac{1}{n_t - 1}\sum_{i=1}^{n_t}(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_i)^2,$$

где $\bar{\varepsilon}$ – среднее значение погрешности, а n_t – количество отобранных схем.

Также был проведен ряд численных экспериментов с использованием RC_{tot}-критерия. Результаты представлены в таблице 4, где в третьем столбце указано количество схем, удовлетворяющих условию

Таблица 3. Результаты использования критерия 1

T	$T_h \times 10^{11}$	отобранных схем	T_{del}^{max}	максимальная погрешность	средняя погрешность	дисперсия
100	2	23572	27	2	0.0611	0.0593
200	2	23572	27	1	0.0302	0.0293
400	2	23572	27	1	0.0080	0.0079
100	1	18416	14	1	0.0252	0.0246
200	1	18416	13	1	0.0137	0.0135
400	1	18416	14	1	0.0050	0.0050

$RC_{tot} < T_h$.

Таблица 4. Результаты использования критерия 2

T	$T_h \times 10^{11}$	отобранных схем	T_{del}^{max}	максимальная погрешность	средняя погрешность	дисперсия
100	10	21769	53	2	0.0446	0.0428
200	10	21769	57	4	0.0309	0.0328
400	10	21769	57	1	0.0092	0.0091
100	7	19375	41	1	0.0287	0.0639
200	7	19375	43	1	0.0199	0.0288
400	7	19375	42	1	0.0078	0.0078
100	5	17137	29	1	0.0239	0.0233
200	5	17137	29	1	0.0172	0.0169
400	5	17137	29	1	0.0061	0.0060

Как видно из таблиц 3 и 4, оба критерия дают хорошие результаты, однако комбинация этих двух критериев позволяет добиться увеличения количества отобранных схем, т.е. тех, для которых возможно успешное применение предложенного метода.

Критерий 3: $s < T_{h_1}$ или $RC_{tot} < T_{h_2}$.

В таблице 5 представлены результаты для схем, удовлетворяющих $s < 1 \times 10^{-11}$ или $RC_{tot} < 7 \times 10^{-11}$. Количество отобранных схем увеличилось до 20903. В то же время, использование первого критерия позволяло отобрать лишь 18416, а второго – 19375 схем.

Таблица 5. Результаты применения критерия 3

T	отобранных схем	T_{del}^{max}	максимальная погрешность	средняя погрешность	дисперсия
100	20903	41	1	0.0303	0.0294
200	20903	43	1	0.0197	0.0193
400	20903	42	1	0.0079	0.0079

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет быстро обработать около 59% тестов из представленного набора. Для остальных схем можно использовать другие методы. В результате общее время обработки всего набора уменьшается.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Впервые предложен и реализован алгоритм спектральной редукции для RCLM-схем, позволяющий сохранить пассивность. Выполнены численные эксперименты с тестами из промышленных дизайнов, показавшие его высокую эффективность.
2. Обоснованы преобразования, используемые в этом алгоритме. Доказано сохранение пассивности.
3. Предложен метод быстрого вычисления задержки сигнала в RC-схемах на основе приближения входного и выходного сигналов функциями Лагерра и спектральной коррекции решения. Выполнены численные эксперименты с 35000 тестами из промышленных дизайнов, показавшие его высокую эффективность.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях рекомендованных ВАК РФ:
1. **I.A. Karaseva, Yu.M. Nechepurenko, A.S. Potyagalova.** Spectral reduction for control systems modeling passive integrated circuits // Comp. Maths. Math. Phys.. 2008. V.48, N.5. P.746-762.
2. **I.A. Karaseva.** Fast calculation of signal delay in RC-circuits based on Laguerre functions // Russ. J. Numer. Anal. Mach. Modeling. 2011. V.26, N.3. P.295-301.
Статьи в материалах конференций:
3. **Yu.M. Nechepurenko, A.S. Potyagalova, I.A. Karaseva.** Spectral model order reduction preserving passivity for large multiport RCLM networks // in Matrix methods: theory, algorithms, applications / Ed by Vadim Olshevsky and Eugene Tyrtyshnikov. New Jersey. London: World Scientific Publishing. 2010. P.533-538.
4. **И.А. Карасева.** Быстрое вычисление задержки сигнала в RC-схемах на основе функций Лагерра // V Международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания". Научная школа-конференция молодых исследователей: Тез. докладов / Под общей ред. В.А. Галкина. Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ. 2011. С.21-22.