

На правах рукописи

ГРИЦУН Андрей Сергеевич

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ АТМОСФЕРНОЙ
ЦИРКУЛЯЦИИ К МАЛЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ**

Специальность 25.00.29 – Физика атмосферы и гидросферы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

г. Москва, 2011 г.

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН

Научный консультант доктор физико-математических наук,
академик РАН Дымников В.П.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
Курганский М.В.

доктор физико-математических наук,
профессор Малинецкий Г.Г.

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН Мареев Е.А.

Ведущая организация: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится 29 июня 2011 года в 15:00 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан “___” _____ 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Бочаров Г.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из наиболее важных проблем, стоящих перед наукой в XXI столетии, является проблема предсказания климатических изменений, вызываемых человеческой деятельностью. В качестве антропогенных воздействий на **климатическую систему (КС)** можно рассматривать сжигание ископаемого топлива, приводящее к изменению концентрации углекислого газа в атмосфере, изменение концентрации малых газовых примесей, контролирующих концентрацию озона в атмосфере, вырубку лесов, приводящую к изменению альбедо и процессу опустынивания, и многие другие воздействия. Специфические особенности КС как физического объекта не позволяют решать эту проблему традиционным для физики методом - целенаправленным физическим экспериментом или лабораторным моделированием. Поэтому главным инструментом исследования этой проблемы в последнее десятилетие является численное моделирование - проведение численных экспериментов с глобальными климатическими моделями и моделями **общей циркуляции атмосферы (ОЦА)**. В ходе таких экспериментов задается некоторый сценарий воздействия на систему (размер антропогенных выбросов) и проводится расчет траектории численной модели на рассматриваемый промежуток времени (100-300 лет) (IPCC, 2007). Изменение средних характеристик решения (средней температуры поверхности, осадков и т.п.) по сравнению с современным состоянием служит оценкой возможных изменений реального климата в случае реализации выбранного сценария антропогенного воздействия на систему. Следует отметить, что важной частью задачи об изменении климата является проблема изменения локальных (региональных) характеристик циркуляции. Региональные изменения климата могут значительно (в несколько раз) превосходить по величине изменения их глобальных аналогов (например, рост средней за зимний сезон температуры поверхности в восточносибирском регионе России при увеличении концентрации углекислого газа в атмосфере) и быть следствием возможных изменений мод (режимов) циркуляции (IPCC, 2007). Таким образом, задача об изменениях климата (глобальных или региональных) решается как задача о чувствительности статистических характеристик решений систем уравнений, описывающих динамику реальной КС с той или иной точностью.

Понятие «климат» определяется как набор состояний, проходимых траекторией системы за достаточно продолжительный интервал времени (30 и более лет). Поэтому, с математической точки зрения задача о чувствительности климата есть, по сути, задача о чувствительности аттрактора КС (множества, на котором происходит эволюция системы) и ее инвариантной меры (равновесного распределения состояний системы на аттракторе) к изменениям параметров системы (Дымников, Филатов, 1994; Дымников, Грицун, 2005). Аттракторы типичных климатических (атмосферных) систем обладают рядом свойств, которые необходимо учитывать при их анализе. Во-первых,

рассматриваемые системы диссипативны (дивергенция правой части моделей отрицательна и полный фазовый объем сжимается). Во-вторых, типичные атмосферные модели обладают свойством хаотичности (некоторые показатели Ляпунова системы положительны и траектории системы чувствительны к малым изменениям начальных условий, имеет место рост фазового объема вдоль неустойчивых направлений, отвечающих положительным показателям). При этих условиях эволюция системы происходит на множестве фрактальной топологической структуры, другими словами аттрактор типичной атмосферной системы фрактален (Дымников, Филатов, 1994; Дымников, Грицун, 2005). Характерным примером такого поведения траекторий является знаменитая система Лоренца. Однако, в отличие от системы Лоренца, атмосферные системы многомерны и структура их аттракторов еще более нетривиальна. Этот факт чрезвычайно усложняет анализ динамики системы на аттракторе методами теории динамических систем (таких как использование марковских разбиений, методов символической динамики и т.п.), так что единственным доступным методом исследования аттракторов многомерных климатических моделей являются численные методы и эксперименты. Примером такого исследования служат расчеты глобальных ляпуновских показателей (меры неустойчивости траектории системы на аттракторе) и размерности аттрактора системы (меры сложности ее динамики) (Дымников, Грицун, 1996А; Дымников, Грицун, 1996Б), приведенные в **первой главе** работы. Возможным способом описания фрактального аттрактора системы может быть его аппроксимация при помощи некоторых простых базовых множеств, таких как периодические орбиты. Идея этого подхода базируется на результатах теории динамических систем о возможности построения инвариантной меры системы с помощью ее периодических траекторий (Bowen, 1971; Auerbach et al., 1987; Ruelle, 1999). При этом статистические характеристики системы вычисляются с помощью взвешенных осреднений по соответствующим характеристикам орбит, а весовые коэффициенты определяются через характеристики неустойчивости орбит, используемых при осреднении (Ruelle, 1999). В результате использования данного подхода можно с хорошей точностью аппроксимировать как отдельные статистические характеристики (среднее состояние, дисперсию, моды изменчивости), так и саму инвариантную меру рассматриваемой системы. Для так называемых гиперболических систем получено строгое обоснование этого подхода (Ruelle, 1999). В случае моделей динамики атмосферы доказательного обоснования метода не существует, однако в ряде работ (Gallavotti, 1988) высказывается предположение, что при вычислении макроскопических характеристик хаотической системы с большим числом степеней свободы ее можно считать гиперболической (т.н. «хаотическая гипотеза»). Применительно к моделям динамики атмосферы задача поиска периодических траекторий нетривиальна, поскольку сводится к решению сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений высокой размерности (равной размерности фазового пространства системы) с плохим начальным условием. Последовательное решение таких проблем, как существование периодических решений в фазовом пространстве

атмосферных моделей, наличие связей между характерными режимами циркуляции и свойствами фазового пространства моделей, возможность аппроксимации циркуляции с помощью периодических движений проводится **во второй главе** работы на примере моделей крупномасштабной динамики атмосферы (Gritsun, 2008; Грицун, 2010;2011).

Основная задача настоящей работы – разработка новых методов исследования чувствительности моделей ОЦА и реальной КС к малым внешним воздействиям. В силу сказанного выше, математически эта задача может быть сформулирована как задача чувствительности аттрактора рассматриваемой системы и равновесного распределения состояний на нем по отношению к изменению параметров системы (Дымников, Филатов, 1994). Теорема существования линейного оператора отклика (оператора связывающего изменение статистических характеристик системы с изменениями параметров, входящих в ее уравнения) гарантируется лишь для достаточно гладких гиперболических систем (Ruelle, 1999). В общем случае оператор отклика может не существовать (система испытывает локальную или глобальную бифуркацию при данном значении параметра) или быть нелинейным. В тоже время, с физической точки зрения можно ожидать, что система с большим числом независимых степеней свободы устойчива по отношению к малым внешним воздействиям. Это имеет место, когда глобальных бифуркаций в системе не происходит (локальные бифуркации (разрушение локальных режимов циркуляции) не оказывают заметного влияния при вычислении глобальных статистических характеристик системы).

Если уравнения динамики системы известны (как в случае, когда рассматривается модель атмосферы или климата), то задача определения оператора отклика может быть решена практически с помощью прямых численных экспериментов. Действительно, изменив на малую величину рассматриваемый параметр системы и проинтегрировав систему численно на длительный срок можно определить ее новые статистические характеристики, а также отклик системы на данное воздействие. Проведя подобные численные эксперименты для всех возможных наборов параметров (всех возможных значений внешнего воздействия), можно определить оператор отклика системы – оператор связывающий изменение статистических характеристик системы с изменениями параметров, входящих в уравнения системы. Зная оператор отклика можно решить ряд важных обратных задач - построить воздействие на систему, вызывающее ее наибольший отклик (вычислив сингулярное разложение соответствующего оператора отклика) или воздействие, вызывающее заданный отклик системы (обратив оператор отклика). Следует отметить, что для современных моделей ОЦА такой подход невозможен с практической точки зрения (размерность фазового пространства таких систем составляет величину порядка миллиона).

Аппроксимация динамики системы ее периодическими траекториями также предоставляет потенциальную возможность построения приближенных операторов отклика локальных и глобальных статистических характеристик системы на малые внешние воздействия (здесь снова используются аргументы «хаотической гипотезы»

(Gallavotti, 1998)). В случае, когда инвариантная мера определяется небольшим числом слабо неустойчивых орбит, этот подход может быть значительно эффективней прямого метода. Кроме того, с его помощью решается задача исследования локального отклика системы на заданное внешнее воздействие. В **третьей главе** настоящей работы данный метод построения оператора отклика рассматривается на примере баротропной модели атмосферы. Показано, что с помощью подходящего выбора весовых функций орбит, используемых при вычислении средних, удастся воспроизвести оператор отклика системы на малые внешние воздействия с хорошей точностью (Gritsun, 2008). Как уже отмечалось, задача поиска периодических орбит для моделей атмосферы нетривиальна (прежде всего, с вычислительной точки зрения). Поэтому в настоящее время реализация описанного выше подхода возможна лишь для моделей крупномасштабной динамики атмосферы достаточно невысокой размерности.

Перспективным альтернативным подходом является методика построения приближенного оператора отклика, основанная на применении **флуктуационно-диссипационных соотношений** (ФДС). Используя идею Зеемана (Zeeman, 1987) о стохастизации (добавлении малого случайного шума в правую часть системы) исходной системы, для равновесного распределения точек на аттракторе системы можно выписать уравнение Фоккера-Планка (Risken, 1994), для стационарного решения которого справедливы обобщенные ФДС (Dekker, Naake, 1975). Эти соотношения связывают оператор отклика модели на малые внешние воздействия с ее статистическими характеристиками и могут быть использованы при построении оператора отклика. При практической реализации метода удобно использовать предположение о квази-нормальности равновесного распределения системы. В этом случае технология построения оператора отклика становится особенно эффективной и использует исключительно данные моделирования. Требование квази-нормальности инвариантной меры системы сужает область применимости метода, однако, для систем с большим числом степеней свободы это, по-видимому, не является сильным ограничением (квази-нормальность достигается здесь за счет центральной предельной теоремы) (Дымников, Грицун, 2005; Dymnikov, Gritsun 2002; Majda et.al., 2005). В **третьей главе** работы данный метод построения приближенного оператора отклика применяется для моделей крупномасштабной динамики атмосферы – баротропной и двухслойной бароклининой (Дымников, Грицун, 1999; Gritsun, 2001). В частности показано, что модели удовлетворяют требованиям применимости метода с достаточной точностью, и что с помощью данного метода удастся приблизить операторы отклика моделей с точностью порядка 90-95% (для значений корреляций между ведущими сингулярными векторами рассматриваемых операторов). Отметим в заключение, что если рассматриваемая система не удовлетворяют требованию квази-нормальности, то ее оператор отклика можно эффективно приблизить как методом, основанным на использовании периодических траекторий (Kazantsev, 2001; Gritsun, 2008), так и гибридным методом (Abramov, Majda, 2007) (когда для коротких времен отклик системы вычисляется напрямую, и затем используется методика, использующая ФДС).

Как уже отмечалось, важная характерная особенность методов, основанных на ФДС, заключается в том, что они не требуют знания оператора системы. Это особенно важно для построения оценок чувствительности реальной КС. Действительно, при исследовании проблемы чувствительности реальной КС к антропогенным воздействиям с помощью численного моделирования возникает один очень важный вопрос, а именно, каким условиям должна удовлетворять климатическая модель, чтобы ее чувствительность по отношению к внешним воздействиям была близка к чувствительности реальной КС? Качество модели оценивается, как правило, по тому, как модель воспроизводит некоторые базовые средние характеристики современного климата. Постоянное увеличение пространственного разрешения моделей, включение описания новых физических явления, улучшение существующих параметризаций физических процессов позволяют улучшить качество современных моделей при описании наблюдаемого климата (см. Дымников и др., 2005). Однако достаточно ли этого, чтобы правильно воспроизвести чувствительность реальной КС к внешним воздействиям, таким как изменение углекислого газа? При построении моделей климата используется большое число упрощений и параметризаций физических процессов, так что реальная динамика климата отличается от модельной динамики. Некоторые параметризации, при этом, оказывают значительное влияние на чувствительность системы по отношению к внешним воздействиям. Так, например, параметризации облачности, мелкой конвекции и влияния аэрозолей на облачность в значительной степени определяют величину отклика системы на изменение концентрации углекислого газа. В результате, современная оценка чувствительности климата при удвоении углекислого газа по данным моделей ИРСС допускает значительный разброс и находится в диапазоне 2-4.5 градуса (в зависимости от того, какие именно параметризации используются в конкретной модели), при этом все используемые в расчетах ИРСС модели адекватно воспроизводят современный климат. Отметим также тот факт, что нет никакой гарантии того, что современные модели учитывают все основные факторы, ответственные за чувствительность системы по отношению к изменению малых газовых примесей в атмосфере (или к каким-то другим, внешним воздействиям на систему антропогенного или естественного характера). Поэтому вопрос о построении доказательной оценки чувствительности КС к внешним воздействиям не решается экспериментами с численными моделями. В этом смысле применение методики построения приближенного оператора отклика, основанной на применении ФДС и использующей лишь статистические характеристики самой системы, приобретает особое значение. Тем самым появляется основание надеяться на то, что чувствительность определённых характеристик реальной КС к изменению внешних параметров может быть оценена непосредственно по данным наблюдений, без использования каких-либо упрощений и предположений о физических процессах, ее определяющих.

Технология построения приближенного оператора отклика по данным моделирования предполагает вычисление многомерных ковариационных матриц

системы и их последующее обращение. Данная процедура требует высокой точности определения ковариационных матриц и представляет собой сложную вычислительную задачу. В четвертой главе работы приводятся результаты реализации данного подхода для моделей ОЦА (Дымников, Грицун, 2005; Gritsun, Branstator, 2007; Gritsun et.al., 2008; Грицун, 2010), таких как модели ССМ0 (Pitcher et.al., 1982) и САМ3 (Collins et.al., 2006) Национального Центра атмосферных исследований США и А4521 ИВМ РАН (Алексеев и др., 1998), а также и климатических данных NCEP/NCAR (Kalney et.al., 1996). Используя построенные операторы отклика, удастся решить ряд таких важных физических проблем как, например построение воздействий вызывающих наибольшие изменения амплитуды синоптических вихрей в северной Атлантике, идентификация зон возбуждения Северо-Атлантической моды изменчивости в атмосфере и т.д.

Цели работы

Построение новых конструктивных методов исследования локальных и глобальных характеристик аттракторов сложных моделей динамики атмосферы и их чувствительности к малым внешним воздействиям, пригодных для анализа современных моделей общей циркуляции атмосферы и реальной климатической системы. Решение актуальных задач теории климата с помощью построенных методов.

Методы исследований

В работе используется ряд численных методов теории динамических систем и вычислительной математики применяемый для исследования атмосферных и климатических систем различной сложности.

Для оценки характеристик неустойчивости траекторий моделей используется метод расчета ляпуновских показателей, основанный на теореме В.И. Оселедеца. Основным методом исследования структуры аттрактора моделей динамики атмосферы являются в использовании неустойчивых периодических траекторий системы для аппроксимации ее аттрактора и инвариантной меры. С помощью такой аппроксимации становится возможным связать характеристики динамических и квазистационарных режимов циркуляции системы с показателями неустойчивости соответствующих периодических (или стационарных) решений и построить приближенный оператор отклика статистических характеристик системы на малые внешние воздействия. Для нахождения периодических и стационарных решений приходится решать сильно нелинейную систему уравнений (по отношению к периоду и начальному условию искомой орбиты), при этом используется весь спектр современных численных методов, включая различные обобщения метода Ньютона и различные методы минимизации функционала невязки.

Основу метода исследования чувствительности атмосферной циркуляции к малым внешним воздействиям составляет применение теории ФДС. Данный подход в настоящее время пользуется все большей популярностью в мировой науке. Например, в работах (Ring, Plumb, 2008; Langen, Alexeev, 2005; Gritsun, Branstator, 2007, Gritsun et.al,

2008) он был успешно использован для построения операторов отклика на малые внешние воздействия для различных атмосферных и климатических систем. Для верификации полученных результатов используются стандартные методы оценки чувствительности атмосферной циркуляции к малым внешним воздействиям – прямые численные эксперименты с моделями атмосферы и климата.

В качестве объекта исследований использовались модели атмосферы различной степени сложности. Процедура нахождения периодических траекторий и аппроксимации аттрактора системы найденными орбитами была реализована для баротропной модели спектрального разрешения T12 и T21. Модель описывает основные статистические характеристики крупномасштабной компоненты реальной атмосферой циркуляции с достаточной точностью и в тоже время допускает проведение сложных вычислительных расчетов связанных с поиском неустойчивых периодических траекторий. Двухслойная квазигеострофическая модель разрешения T21 является промежуточным звеном между баротропной моделью и моделями общей циркуляции атмосферы. Основные численные эксперименты по построению приближенных операторов отклика с помощью ФДС проводились для модели общей циркуляции атмосферы разработанной в ИВМ РАН и для моделей атмосферы Национального центра атмосферных исследований США CCM0 и CAM3.

Реализация методов построения операторов отклика и других, заявленных в работе задач, была осуществлена в виде программных комплексов на языке FORTRAN для современных вычислительных систем с использованием технологий параллельного программирования (технология MPI и т.п.).

Научная новизна

Разработан комплекс новых методов исследования атмосферной циркуляции и ее чувствительности к малым внешним воздействиям, с помощью которого решен ряд важных практических проблем. В том числе:

1. Предложен и численно реализован метод исследования локальной структуры аттракторов моделей атмосферной циркуляции основанный на аппроксимации распределения плотности вероятности периодическими орбитами. Показано наличие связи между ведущими модами изменчивости системы и периодическими орбитами, выявлены слабо неустойчивые «невидимые» части аттрактора. Для класса атмосферных моделей установлено свойство парной симметрии показателей Ляпунова.
2. Для систем уравнений, описывающих крупномасштабную динамику атмосферной циркуляции, разработаны и исследованы различные методы построения операторов отклика их статистических характеристик на малые внешние воздействия – методы, основанные на использовании ФДС и неустойчивых периодических траекторий.
3. Разработана эффективная вычислительная технология реализации методов исследования чувствительности локальных и глобальных статистических характеристик моделей ОЦА и реальной климатической системы. С помощью

численных экспериментов с моделями атмосферы показана ее высокая эффективность при решении прямых и обратных задач.

4. С помощью построенных методов решены важные физические задачи: изучена природа 25-ти дневной моды изменчивости атмосферы, исследованы механизмы возбуждения Североатлантической моды изменчивости и синоптической изменчивости в Северной Атлантике из тропиков, построено оптимальное воздействие для возбуждения **Арктической осцилляции (АО)** в модели ИВМ РАН и по данным наблюдений и подтверждена гипотеза об оптимальности возбуждения АО из нижней стратосферы полярных широт. Сформулирован необходимый критерий качества моделей атмосферы при их использовании для оценок чувствительности реальной климатической системы.

Научная и практическая значимость

С помощью разработанной технологии решается ряд практических задач:

1. Исследование устойчивости и предсказуемости локальных (региональных) свойств моделей крупномасштабной динамики атмосферы: классификация динамических режимов циркуляции в моделях динамики атмосферы (по их близости слабонеустойчивым периодическим траекториям); возможность построения характеристик предсказуемости системы вблизи таких режимов; исследование устойчивости режимов циркуляции по отношению к различным воздействиям на систему и определение формы наиболее опасных воздействий (способных привести к разрушению режима и существенному изменению структуры циркуляции системы); оценки допустимых воздействий на систему; поиск устойчивых, редко наблюдаемых режимов циркуляции, ответственных за продолжительные периоды аномальной атмосферной динамики (примером которой может, по-видимому, служить погодная аномалия на территории европейской части РФ летом 2010г.).

2. Исследование устойчивости, предсказуемости глобальных (статистических) характеристик циркуляции моделей атмосферы и реальной климатической системы: определение наиболее опасных воздействий на систему; поиск воздействий, вызывающих заданный отклик системы; идентификация моделей атмосферы и климата по чувствительности; оценка величины и формы отклика реальной климатической системы к воздействиям определенного типа.

Личный вклад:

Все основные результаты, представленные в работе, получены автором лично. В работах 1,2,5,7,8,10-13,21,22 постановка задач и обсуждение результатов были выполнены совместно с соавторами (в работах 10-12,22 автором были выполнены исследования лишь по тематике настоящей работы). В работах 4,9,14,15 обсуждение результатов было выполнено совместно с соавторами.

Апробация

Основные результаты работы докладывались на семинарах ИВМ РАН (2005, 2007, 2010), семинарах Geophysical Turbulence Program Национального Центра атмосферных исследований США (2000,2001), на семинарской серии математического института Куранта (2009г.), на университетских семинарах университетов гг. Мэдисон (Висконсин) (2009г.), Гамбург (2009г.), Франкфурт (2010г.).

Результаты работы были представлены на следующих международных конференциях: Генеральная ассамблея Всемирного союза геодезии и геофизики (IUGG) (Саппоро, 2003; Перуджа, 2007г); Ассамблея Европейского геофизического союза (Ницца, 2004; Вена, 2006, 2009, 2010), конференции SIAM (“Неустойчивые волны и когерентные структуры”, Рим, 2008; “Приложения динамических систем”, Сноуберд, 2009; “Новые проблемы теории динамических систем и уравнений в частных производных”, (Барселона, 2010), 16 конференция AMS “Динамика атмосферы и океана” (Санта-Фе, 2007), 15 конференция CCSM (Брекенридж, 2010), конференция “Дни динамики в Европе” (Геттинген, 2009), конференция “Математическая теория и моделирование в науках об атмосфере и океане” (Оберволах, 2010), Школа молодых ученых и международная конференция CITES-2009 (Красноярск, 2009), конференция “Математическая гидродинамика” (Москва, 2006), конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования” (Москва, 2005), всемирная конференция по изменению климата (Москва, 2003), конференция “Динамико-стохастические модели в атмосферных науках” (Боулдер, 2003).

Публикации

По теме диссертации опубликованы 24 научные работы, из них 20 – в рецензируемых журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 154 названий. Работа включает 236 страниц, 12 таблиц и 97 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследования, обсуждаются цели и методы исследования. Отмечены новые результаты и их научно-практическая значимость.

Первая глава работы посвящена изучению глобальных характеристик аттракторов для упрощенных моделей динамики атмосферы. В частности, вычисляются показатели Ляпунова и размерности аттрактора для галеркинских аппроксимаций уравнения баротропного вихря на сфере и двухслойной бароклинной модели атмосферы, исследуется их поведение при изменении пространственного разрешения и

параметров задачи. Рассмотрена задача о воспроизводимости свойства парной симметрии показателей Ляпунова для уравнения баротропного вихря на сфере.

Раздел 1.1 посвящен обзору теоретических результатов, полученных при исследовании моделей динамики атмосферы. Сформулированы основные принципы построения моделей атмосферы и климата и вытекающие из них их математические свойства. Отмечается, что понятие «климат» (т.е. набор состояний системы за достаточно большой промежуток системы), есть по-сути аттрактор (множество возможных состояний) рассматриваемой модели с заданной на нем функцией плотности вероятности (инвариантной мерой). Приводятся теоремы глобальной разрешимости моделей и существования компактных инвариантных притягивающих множества (аттракторов). Отмечено, что ввиду сложности поведения типичных атмосферных систем основным способом исследования характеристик их аттракторов является численное моделирование.

В **разделе 1.2** приводятся основные определения, сформулированы рассматриваемые в работе модели атмосферы. Предполагая, что в исходном бесконечномерном уравнении проведена пространственная аппроксимация, соответствующую конечномерную систему запишем в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} + q(\varphi) \cdot \varphi = f(\varphi) - s\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (1)$$

где $\varphi \in R^N$ есть состояние системы. Операторы f, s, q описывают внешнее воздействие, диссипацию и нелинейные взаимодействия в системе. Автономная система (1) порождает полудинамическую систему $\varphi(t) = g(t)(\varphi_0)$, действующую в R^N .

Множество $A \subset R^N$ называется глобальным аттрактором $g(t)$, если A является компактным множеством, A инвариантно относительно $g(t)$ ($g(t)A = A, \forall t \geq 0$) и A притягивает каждое ограниченное множество лежащее в R^N .

За $L(t,0)$ обозначим матрицу Якоби отображения $g(t)$ в точке φ_0 . Показателем Ляпунова $g(t)$ в точке φ_0 называется предел

$$\lambda_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|L(t,0)h|}{|h|}, |h| \neq 0.$$

Вычисление показателей Ляпунова основано на теореме (Оседец, 1963). Если $g(t)$ имеет инвариантную меру и эргодична, то почти для всех φ_0 , существует единственный предел $O(\varphi_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{[L(t,0)]^* L(t,0)\}^{1/2t}$, причем $O(\varphi_0)$ не зависит от φ_0 для почти всех φ_0 и собственные числа $O(\varphi_0)$ равны экспонентам показателей Ляпунова λ_j . Если известны показатели Ляпунова системы $g(t)$ и она имеет аттрактор, то его размерность может быть вычислена по формуле Каплана-Йорка (Kaplan, Yorke, 1979):

$$\dim_A = j + \frac{\sum_{k=1}^j \lambda_k}{\lambda_{j+1}}, \sum_{k=1}^j \lambda_k > 0, \sum_{k=1}^{j+1} \lambda_k < 0. \quad (2)$$

Рассмотрим частный случай системы (1), когда f не зависит от времени, $S = \alpha E$ (E - тождественный оператор, $\alpha > 0$) и нелинейный оператор $q(\varphi) \cdot \varphi$ приводится к канонической гамильтоновой форме с помощью некоторого невырожденного преобразования. Показатели Ляпунова такой системы удовлетворяют свойству парной симметрии, т.е. $\lambda_j + \lambda_{N+1-j} = -2\alpha$ (показатели пронумерованы по убыванию) (Дымников, Грицун, 2002).

В разделе 1.2.3. и 1.2.4. сформулированы уравнение баротропного вихря на сфере и система уравнений двухслойной бароклинной атмосферы. Приводятся основные теоремы о существовании аттрактора и инерциального многообразия в данных системах, теоремы об оценке размерности аттрактора.

В разделе 1.3 работы описаны численные модели и методы, используемые в дальнейших исследованиях. Баротропная модель крупномасштабной динамики атмосферы, основана на уравнении баротропного вихря, рассматриваемого в Северном полушарии. Краевые условия на экваторе задаются как условия прилипания для функции тока ψ и завихренности ω . Безразмерные единицы вводятся с помощью обратной частота вращения и радиуса Земли. После применения метода Галеркина (система базисных функций – сферические гармоники) задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для спектральных коэффициентов. С учетом антисимметричности ψ относительно экватора система имеет порядок $N = K(K+1)/2$ (K - максимальное азимутальное число гармоники). В качестве схемы по времени в большинстве экспериментов использовалась схема Мацуно. Выбор пространственного разрешения, значения коэффициента трения в пограничном слое α и коэффициента турбулентной вязкости μ зависит от конкретной задачи и оговаривается в соответствующем месте работы. Орография получена из реальных данных высоты поверхности Земли в Северном Полушарии. Внешнее воздействие было выбрано таким образом, чтобы среднее состояние системы было близко к среднему состоянию реальной атмосферы.

Среднее состояние системы для моделей с разрешением T12 и T21 (цифра после “Т” обозначает максимальное азимутальное число гармоники в методе Галеркина) близко к среднеянварскому состоянию реальной атмосферы, вычисленному по данным наблюдений. Стандартное отклонение моделей качественно воспроизводит основные черты стандартного отклонения реальной атмосферы. Траектории моделей неустойчивы по Ляпунову.

Двухслойная бароклинная модель основана на уравнении вихря для поверхностей 250 и 750мб, уравнениях баланса термического ветра и термодинамического уравнений (для 500мб поверхности). Уравнения модели приводятся к системе из двух уравнений для функции тока на поверхности 250 и 750мб, каждое из которых аппроксимируется методом Галеркина, аналогично баротропной модели. В рассматриваемых приложениях для каждого уровня используется пространственное разрешение T8 или T21, размерность фазового

пространства при этом равна 126 (2x63) или 880 (2 x 440). Схема аппроксимации по времени идентична баротропной модели. В качестве орографии и форсинга (температуры подстилающей поверхности) использовались реальные поля соответствующих величин, спроектированные в соответствующие подпространства метода Галеркина. Модель воспроизводит основные черты атмосферной циркуляции (среднее состояние, дисперсию, ведущие моды изменчивости - ведущие **эмпирические ортогональные функции (ЭОФ)**) с хорошей точностью.

В разделе 1.3.2. сформулированы методы вычисления ляпуновских показателей и статистических степеней свободы системы. Для вычисления показателей Ляпунова и размерности аттрактора использовался метод, основанный на теореме Оселедца (Оселедец, 1969) и формулы Каплана-Йорка (Kaplan, Yorke, 1979). Для вычисления числа статистических степеней свободы применялся метод, предложенный в (Wallace et.al., 1991), который основан на аппроксимации распределения коэффициентов ковариации между точками наблюдений гауссовым распределением.

В главе 1.4 приводятся численные результаты исследований глобальных характеристик аттракторов для упрощенных моделей динамики атмосферы. В разделе 1.4.1. рассмотрена задача о вычислении размерности аттрактора системы, порождаемой баротропной моделью. Зафиксируем значение коэффициента трения в пограничном слое равным $1.1 \cdot 10^{-2}$ (характерное время диссипации 14 дней), коэффициента турбулентной вязкости μ равным $2 \cdot 10^{-4}$, орографию и внешнее воздействие. Для каждого пространственного разрешения задачи вычислим соответствующие показатели Ляпунова и размерность аттрактора системы. Из анализа зависимости показателей Ляпунова и размерности от пространственного разрешения видно, что после разрешения T30 имеет место их стабилизация. Таким образом, размерность аттрактора исходной (бесконечномерной) задачи и число ее положительных показателей Ляпунова можно оценить числами 20 и 9 соответственно. Имеет место немонотонная зависимость размерности аттракторов от размерности фазового пространства галеркинских приближений (размерность максимальна при разрешении T12-T15). В работе показано, что при разрешении T15 и локальная неустойчивость системы максимальна. Кроме того, энергия промежуточного масштаба в этом случае также максимальна, что в свою очередь является следствием того, что поток энергии в средний масштаб из крупномасштабных волн достигает своего максимального значения (при T12 разрешаются все нелинейные взаимодействия основных энергетических мод), при этом сток энергии в мелкий масштаб отсутствует. Это приводит к излишней хаотичности системы и объясняет эффект «излишнего хаоса», обнаруженного в работе (Chelesky, Tung, 1985) при численном решении уравнения баротропного вихря на сфере.

Анализ локальной структуры аттрактора показывает, что гладкая часть аттрактора (локальные неустойчивые многообразия) в основном параллельна подпространству с зональным числом от 3 до 5. Вдоль самых крупных и мелких масштабов аттрактор имеет фрактальную структуру. Это, по-видимому, означает, что

на формирование структуры аттрактора основное влияние оказывает локальная баротропная неустойчивость. Форсирующий поток оказывает косвенное влияние, поддерживая через нелинейное взаимодействие крупных масштабов эту неустойчивость.

Далее, в **разделе 1.4.1** рассмотрена зависимость размерности аттрактора от коэффициентов диссипации α и μ . Показано, что при $\mu = 0$ сходимость размерности при увеличении разрешения отсутствует (при данном значении параметров и форсинга конечномерного аттрактора у исходной модели нет). При ненулевых значениях μ всегда присутствует экстремум размерности аттрактора. Также исследовался вопрос о связи размерности аттрактора и числа независимых степеней свободы системы (Wallace et.al., 1991). В работе показано, что близость между данными характеристиками достигается, если число независимых степеней свободы рассчитывается по полю завихренности (согласно теореме существования аттрактор модели расположен в пространстве H_0^2 , что соответствует нормировке поля именно в терминах завихренности).

В **разделе 1.4.2.** исследуется проблема оценки размерности аттрактора и числа степеней свободы в двухслойной бароклинной модели динамики атмосферы. В частности, рассмотрен вопрос сходимости метода в зависимости от длины траектории, используемой для вычисления показателей. Для этого вычислялись показатели Ляпунова при разных длинах временного ряда. Анализируя полученные зависимости можно сделать вывод, что сходимость старших показателей наблюдается при $J > 300$ суток. Далее исследовалась зависимость параметров аттрактора от амплитуды вынуждающей силы T_s , для чего в уравнение вводится коэффициент κ , регулирующий норму воздействия. Для каждого из значений коэффициента κ (0.7, 0.8, 0.9, 1., 1.1, 1.4, 1.5, 1.6) проводился расчет показателей Ляпунова системы и соответствующей размерности аттрактора. При $\kappa = 0.7$ аттрактором системы является предельный цикл и соответствующая размерность равна 1. При больших значениях коэффициента аттрактор является хаотическим, поскольку существуют положительные показатели Ляпунова. В случае $\kappa = 1$ (ситуация соответствует реальному форсингу) размерность равна 27.3, что согласуется с результатами (Yano, Mukougawa, 1992). Стоит также отметить высокую чувствительность параметров аттрактора к правой части.

В **разделе 1.4.3.** рассмотрена задачу о воспроизводимости свойства парной симметрии показателей Ляпунова (Дымников, Грицун, 2001) для баротропной модели атмосферы. В расчетах использовалась модель разрешения T15 с нулевой турбулентной вязкостью. Были рассмотрены несколько способов временной аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений – схемы Матсуно, Кранк-Николсон, Рунге-Кутта 4го порядка. Показатели Ляпунова дискретизованной системы в каждом случае вычислялись на основе использования мультипликативной теоремы Оселедеца. Результаты вычислений показали, что сумма $\lambda_j + \lambda_{N+1-j}$ с хорошей точностью совпадает с величиной -2α (α - коэффициент диссипации в погранслое),

причем для схемы Рунге-Кутты 4-го порядка это свойство выполняется с несколько более высокой точностью. Данный результат свидетельствует о возможной приводимости нелинейного оператора баротропной модели к канонической гамильтоновой форме.

В разделе 1.5 сформулированы основные результаты первой части работы.

Вторая глава работы посвящена изучению локальных характеристик аттрактора баротропной модели динамики атмосферы. Основное внимание уделяется новому подходу аппроксимации локальной структуры аттрактора использующему информацию о периодических орбитах системы. В разделе 2.1 обосновывается необходимость аппроксимации сложных хаотических аттракторов моделей динамики атмосферы с помощью простых базовых множеств, в том числе аргументируется необходимость использования именно периодических траекторий для этой цели. Обсуждаются основные подходы для нахождения периодических орбит в хаотических системах большой размерности. Рассмотрена проблема о возможной связи локальной структуры аттракторов атмосферной системы и ведущих мод изменчивости системы. Приводится обзор исследований, посвященных данному вопросу. Вторая часть второй главы (раздел 2.2) посвящена описанию используемых методов. По определению, траектория является периодической орбитой, если через некоторое фиксированное время T она возвращается в свое исходное положение. В символьном виде это можно записать как $\psi(T) = g(T)(\psi(0)) = \psi(0)$, где $\psi(T)$ это положение орбиты через время T . Данная нелинейная система ($\psi(T)$ нелинейно зависит от $\psi(0)$ и однозначно определяется $\psi(0)$ и T) из N уравнений для $N + 1$ неизвестных ($\psi(0)$ и T) и определяет периодическую траекторию. Недоопределенность системы вызвана тем, что одна и та же орбита может быть задана различными начальными условиями.

Рассмотрим некоторое преобразование $\Pi(\varphi)$, зависящее от решения системы. По определению среднего значения ($t = j\tau$, τ - шаг по времени в модели)

$$\langle \Pi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \Pi(g(j\tau)(\varphi_0)). \quad (3)$$

Согласно теории гиперболических систем (см. Ruelle, 1999) данное среднее можно вычислить как предел суммы

$$\langle \Pi \rangle = \int \Pi(\varphi) d\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{I(T)} w_i \Pi_i}{\sum_{i=1}^{I(T)} w_i}. \quad (4)$$

Здесь Π_i есть значение преобразования, определенное в i -ой периодической точки периода T ($T = J\tau$, $\Pi_i = \Pi(\varphi_i)$, $g((J-1)\tau)(\varphi_i) = \varphi_i$), а w_i - ее весовая функция. Орбита периода T содержит J периодических точек. Общее число периодических точек периода T обозначено как $I(T)$. Вес w_i определяется как

$$w_i = 1 / \exp(T \sum_m \lambda_{i,m}^+), \quad (5)$$

где $\lambda_{i,m}^+$ это положительные показателей Ляпунова i -ой орбиты. Если система является гиперболической, то (4,5) дают точное выражение для произвольной статистики

системы и, таким образом, определяет структуру инвариантной меры в окрестности любой точки аттрактора. Для негиперболических систем возможны другие выражения для весовых функций. Например, можно использовать (6) или (7) (Kazantsev, 2000; Грицун, 2010)

$$w_i = 1 / \sum_m \lambda_{i,m}^+, \quad (6) \quad w_i = 1 / \exp(T(\overline{\sum_m \lambda_{i,m}^+})). \quad (7)$$

Здесь $\overline{\sum_m \lambda_{i,m}^+}$ это среднее значение суммы положительных показателей Ляпунова всех периодических точек в некоторой окрестности данной орбиты.

Для поиска периодических орбит (решения системы $\psi(T) = \psi(0)$) могут быть использованы различные численные методы. В частности, в работе используются различные модификации метода Ньютона (классический метод Ньютона, метод Ньютона с подавлением шага, метод Ньютона с неточным обращением матрицы метода и использованием технологии “line search”, метод Ньютона с тензорной коррекцией второго порядка), сформулированные в пункте 2.2.2.1 и методы минимизации функционала невязки (итерационные с обращением матрицы гесса по схемам GMRES и LBFQ-s), приведенные в пункте 2.2.2.2. Обсуждаются различные способы выбора фазового условия в методах Ньютона. При использовании численных методов для решения сильно нелинейных систем особое значение имеют способы задания начальных приближений. Некоторые стратегии их выбора описаны в пункте 2.2.2.3. В конце раздела 2.2 приводятся результаты сравнения упомянутых численных методов поиска периодических траекторий, реализованных в работе для модели динамики баротропной атмосферы. Отмечено, что с их помощью удается находить орбиты (т.е. решения соответствующей нелинейной системы) с машинной точностью. Наилучшие результаты при решении задачи поиска периодических траекторий получены при использовании методов Ньютона. Необходимым условием их применения в рассматриваемой задаче является использование процедуры подавления шага и регуляризации матрицы метода при появлении малых сингулярных чисел. Значительное улучшение сходимости достигается при использовании тензорной коррекции. В рассматриваемой задаче методы минимизации функционала ошибки менее эффективны, особенно в сочетании с плохими начальными условиями. На сходимость методов Ньютона заметное влияние оказывает выбор фазового условия и способ регуляризации плохо обусловленной ньютоновской системы. Выбор способа задания начальных условий для итерационной процедуры также имеет большое значение. Некоторые орбиты можно найти с гораздо большей вероятностью, чем остальные. Ключевым фактором, влияющим на это, является структура матрицы метода Ньютона. Если матрица обусловлена плохо, то вероятность найти такую орбиту значительно ниже.

В разделе 2.3. приводятся основные результаты вычислений. Пункт 2.3.1. посвящен анализу свойств периодических траекторий двух баротропных моделей динамики атмосферы (разрешения T12 и T21).

Для модели T12 удалось найти 2300 периодических и 50 стационарных решений (см. Рис.1). Периоды орбит лежат в широком диапазоне (от 3 до 200 суток). Многие орбиты имеют сложную геометрию. Число неустойчивых направлений орбит изменяется от 2 до 30 (все орбиты неустойчивы по Ляпунову). Орбиты "визуально" плотны на аттракторе баротропной модели. Распределение числа орбит по периодам отражает характеристики спектра Фурье модели. Многие орбиты близки друг к другу и, тем самым, образуют кластеры. В таких кластерах, как правило, орбиты имеют кратный период и можно выделить одну слабо неустойчивую орбиту наименьшего периода, "порождающую" данный кластер. Согласно результатам теории динамических систем такие "порождающие" орбиты задают символическую динамику системы. Обращает на себя внимание также тот факт, что несколько слабо неустойчивых орбит расположены в "невидимой" части аттрактора системы - области практически не посещаемой траекторией системы (эти орбиты выделены зеленым цветом на Рис.1).

Для модели T21 удалось найти 1200 неустойчивых орбит и 320 неустойчивых стационарных точек. Большинство найденных орбит имеет короткие периоды

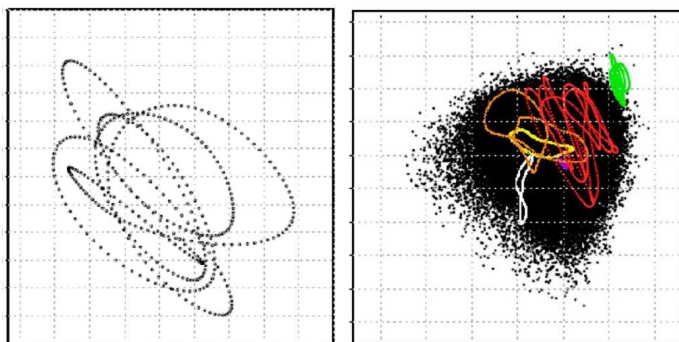


Рисунок 1. Справа: 10 наименее неустойчивых орбит на плоскости ЭОФ1-ЭОФ2 системы. Распределение точек на аттракторе системы показано в виде черного фона. Слева: одна из орбит модели.

(4-7 дней). Тем не менее, периоды некоторых орбит достигают 30 дней. В целом можно сделать вывод, что орбиты модели T21 гораздо более неустойчивы, чем в случае T12. Более того, они менее гиперболически (у них существуют показатели Ляпунова, близкие к нулю). Поэтому вычислительные затраты, необходимые для поиска орбит модели T21, увеличиваются в десятки раз.

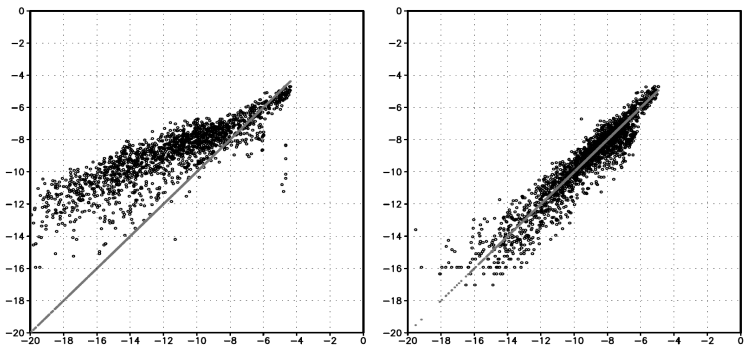
В пункте 2.3.2. рассмотрена задача об аппроксимации статистических характеристик баротропной модели атмосферы (с разрешения T12) с помощью ее периодических орбит. Для расчета средних значений рассматриваемых величин будем использовать весовую формулу (4). Для верификации полученных результатов будет использовать стандартное осреднение вдоль траекторий (т.е. (3)). На практике рассматриваемая система не является гиперболической и число найденных орбит конечно, поэтому (4) принимает вид (8)

$$\langle \Pi \rangle \approx \frac{\sum_{i=1}^{I(T \max)} w_i \Pi_i}{\sum_{i=1}^{I(T \max)} w_i} \quad (8)$$

Доля времени, проводимая траекторией в δ -окрестности некоторого множества M , есть, по определению, $\Xi_{M,\delta} = \int \Theta(O_\delta(M)) d\mu$ (мера предполагается нормированной, т.е. $\int d\mu = 1$). Здесь $\Theta(O_\delta(M))$ это характеристическая функция δ -окрестности множества M . Величина $\Xi_{M,\delta}$ может быть легко определена для рассматриваемой системы напрямую с помощью интегрирования уравнения модели на длительный срок и

вычисления соответствующей вероятности попадания траектории в окрестность рассматриваемого множества. С другой стороны, можно определить $\Xi_{M,\delta}$ используя формулы (8) и (5). Тем самым можно проверить гипотезу об аппроксимации инвариантной меры системы с помощью периодических орбит. На Рис.2 (слева) показаны величины $\eta_k = \Xi_{M_k,\delta} / \sum_k \Xi_{M_k,\delta}$, рассчитанные напрямую (ось ординат, логарифмический масштаб) и с помощью формул (5,8) (ось абсцисс, логарифмический масштаб) для каждой из 2322 найденных орбит. Величина δ составляет величину равную 10% диаметра аттрактора, причем результаты не меняются при изменении δ в 1-5 раз. Из рис.2 следует, что время, проводимое траекторией системы в окрестности периодической траектории, не всегда верно определяется формулой (8). В частности, это справедливо для бти слабо неустойчивых орбит системы (соответствующие точки лежат значительно ниже прямой $x = y$): для них величина η_k на несколько порядков меньше, чем его оценка с помощью (5,8). Анализ показывает, что именно эти орбиты образуют кластер в «невидимой» части аттрактора, упомянутой выше. Чтобы получить правильную аппроксимацию инвариантной меры системы с помощью (8) их нужно исключить из рассмотрения.

Рисунок 2. Зависимость доли времени η_k , проводимой траекторией системы в окрестности k -ой периодической орбиты и рассчитанной напрямую (ось ординат, логарифмический масштаб) от соответствующего значения, полученного с помощью весовой формулы (8) (ось абсцисс, логарифмический масштаб). Слева – вес периодической точки рассчитан по формуле (5); справа – по формуле (7) с исключением «несущественных» орбит

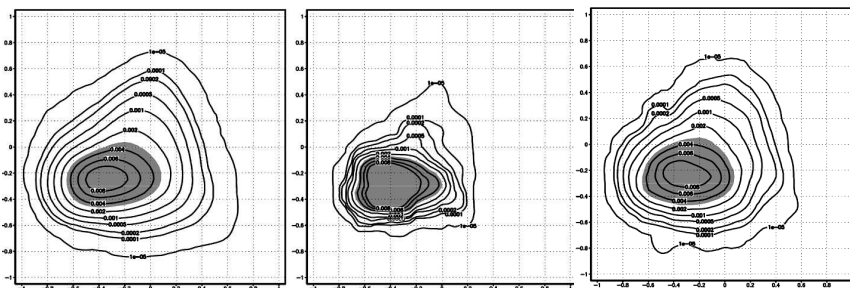


Кроме того, доля времени, проводимого системой в окрестности сильно неустойчивых орбит, значительно занижается. Возможная причина этого заключается в том, что в окрестности таких орбит могут лежать не найденные более устойчивые орбиты. Аппроксимацию времени жизни можно улучшить, если вместо точных значений показателей Ляпунова этих орбит использовать их осредненные по некоторой области фазового пространства аналоги. Таким образом, вместо (5) мы приходим к весовой функции (7). В результате использования (7,8) воспроизводимость величины η_k значительно улучшается (см. Рис.2, справа) т.е. (7,8) дает более правильное выражение для инвариантной меры.

Продемонстрируем качество аппроксимации статистических характеристик системы с помощью орбит на примере проекций **плотности вероятности распределения точек (ПВРТ)** в фазовом пространстве системы. Для этого проинтегрируем систему на длительный срок. Разобьем область рассматриваемой проекционной плоскости на квадраты и вычислим вероятность нахождения системы в каждом квадрате. Используя (5, 8) и (7, 8) построим аппроксимацию данной

характеристики системы. Результаты вычислений показаны на рис.3. Можно сделать вывод, что с помощью теоретического выражения для весовых коэффициентов не удастся правильно воспроизвести ПВРТ системы. При использовании (7,8) с исключением «несущественных» орбит норма разницы между проекцией ПВРТ и ее аппроксимацией не превышает 10% от нормы проекции ПВРТ (в L_2 норме). Такие же выводы получены и для других плоскостей проекций. В работе также показано, что

Рисунок 3. Проекция ПВРТ на плоскость 1 и 3 компонент решения. Слева направо: проекция вычислена по траектории системы; проекция вычислена по формулам (5,8); проекция рассчитана по формулам (7,8) с исключением орбит «невидимой» части аттрактора.



при аппроксимации крупномасштабных статистических характеристик системы (среднего состояния, дисперсии, ведущих мод изменчивости) выбор весовой функции не принципиален – точность аппроксимации данных характеристик остается высокой в любом случае. Для баротропной модели T21 с помощью найденных периодических траекторий удастся аппроксимировать лишь базовые статистические характеристики системы.

В пункте 2.3.3 исследуется связь между модами изменчивости системы (эмпирическими ортогональными функциями (ЭОФ)) и ее периодическими траекториями на примере гильбертовых ЭОФ баротропной модели атмосферы T21. Процедура вычисления гильбертовых ЭОФ системы заключается в следующем (v. Storch, F. Zwiers, 1999). Сначала производится преобразование Фурье по времени для каждой компоненты рассматриваемого физического поля. В полученном разложении производится его сдвиг на четверть периода (90 градусов) и обратное преобразование Фурье. В результате получаем исходный временной ряд $\varphi(j)$ и его гильберт-преобразование $\tilde{\varphi}(j)$. Составим комплексную переменную $\tilde{z}(j) = \varphi(j) + i\tilde{\varphi}(j)$ и вычислим ее ковариационную матрицу. Комплекснозначные собственные векторы этой матрицы есть гильбертовы (комплексные) ЭОФ системы. Действительная и мнимая компоненты ведущего комплексного ЭОФ системы определяет ведущую вращательную компоненту циркуляции системы. Известно (Branstator, 1987; Kushnir, 1987), что ведущий комплексный ЭОФ, построенный по зимним данным высоты геопотенциала 500мб поверхности имеет вид планетарной волны, движущейся с востока на запад с характерным периодом порядка 25 дней. На рисунке 4 из работы (Branstator, 1987) представлена эволюция данного колебания (показан начальный момент и состояние системы через 1/8, 1/4 и 3/8 периода).

Баротропная модель атмосферы T21 с высокой точностью воспроизводит как структуру, так и временную динамику ведущей колебательной моды атмосферы. Коэффициент пространственной корреляции между соответствующими полями

составляет величину порядка 0.88, период колебания в модели равен 23 дням, волна также движется с востока на запад.

Естественно ожидать, что такая значимая квазипериодическая компонента циркуляции должна быть связана с периодическими орбитами системы. Действительно, некоторые из найденных наименее неустойчивых орбит модели имеют период в диапазоне 20-25 дней. Их проекция на первую гильбертову ЭОФ системы приведена на

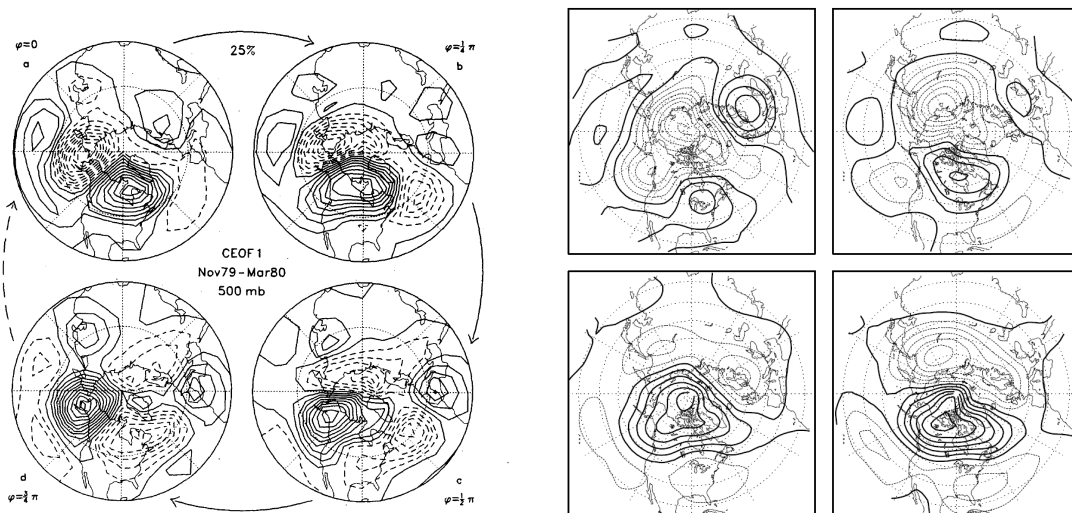
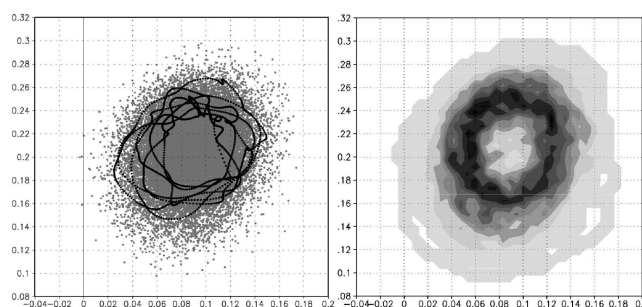


Рисунок 4. Первая комплексная ЭОФ рассчитанная по данным наблюдений (Branstator, 1987) (слева) и по траектории модели T21 (справа). Показаны состояния в начальный момент, через 1/8, 1/4 и 3/8 периода

рисунке 5. Видно, что траектории орбит практически совпадают с плоскостью первой гильбертовой ЕОФ системы. Более того, можно показать, что эволюция орбит в физическом пространстве, действительно с высокой точностью воспроизводит структуру и динамику данной моды изменчивости и, таким образом, сводится к вращательному движению в плоскости ведущей гильбертовой ЕОФ системы. Рассматривая РПВТ системы, когда плоскость движения близка к плоскости первой гильбертовой ЭОФ, можно показать, что максимум плотности вероятности совпадает с положением наименее неустойчивых орбит. Поэтому движение модели на самом деле происходит вдоль наименее неустойчивых орбит. Таким образом, можно заключить, что 25ти дневное колебание есть динамический режим циркуляции, порождаемый соответствующими орбитами системы.

Рисунок 5. Слева: проекция траектории модели T21 (показана серым цветом) и проекции 7ми наименее неустойчивых периодических орбит системы (показаны черным) на плоскость 1ой комплексной ЭОФ модели. Справа: проекция ПВРТ при движении вдоль данной плоскости.



В разделе 2.4 сформулированы основные результаты второй главы.

В третьей главе работы рассматривается проблема чувствительности статистических характеристик моделей крупномасштабной динамики атмосферы

(баротропной и двухслойной бароклиной) к малым внешним воздействиям. Исследование основано на применении двух методов – аппроксимации инвариантной меры системы с помощью периодических траекторий и применении флуктуационно-диссипационных соотношений (ФДС). **Во введении (раздел 3.1)** формулируется проблема оценки чувствительности моделей атмосферы к малым внешним воздействиям как математическая задача теории климата. Рассмотрим некоторое преобразование $\Pi(\varphi)$, зависящее от решения системы. Считая, что рассматриваемая система имеет аттрактор A с эргодической инвариантной мерой, сосредоточенной на нем, среднее значение $\Pi(\varphi)$ определим как $\bar{\Pi} = \int_A \Pi(\varphi) d\mu$. Рассмотрим также возмущенную систему с дополнительным внешним воздействием \mathcal{J} . Среднее значение преобразования $\Pi(\varphi)$ для возмущенной системы вычисляются как $\bar{\Pi}^1 = \int_{A^1} \Pi(\varphi^1) d\mu^1$ и $\delta\Pi = \int_{A^1} \Pi(\varphi^1) d\mu^1 - \int_A \Pi(\varphi) d\mu = U_{\Pi}(\mathcal{J})$, где U_{Π} это некоторый оператор (оператор отклика) связывающий изменения внешнего воздействия и соответствующие изменения среднего значения.

Существует несколько способов построения оператора отклика, рассматриваемых в **разделе 3.2**. В частности, пункт **3.2.1** посвящен методу построения оператора отклика по периодическим траекториям модели. Рассмотрим совокупность всех периодических точек модели, имеющих период T . Для среднего значения $\Pi(\varphi)$ используем формулу (8). Весовые функции определяются согласно (5). Если система является гиперболической, то при $T \rightarrow \infty$ (5,8) дают точное выражение для произвольной статистики системы и, таким образом, определяет структуру инвариантной меры в окрестности любой точки аттрактора. Среднее состояния возмущенной системы вычисляется аналогично как $\bar{\varphi}^1 \approx \frac{\sum_{i=1}^{I(T_{\max})} w'_i \varphi'_{0i}}{\sum_{i=1}^{I(T_{\max})} w'_i}$. С точностью до малых первого порядка $\delta\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^1 - \bar{\varphi} = V\mathcal{J}$. Причем, дифференцированием $\bar{\varphi}^1$ по \mathcal{J} для приближенного оператора отклика V получается формальное выражение вида

$$V = \frac{1}{A^2} \left(\sum_i (A\varphi_{0i} \left. \frac{\partial w'_i}{\partial(\mathcal{J})} \right|_{\mathcal{J}=0} + Aw_i \left. \frac{\partial \varphi'_{0i}}{\partial(\mathcal{J})} \right|_{\mathcal{J}=0} - w_i \varphi_{0i} \sum_i \left. \frac{\partial w'_i}{\partial(\mathcal{J})} \right|_{\mathcal{J}=0}) \left(A = \sum_i w_i \right). \quad (9)$$

Данное выражение может быть аппроксимировано численно. Для негиперболических систем на практике целесообразно использовать иные выражение для весовых функций w_i . Так, например, в работе (Грицун, 2010) было предложено использовать модифицированную весовую функцию (7).

Альтернативный метод построения оператора отклика рассматривается в **пункте 3.2.2**. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1). Инвариантная мера диссипативной системы является сингулярной в том смысле, что

она определена на фрактальном подмножестве фазового пространства. Следуя (Zeeman, 1988) рассмотрим регуляризованную систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = R(\varphi) + \varepsilon\eta(t), \quad (10)$$

где $\eta(t)$ - случайный процесс, представляющий собой гауссов белый шум с единичной дисперсией, а ε - малое положительное число ($R(\varphi) = -q(\varphi) \cdot \varphi + f(\varphi) - s\varphi$). Плотность ρ_ε инвариантной меры μ_ε такой системы является стационарным решением

соответствующего уравнения Фоккера-Планка $\frac{d\rho_\varepsilon}{dt} = L(\rho_\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 \Delta \rho_\varepsilon - \text{div}(F\rho_\varepsilon)$. Среднее

значение $\Pi(\varphi)$ можно теперь вычислить как $\overline{\Pi(\varphi)} = \int \varphi \rho_\varepsilon d\varphi$ ($d\varphi$ это элемент объема R^N).

Основанием для такой регуляризации является тот факт, что реальные атмосферные модели часто содержат параметризацию подсеточных масштабов, имеющие "стохастическое происхождение" (Palmer, 2001; Shutts, 2005). "Компьютерные реализации" моделей также являются источниками псевдослучайных шумов.

Уравнение Фоккера-Планка для возмущенной меры будет иметь вид $\frac{d\rho'_\varepsilon}{dt} = (L + \delta L)\rho'_\varepsilon$, где $\delta L(\rho'_\varepsilon) = \text{div}(\delta f \rho'_\varepsilon)$. Для изменения среднего имеет место

$\delta \overline{\Pi(\varphi)} = \int \Pi(\varphi') \rho'_\varepsilon d\varphi' - \int \Pi(\varphi) \rho_\varepsilon d\varphi$. Согласно (Dekker, Naake, 1975; Risken, 1989) в

линейном приближении справедливо флуктуационно-диссипационное соотношение

$\delta \langle \Pi \rangle = \int_0^\infty \langle \Pi(\varphi(t+\tau) B_m(t) \rangle d\tau \delta f_m$, $B_m = -\partial \ln \rho_\varepsilon(\varphi(t)) / \partial \varphi_m$. Если ρ_ε является нормальным

распределением, то (для простоты предполагается, что среднее состояние нулевое)

$\rho_\varepsilon(\varphi) = c \exp(-(C(0)^{-1} \varphi, \varphi) / 2)$ и для оператора отклика среднего состояния U получается

выражение

$$U(t) = \int_0^t C(\tau) C^{-1}(0) d\tau \quad (\Pi(\varphi) \equiv \varphi). \quad (11)$$

В эргодическом случае это означает, что оператор отклика может быть построен по одной достаточно длинной траектории системы. Впервые идея использовать ФДС для оценки чувствительности климатической системы была высказана в работе (Leith, 1973), а первая попытка ее реализации была осуществлена в работе (Bell, 1980).

В случае периодической зависимости правой части системы от времени оператор отклика (**пункт 3.2.3**) может быть вычислен по формулам (Majda, Wang, 2010)

$$\delta \langle \Pi \rangle(t^0) = \int_0^\infty R(s) ds \delta f, \quad R(s)_{m,n} = \langle \Pi(\varphi(t^0)_m B_n(t^0 - s) \rangle, \quad B_n(\tau) = -\frac{1}{\rho^{per}} \frac{\partial \rho^{per}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi_n} \quad \text{и}$$

$$\delta \langle W \rangle(t^0) = \int_0^\infty \langle W(\varphi(t^0) \varphi(t^0 - s)^T \rangle C_{t^0-s}^{-1}(0) ds \delta f \quad (\text{в гауссовом приближении}). \quad (12)$$

В **пункте 3.2.4** устанавливается связь между теоремой Крейкнана для регулярных систем (Kraichnan, 1959) и теорией пунктов 3.2.2-3.2.3 и обсуждаются требования к

системам, необходимые для использования полученных формул для оператора отклика. В пункте 3.2.5 рассматривается теория линейных динамико-стохастических систем, показывается, что ФДС могут быть получены и в этом случае. Отмечается тот факт, что при определенных условиях, левые сингулярные векторы оператора отклика системы (максимальные отклики) должны быть связаны с ведущими модами низкочастотной изменчивости системы.

Раздел 3.3. посвящен описанию результатов численных экспериментов по построению приближенных операторов отклика на малые внешние воздействия для статистических характеристик моделей низкочастотной изменчивости атмосферы. В пункте 3.3.1. с помощью прямых численных экспериментов и метода наименьших квадратов строится оператор отклика среднего состояния баротропной модели атмосферы на изменения внешнего воздействия (используются две модели с пространственным разрешением T8 и T12). Проверяется гипотеза о линейности оператора отклика для малых по норме воздействий. Показано, что линейная часть отклика системы определяет порядка 90% от нормы отклика системы. Определяются ведущие левые и правые сингулярные векторы оператора отклика. Показано, что ведущие левые сингулярные векторы близки к соответствующим доминантным модам низкочастотной изменчивости системы.

В пункте 3.3.2. рассмотрена задача о построения приближенного оператора отклика для статистических характеристик баротропной модели атмосферы с помощью аппроксимации ее инвариантной меры периодическими траекториями. Для приближенного оператора отклика V используется формула (9). Для того чтобы определить оператор V , необходимо численно аппроксимировать все входящие в это выражение производные. Основные формулы для вычисления V приводятся в приложении. Численная реализация методики построения V идентична работе (Kazantsev, 2001). Для каждой из предложенных весовых функций ((5), (6) и (7)) были построены соответствующие приближенные операторы отклика. Во всех вычислениях использовался набор из 2250 орбит системы. Сравнивая структуру старших сингулярных векторов построенных матриц с сингулярными векторами оператора отклика U системы, вычисленного прямым методом можно сделать вывод, что наилучшие результаты удается получить с помощью (7). Величины корреляций между 4мя ведущими оптимальными откликами операторов равны 0.95, 0.89, 0.73 и 0.7 соответственно. Ошибка в воспроизведении амплитуды отклика при этом не превышает 50% и составляет 33%, 50%, 50% и 40% соответственно. Оптимальные воздействия воспроизводятся на уровне корреляций 0.39, 0.65, 0.63 и 0.8. Используя (5) удается воспроизвести только ведущую пару сингулярных векторов (корреляции равны 0.78 и 0.9). В случае применения (6) можно воспроизвести две пары ведущих векторов, однако величина отклика системы существенно занижается.

В пункте 3.3.3. ставится задача о проверке выполнимости ФДС для баротропной модели атмосферы и возможности использования (11) для построения оператора отклика модели на малые внешние воздействия. Сначала проверяется справедливость

соотношения $\langle K(t,t') \rangle = C(t-t')C^{-1}(0)$ для данной модели. Здесь $K(t) = \langle K(t+\tau, \tau) \rangle$ это усредненная по ансамблю траекторий функция Грина $K(t) = \langle K(t+\tau, \tau) \rangle$ линеаризованной задачи, $C(\tau), C(0)$ - ковариационные матрицы исходной задачи. С этой целью в фазовом пространстве системы строится равновесный (стационарный) ансамбль состояний. На стационарном ансамбле состояний вычисляются ковариационные матрицы системы. Далее, с каждой точки ансамбля проводится интегрирование линеаризованной модели и определяется соответствующая функция Грина $K(t,0)$. Усредняя матрицы $K(t,0)$ по ансамблю траекторий, получаем $K(t) = \langle K(t,0) \rangle$ как функцию t . Сравнения $C(\tau)C^{-1}(0)$ и $K(\tau)$ можно сделать вывод о том, что ФДС выполняется с высокой точностью, если t меньше 7 дней. Справедливость ФДС при $t > 7$ суток построенным методом изучена быть не может (решения линейных систем неустойчивы и ошибка в вычислении среднего $K(t)$ экспоненциально растет с увеличением t).

Рассмотрим далее вопрос о построении приближенного оператора отклика баротропной модели атмосферы Т8 с помощью ФДС. Для этого используем выражение (11). Интеграл в выражении (11) аппроксимируем по формуле трапеций, верхний предел равен 30 суткам, шаг интегрирования $\delta t = 0.5$ суток. Построенный приближенный оператор отклика обозначим $V^{\delta t}$. Сравнивая полученные сингулярные векторы приближенного оператора отклика с векторами, полученными для оператора отклика в результате прямых численных экспериментов с моделью (в п. 3.3.1) можно сделать вывод, что подпространства первых двух правых и левых сингулярных векторов операторов $V^{\delta t}$ и U практически совпадают. Однако сами векторы отличаются друг от друга. Этот факт можно объяснить тем, что первые два сингулярных числа матрицы U близки, и при внесении малой поправки соответствующие векторы могут сильно измениться. Другой тест качества аппроксимации оператора отклика заключается в подстановке оптимального воздействия (Рис.6) в правую часть рассматриваемой модели и непосредственного интегрирования возмущенной системы. При этом реальный отклик оказывается

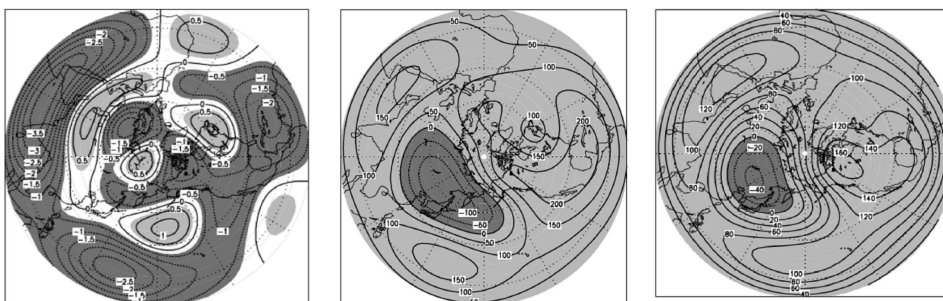


Рисунок 6. Ведущий правый (оптимальное воздействие) и левый (максимальный отклик) сингулярные векторы оператора $V^{\delta t}$ (безразм.ед.). Справа – реальный отклик модели на правый сингулярный вектор оператора $V^{\delta t}$.

близким по структуре к соответствующему оптимальному отклику приближенного оператора и несколько более слабым. Суммируя вышесказанное, можно сделать вывод,

что использование приближенного оператора отклика, построенного с помощью ФДС для предсказания чувствительности баротропной модели атмосферы, дает удовлетворительные результаты

В заключении рассматривается задача построения приближенного оператора отклика с помощью линеаризации оператора исходной нелинейной задачи. Делается вывод, что в таком случае точность аппроксимации оператора отклика меньше, чем при использовании ФДС

Пункт 3.3.4 посвящен построению приближенного оператора отклика на малые внешние воздействия для среднего состояния двухслойной бароклинной модели атмосферы. В модели используется пространственное разрешение T21. Параметры модели выбраны в соответствии с главой 2. По результатам расчетов сделан вывод о том, что для данной модели использование (11) для построения приближенного оператора обеспечивает высокую точность вычислений. Предсказанные с помощью (11) и реальные отклики модели на правые сингулярные векторы приближенного оператора отклика практически совпадают. Коэффициент усиления возмущения также предсказывается с хорошей точностью. Таким образом, оператор отклика среднего состояния двухслойной бароклинной модели аппроксимируется при помощи ФДС с высокой точностью.

В разделе 3.4 перечислены основные результаты третьей главы.

Четвертая глава работы посвящена построению операторов отклика статистических характеристик моделей ОЦА и КС на малые внешние воздействия и решению смежных прикладных задач (оценка чувствительности, построение оптимальных воздействий, обратные задачи) имеющих большую практическую значимость.

В разделе 4.1. отмечается, что специфические особенности КС как физического объекта приводят к тому, что метод математического моделирования является в настоящее время основным инструментом исследования ее чувствительности к малым возмущениям внешних воздействий. Качество используемых климатических моделей при этом оценивается по воспроизведению ими современного климата. Однако остается открытым фундаментальный вопрос – является ли этот уровень достаточным, чтобы воспроизвести чувствительность реальной климатической системы к заданным внешним воздействиям? Альтернативный способ исследования чувствительности основан на использовании ФДС и не требует ничего кроме данных наблюдений.

В разделе 4.2 приводится описание моделей ОЦА CCM0, SAM3 и ИВМ РАН использованных в расчетах. Модель атмосферы CCM0 (Pitcher et.al, 1982; Williamson, 1983) представляет собой модель общей циркуляции промежуточной сложности. Модель имеет девять вертикальных уровней, пространственное разрешение R15 и полный набор физических параметризаций. Расчет траектории модели на 4000000 дней был проведен для фиксированных граничных условий соответствующих январю.

Модель атмосферы SAM3 (см. Collins, 2006) представляет собой модель ОЦА, использующей вертикальную гибридную координату (26 уровней). Для аппроксимации

уравнений по горизонтали используется метод Галеркина с базисом, состоящим из сферических гармоник, при этом используется треугольное усечение T42. Модель имеет полный набор физических параметризаций. Для построения оператора отклика модели использовалась траектория модели длиной 12000 лет с фиксированным годовым ходом изменения температуры поверхности океана и радиационных источников.

Модель ОЦА ИВМ РАН, разработанная в ИВМ РАН (Алексеев и др., 1998) имеет 21 вертикальный уровень. Для горизонтальной аппроксимации используется конечно-разностный метод с шагом сетки 4 градуса по широте и 5 градусов по долготе. Для модели была вычислена траектория длиной 1000000 дней для фиксированных по времени граничных условий соответствующих январю.

В **разделе 4.3** формулируется методика построения приближенных операторов отклика для моделей общей циркуляции атмосферы, которая, по существу, сводится к численному интегрированию модели на продолжительное время, вычислению матриц $C(\tau) = \langle W(t + \tau)x^T(t) \rangle$ и $C(0) = \langle x(t)x^T(t) \rangle$ и построению оператора отклика по формуле (11) с последующей проверкой точности результатов с помощью прямого интегрирования возмущенной системы для некоторого базового набора воздействий. В тоже время, отмечается, что разработка, реализация и верификация метода для моделей ОЦА представляет собой сложную технологическую проблему ввиду их огромной размерности. Основная проблема заключается в необходимости обращения многомерной ковариационной матрицы системы, известной неточно (ввиду конечности ряда данных моделирования). Этот факт диктует необходимость регуляризации – вычисление оператора отклика должно производиться в подпространстве меньшей размерности, в котором обращение матрицы устойчиво к численным ошибкам. В разделе проводится обсуждение возможных способов регуляризации и описывается процедура понижения размерности, использованная в работе. Кроме того, рассматривается вопрос о допустимости сделанных при выводе формулы для приближенного оператора отклика предположений, ключевым из которых является требование нормальности функции распределения системы. Отмечается, что для модели ССМ0 это предположение приближенно выполнено. Анализ численных расчетов показывает также, что отклик рассматриваемых моделей линеен по отношению к воздействию в достаточно большом диапазоне норм воздействий.

В **разделе 4.4.** приведено описание численных экспериментов, с помощью которых проводилась верификация построенных приближенных операторов отклика. Суть экспериментов заключается в том, что в правую часть модели (в уравнение для температуры) добавляется постоянно действующий термический источник $T_0 t(p, \lambda, \phi)$, возмущенная модель интегрируется на 10100 суток и, по последним 10000 дням, определяется новое среднее состояние. В результате можно определить отклик рассматриваемой статистической характеристики на данное воздействие. Для модели ССМ0 были проведены несколько серий «стандартных» экспериментов (локальное нагревание с синусоидальным по вертикали профилем (максимум на уровне $\sigma = 0.5$),

максимум нагревания приходится на экватор, долгота изменяется от 0 до 360 с шагом 15 градусов). В других сериях экспериментов широта центральной точки была равна 40 градусам северной широты. Использовался также вертикальный профиль нагревания с максимумом на поверхности. Всего было выполнено 4 серии из 24 экспериментов («приземное» и «глубокое» воздействие на экваторе и в средних широтах). Величина максимума нагревания T_0 принимала значение 2.5 градуса Кельвина в день для экваториальных серий экспериментов и 5.0 градусов для остальных случаев.

В разделе 4.5 приведены результаты сравнения линейной части отклика модели ССМ0 на различные термические воздействия, и отклика построенного при помощи приближенного оператора. Рассмотрим отклик модели ССМ0 на 24 синусоидальных по вертикали источника тепла в тропиках. Усредним все 24 отклика системы, предварительно сместив каждый из них так, чтобы центр нагревания оказался в точке (180E,00S) (т.е., например, отклик на воздействие с максимумом нагревания в точке (30W,00S) необходимо переместить на 30 градусов на восток). Основная структура полученной величины хорошо согласуется с теорией и включает выраженную квадрупольную структуру в тропиках и баротропный волновой пакет, движущийся по дуге в средние широты зимней полусферы. Аналогичные характеристики среднего отклика были вычислены с помощью ФДС по (11). Была получена трехмерная структура близкая по структуре и амплитуде к реальности. Экваториальный квадруполь, волновое движение в средних широтах и соответствующие вертикальные структуры воспроизводятся очень точно. Единственное отличие можно заметить в стратосфере, где в приближенном отклике отсутствует зонально-симметричная синусоидальная структура.

Пространственная структура отклика на конкретные воздействия также воспроизводится с высокой точностью. Как известно (Li et.al, 2006; Geisler et.al, 1988; Branstator, Haupt, 1998), структура отклика атмосферы может сильно меняться в зависимости от положения воздействия. Демонстрацией такой зависимости может служить случай воздействий с центрами в точках (135E,0N) и (90W,0N) (см. рис. 7). Пространственная структура откликов при этом также совершенно разная. Тем не менее, приближенный оператор воспроизводит обе структуры с высокой точностью.

В работе были рассчитаны значения корреляций для предсказанных и реальных откликов в полях приземной функции тока ψ_{991} и температуры T_{991} , функции тока и температуры на уровне $\sigma = .336$, для полных (вычисленных для 9 уровней температуры и функции тока) откликов, а также отношения их амплитуд. Можно сделать вывод, что пространственная корреляция между полями всегда больше 0.7. Ошибка в амплитуде отклика при этом в большинстве случаев не превосходит 20% процентов, хотя приближенный оператор в среднем завышает величину отклика. Также надежно воспроизводится отклик глобально осредненных характеристик, таких как средне-глобальная приземная температура. Значения корреляции для полей осадков и дивергенции также достаточно высоки и в среднем больше 0.8. Лишь в нескольких

случаях, когда воздействие находится на востоке Тихого океана, корреляция имеет значение ниже 0.7. Во всех этих случаях отклик системы слабый, что приводит к тому, что допущения и численные ошибки, сделанные при построении оператора отклика, оказываются сравнимыми с самим откликом. Несколько хуже воспроизводится отклик в случае вторых моментов. Тем не менее, средние значения корреляций для всех четырех рассматриваемых полей больше 0.7, и, за исключением лишь 4 случаев, все индивидуальные корреляции больше 0.6. Подобные выводы можно сделать и для случая приземного экваториального воздействия.

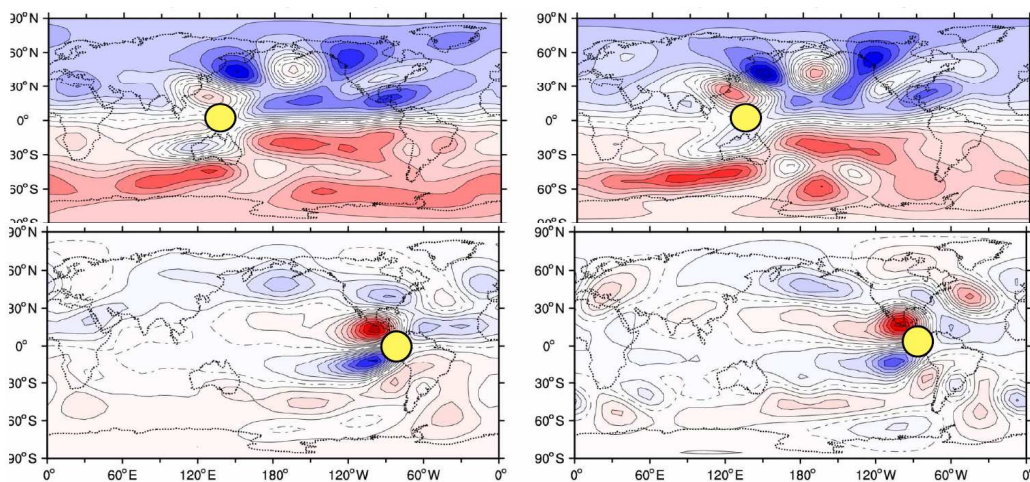


Рисунок 7. Отклик модели CSM0 (слева) и приближенный отклик (справа) на глубокое экваториальное воздействие с центрами в точках (135E,0N) (вверху) и (90W,0N) (внизу). Показаны поля ψ_{336} . Контурные интервалы соответствуют $5 \times 10^5 m^2 s^{-1}$. Область нагревания отмечена окружностью.

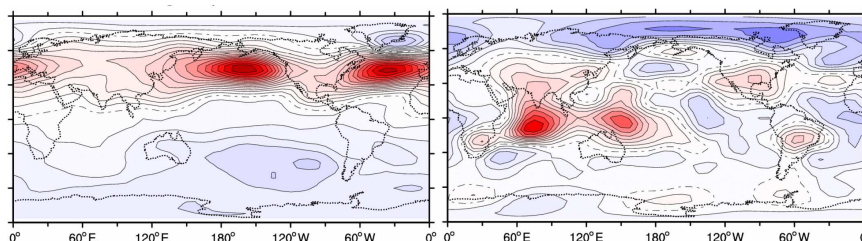
Перейдем к анализу результатов для случая глубокого воздействия в средних широтах. Картина отклика в этом случае кардинально отличается от случая экваториального воздействия – отклик имеет локальную структуру, эквивалентно баротропен вне области нагревания и имеет сильную зонально-симметричную компоненту. Приближенный оператор достаточно точно воспроизводит эти основные особенности отклика модели. В каждом отдельном случае приближенный оператор тоже воспроизводит отклик достаточно верно. Наибольшая ошибка имеет место для приземного уровня. Амплитуда отклика также передается не очень точно. В целом, пространственная структура отклика воспроизводится на уровне корреляций около 65%, при этом норма отклика занижена в среднем ϵ на 30%.

Последний рассмотренный случай относится к приземному воздействию в средних широтах. Как следует из вычислений, приближенный оператор отклика имеет гораздо меньшую точность, чем в других случаях. Это особенно относится для воздействий с центрами нагреваний над океанами, когда приближенный оператор не воспроизводит ни структуру, ни амплитуду отклика. В то же время, для других воздействий сохраняется достаточная точность при воспроизведении отклика. Анализ показывает, что основными источниками погрешностей могут быть «ненормальность» функции распределений (в этом случае формула (11) верна лишь приближенно) и погрешность из-за процедуры понижения размерности. В тех случаях, когда отклик модели слабый (это происходит как раз, когда центры воздействий находятся над

океанами), реакция модели на дополнительный, ложный форсинг (появляющийся вследствие применения процедуры понижения размерности) доминирует.

В разделе 4.6 рассматривается задача о построении воздействия вызывающего наибольшее изменение одной из наиболее значительных мод изменчивости атмосферы (и данной модели) - Североатлантической моды изменчивости (САМ) (Thompson, Wallace, 1988) (см. Рис. 10). Методика расчета заключается в оценке эффективности

Рисунок 8. Первая мода низкочастотной изменчивости модели ССМО (функция тока ψ_{991}) и соответствующая ей функция влияния.



возбуждения рассматриваемой структуры точечным тепловым источником, задаваемым в каждой точке сферы. Используя приближенный оператор отклика, оценим величину изменения 1 ЭОФ функции тока на нижнем сигма-уровне на термическое воздействие, центр которого находится в одной из точек 48x40 регулярной сетки, покрывающей сферу. Полученная величина является значением функции влияния в точке, соответствующей максимуму данного воздействия. Построенная функция влияния (Рис.8) сконцентрирована в нескольких областях, которые в ряде работ были признаны важными для возбуждения САМ (максимум в Индийском океане (Bader, Latif, 2003), вызывающий положительный отклик в САМ, отрицательные значения функции влияния в Арктике (Magnusdottir et al., 2004)).

Прямая проверка полученных результатов показывает, что полученная функция влияния действительно соответствует реальности. В первом тесте рассматривается отклик на воздействие из района максимума функции влияния в Индийском океане (нагревание в точке (75E,10S) приводит к отклику в Северном Полушарии, состоящем из сильной зональной компоненты с максимумами отклика на севере океанов, включающей диполь подобный САМ). Прямой численный эксперимент подтверждает, что модель реагирует на воздействие именно таким образом. Во втором примере рассмотрена широкая отрицательная область функции влияния в Арктике. Как и приближенный оператор отклика, модель атмосферы реагирует на термический форсинг с центром в (150W,75N) уменьшением САМ с близким по структуре откликом. Отклик ФДС-оператора на форсинг в области с центром в (60W,20S) показывает, что отклик в Северном Полушарии должен быть похож на САМ, причем основной характерной чертой отклика является сильная зонально-симметричная аномалия в средних широтах Южного Полушария. Оказывается, что и модель реагирует на данное воздействие похожим образом. Отклик на воздействие с центром в точке (97.5W, 35N) должен возбуждать монополярную структуру на севере Тихого океана и диполь в Северной Атлантике. В отклике модели также имеются эти особенности.

Раздел 4.7 посвящен решению задачи о чувствительности другой важной характеристики атмосферной циркуляции - распределения синоптических вихрей

(короткопериодной компоненты изменчивости функции тока $\overline{(\psi')^2}$ на уровне $\sigma = .336$) в Атлантике для модели CCM0. Построим сингулярное разложение приближенного оператора отклика для $\overline{(\psi')^2}_{.336}$, ограничивая пространство воздействий экваториальной полосой от 15S до 15N и синусоидальным по вертикали профилем. Норму отклика, при этом, будем оптимизировать в Североатлантическом регионе. Ведущая пара сингулярных векторов такой задачи, вычисленная по приближенному оператору отклика, представлена на Рис.9.

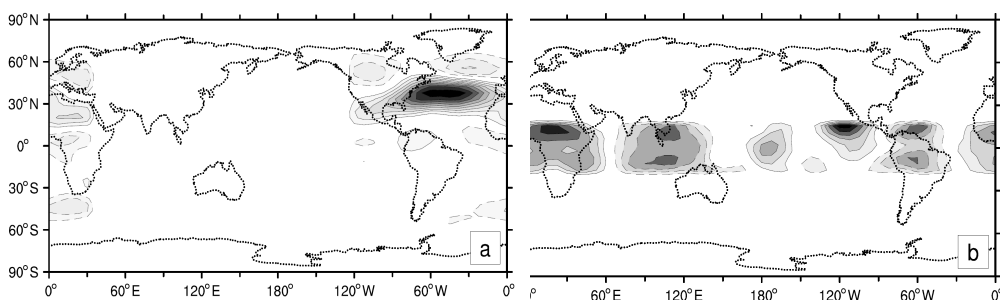


Рисунок 9. Ведущий сингулярный вектор для отклика $\overline{(\psi')^2}_{.336}$ в Северной Атлантике на экваториальные воздействия с синусоидальным по вертикали профилем. Изолинии- $1.4 \cdot 10^{12} m^4 s^{-2}$ и $0.04K/день$.

Первый важный вывод, следующий из анализа Рис.9 заключается в том, что отклик на весьма слабое по модулю воздействие (не превышающее $0.25K/день$) оказывается сильнее, чем в стандартных экспериментах. Исследуем механизм возбуждения отклика. Изменения функции тока на уровне .336 показывают, что на активность синоптических вихрей влияет структура, связанная с эффектом волновода в субтропической тропосферной струе (Branstator, 2002). Вычислив отклик в поле осадков на оптимальное воздействие можно также видеть, что данный форсинг создает мощные аномалии осадков в Восточном полушарии, которые, в свою очередь, возбуждают мощный отклик в циркуляции. Подставив оптимальное воздействие в правую часть модели и вычислив напрямую соответствующие изменения характеристик циркуляции, можно видеть, что сделанные выводы на самом деле имеют место.

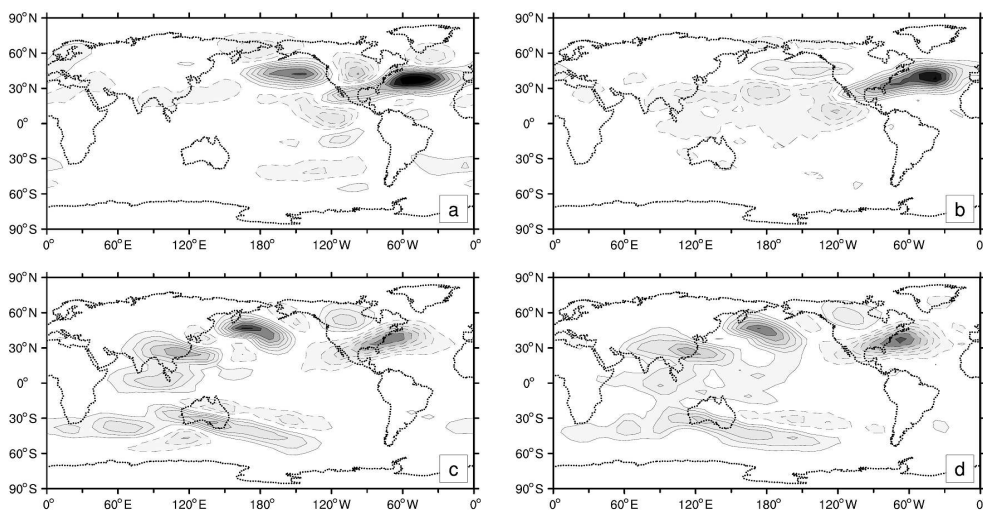


Рисунок 10. Аномалии высокочастотной изменчивости поля функции тока на уровне .336 вызванные термическим источником $2.5K/день$ в точках $(120W, 10N)$ (a – ФДС, b – модель) и $(90E, 10S)$ (c – ФДС, d – модель).

Рассмотрим далее отклик системы в поле $\overline{(\psi')^2}$ на воздействия из областей максимумов оптимального воздействия с Рис.9. На Рис.10 показан отклик $\overline{(\psi')^2}$ на термический форсинг в области с центрами в точках $(120W, 10N)$ и $(90E, 10S)$. Отклик

на первое воздействие локален, причем отклик над океанами имеет одинаковый знак. Второе воздействие вызывает глобальный отклик, отклики над океанами противоположены по знаку. Проведенные прямые эксперименты вновь подтверждают выводы, сделанные с помощью ФДС (см Рис.10bd).

По понятным причинам, решение обратной задачи с помощью приближенного оператора (найти воздействие вызывающее заданное изменение состояния системы) (раздел 4.8.) является практически более важным, чем решение прямой. Для тестирования обратного приближенного оператора использовался набор откликов модели на глубокие и приземные термические воздействия на экваторе и на 40с.ш., описанный выше. Для каждого такого отклика $\delta\bar{u}$ вычислялся приближенный форсинг по формуле $\delta f = L^{-1}\delta\bar{u}$, где L^{-1} это обратный оператор для приближенного оператора отклика, рассчитанного с помощью ФДС. Затем мы сравнивали δf с тем реальным воздействием, которое, будучи подставленным в правую часть модели, вызывало отклик системы $\delta\bar{u}$. На Рис.11 показаны средние (по 24м случаям нагревания) корреляции между восстановленным форсингом и реальным форсингом для каждого уровня для всех типов воздействия. Оператор точно воспроизводит структуру воздействия на тех уровнях, где оно достаточно сильное. Таким образом, для глубоких воздействий хорошо воспроизводится форсинг на уровнях от .811 до .336. Приземное воздействие хорошо воспроизводится на всех уровнях, где оно ненулевое. Приближенный оператор несколько занижает норму форсинга.

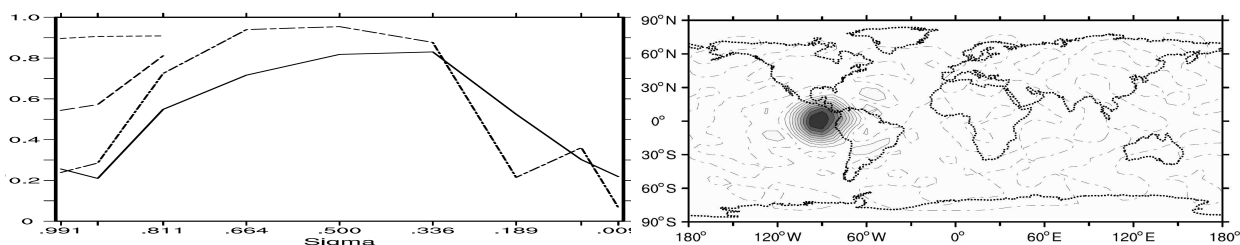


Рисунок 11. Слева: средние корреляции между реальным воздействием, и воздействием, восстановленным с помощью применения обратного оператора отклика. По оси y – величина корреляции, по оси x – сигма уровень, для которого она вычислялась. Сплошная линия соответствует случаю глубокого воздействия в тропиках, штрих-точечная линия – глубокому воздействию в средних широтах, длинный штрих – приземное воздействие на экваторе, короткий штрих – приземное воздействие в средних широтах. Справа: реконструкция форсинга на уровне 500мб для одного из «стандартных» экспериментов.

Как уже отмечалось, правые части реальных моделей атмосферы и климата явно зависят от времени. Следовательно, при построении приближенного оператора отклика необходимо использовать обобщенные флуктуационно-диссипационные соотношения в форме (12). Проверка работы метода для климатической модели САМЗ, правая часть которой содержала годовой ход приземной температуры и радиационных источников тепла описана в разделе 4.9. Процедура построения приближенного оператора по формуле (12) в целом аналогична автономному случаю (раздел 4.3). В работе рассматривается отклик модели САМЗ на термическое воздействие, центр которого находится в точке (60W, 00S). Сделан вывод о том, что приближенный оператор отклика и в неавтономном случае способен воспроизвести основные особенности

отклика системы. Более того, воспроизводятся его сезонные изменения. Так, например, достоверно воспроизводится глобальная структура отклика в северном полушарии для зимнего сезона с характерной волновой структурой с пятью максимумами. В тоже время для летнего сезона отклик в северном полушарии локален и сосредоточен вблизи области воздействия. Величина пространственных корреляций между реальным откликом системы и приближенным откликом не хуже 0.7-0.9. Соответствующие сезонные изменения отклика системы приводятся на Рис.12. Пространственная корреляция между предсказанными и реальными сезонными изменениями откликов не хуже 0.7. Результаты, полученные для других положений воздействия, а также для среднегодового отклика системы, в целом совпадают с приведенными результатами.

Для построения приближенного оператора отклика для модели ОЦА ИВМ РАН (раздел 4.10) был использован тот же алгоритм, что и для моделей ССМ0 и САМ3 с той лишь разницей, что статистические характеристики рассчитывались по ансамблю траекторий. Были вычислены две пары ведущих сингулярных векторов приближенного оператора отклика для среднего состояния системы. Для верификации приближенного оператора в правую часть модели ОЦА ИВМ РАН были подставлены термические источники, соответствующие первому и второму правому сингулярному вектору. Для каждого воздействия модель была проинтегрирована в течение длительного времени и были определены реальные изменения ее среднего состояния. Как и ожидалось, они с хорошей точностью совпали с левыми сингулярными векторами приближенного оператора.

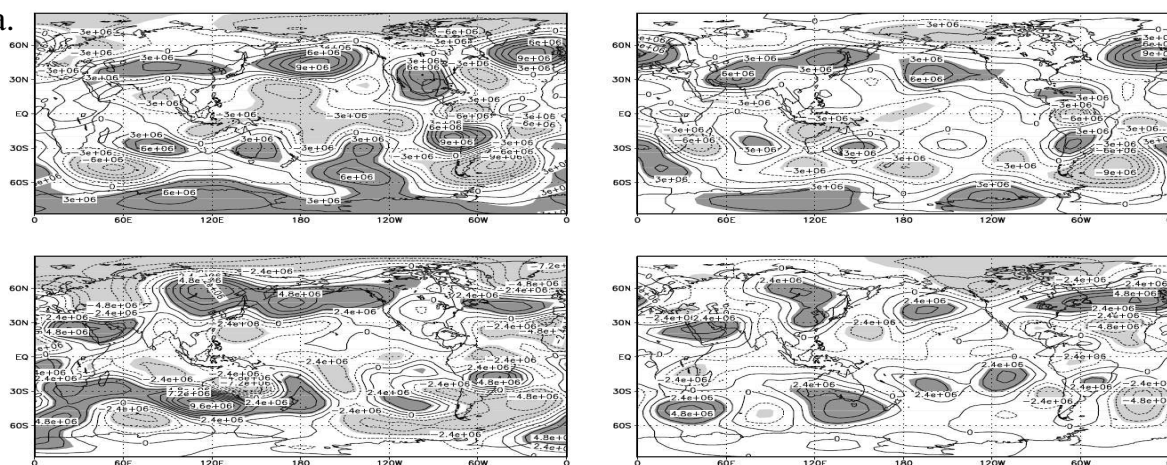


Рисунок 12. Справа: разница между откликами модели САМ3 (для поля функции тока на уровне $\sigma = .336$) на термическое воздействие 2.5C/день расположенное в точке (60W,0N) для января и июля (вверху), и для апреля и октября (внизу). Слева: соответствующая величина, полученная с помощью приближенного оператора отклика. Контурсы проведены через $1.5 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$. Области с большими по модулю отрицательными и положительными значениями функции тока выделены светло- и темно-серым цветом соответственно.

Чувствительность арктической осцилляции (АО) в модели общей циркуляции ИВМ РАН и реальной климатической системе к внешним воздействиям исследуется в разделе 4.11. Поскольку для построения оператора отклика требуется знать только достаточно длинную траекторию системы, то предложенную методику можно попытаться применить к данным наблюдений. Основная проблема, возникающая при построении оператора отклика по данным наблюдений, заключается в том, что к

настоящему моменту есть лишь 56 лет наблюдений и ошибки при вычислении ковариационной матрицы по такому короткому ряду могут быть большими. Таким образом, корректное обращение $C(0)$ возможно лишь в подпространстве ее старших собственных векторов (ЭОФов) очень небольшой размерности. С физической точки зрения это означает, что мы собираемся изучать чувствительность системы по отношению только к воздействиям из данного подпространства.

Для того чтобы найти размерность, при которой вычисление приближенного оператора отклика устойчиво, были использованы данные моделирования. Из полной траектории модели ОЦА ИВМ РАН были выделены несколько отрезков длиной 5040 суток (56 зим). Для каждого такого отрезка был независимо вычислен приближенный оператор отклика и построено его сингулярное разложение. Далее, изучалась зависимость структуры сингулярных векторов от числа ЭОФ, используемых при обращении $C(0)$. В результате оказалось, что при использовании менее 20 ведущих ЭОФ сингулярные векторы вычисляются устойчиво. Сравнивая вертикальную структуру оптимального воздействия для усеченного и “полного” (т.е. для оператора, построенного в базисе из 2000 ЭОФ) операторов видно, что, несмотря на 100-кратное снижение размерности основные характеристики оптимального воздействия сохраняются. Т.е. усеченный оператор способен воспроизвести оптимальное воздействие. Это оказывается возможным потому, что это оптимальное воздействие является крупномасштабным, принадлежит пространству ведущих ЭОФ системы и сохраняется при подобной процедуре. Аналогичный результат сохраняется и относительно горизонтальной структуры оптимального нагревания. Отсюда следует, что, во-первых, приближенный оператор отклика можно построить, имея в распоряжении лишь 56 лет наблюдений. При этом необходимо существенно снизить размерность задачи (и соответствующего оператора отклика), рассматривая только крупномасштабные процессы, принадлежащие пространству первых 20-25 ЭОФ системы. Во-вторых, по-видимому, несмотря на такое усечение, построенный оператор способен воспроизвести как структуру оптимального воздействия на систему, так и соответствующий отклик. Следовательно, построение приближенного оператора отклика для реальной климатической системы возможно.

Для построения оператора отклика реальной климатической системы были использованы данные NCEP/NCAR полей температуры и горизонтальных компонент скорости на 17ти стандартных уровнях, а также поля приземного давления в зимние периоды с 1948 по 2004гг (56 зим). Горизонтальное разрешение данных равнялось 4 градуса по долготе и 5 по широте, при этом использовались лишь данные для северного полушария. Дальнейшие вычисления проводились в пространстве первых 20-ти ведущих собственных векторов трехмерной ковариационной матрицы системы.

После того как оператор отклика климатической системы был построен, было вычислено его сингулярное разложение и найдены векторы, вызывающие наибольший отклик климатической системы. Оказалось, что первый сингулярный вектор имеет ярко выраженную зонально-симметричную структуру, при этом, максимум нагревания

расположен в нижней стратосфере. Таким образом, структура оптимального воздействия, построенного по данным моделирования с моделью ИВМ РАН близка к структуре оптимального воздействия, построенного по данным наблюдений. Единственное отличие заключается в том, что модель оказывается примерно в полтора раза менее чувствительной, чем "реальность". Хорошо видно, что оптимальное воздействие в обоих случаях вызывает динамический отклик близкий по структуре к АО. Отсюда также следует, что АО наиболее чувствительна к термическим воздействиям в высоких широтах нижней стратосферы. Это хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования (Дымников и др., 2005).

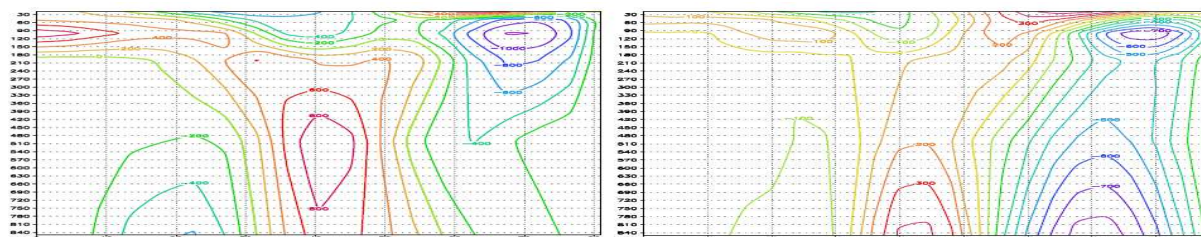


Рис.13. Вектор вызывающий наибольшее изменение АО в модели ОЦА ИВМ РАН и природе.

С помощью построенного оператора отклика было также вычислено воздействие, вызывающее наибольший отклик климатической системы вдоль АО. Зонально-осредненное воздействие представлено на Рис. 13 (справа). Сравнивая это воздействие с воздействием, полученным для модели ИВМ РАН (Рис.13, слева) хорошо видно, что структуры воздействий оказываются близкими. Таким образом, можно сделать вывод, что модель ОЦА ИВМ РАН адекватно воспроизводит процесс возбуждения АО. В работе также делается вывод о том, что для того чтобы модель адекватно воспроизводила чувствительность реальной климатической системы необходимо, чтобы модель воспроизводила сдвиговые корреляционные функции реальной системы.

В разделе 4.12. перечислены основные результаты четвертой главы.

В заключении сформулированы основные результаты, представляемые к защите.

Основные результаты, представляемые к защите.

Разработан комплекс новых методов исследования атмосферной циркуляции и ее чувствительности к малым внешним воздействиям, с помощью которого решен ряд важных практических задач. В том числе:

1. Предложен и численно реализован метод исследования локальной структуры и свойств аттракторов моделей атмосферной циркуляции основанный на аппроксимации распределения плотности вероятности периодическими орбитами. В частности, для рассматриваемых систем установлено существование набора периодических траекторий, аппроксимирующих аттрактор и статистические характеристики системы. Показано наличие связи между ведущими модами изменчивости системы и периодическими орбитами, выявлены слабо неустойчивые «невидимые» части аттрактора. Исследовано поведение размерности аттрактора моделей при изменении параметров системы, установлены причины возникновения явления «излишнего хаоса». Для класса моделей установлено свойство парной симметрии показателей Ляпунова.

2. Для систем уравнений, описывающих крупномасштабную динамику атмосферной циркуляции, разработаны и исследованы различные методы построения операторов отклика их статистических характеристик на малые внешние воздействия – методы, основанные на использовании ФДС и неустойчивых периодических траекторий. Проведено сравнение точности данных методов. Сделан вывод о возможности использования ФДС для аппроксимации операторов отклика моделей динамики атмосферы на малые внешние воздействия.

3. Разработана эффективная вычислительная технология реализации методов исследования чувствительности статистических характеристик моделей ОЦА и реальной климатической системы. Технология реализована для модели ИВМ РАН, моделей ССМ0 и САМ3 Национального центра атмосферных исследований США, данных наблюдений NCEP/NCAR. С помощью прямых численных экспериментов с моделями атмосферы показана ее высокая эффективность при решении прямых и обратных задач.

4. С помощью построенных методов решен ряд важных физических проблем: изучена природа 25-ти дневной моды изменчивости атмосферы, построены оптимальные воздействия, вызывающие максимальное изменение изменчивости синоптических вихрей в модели ССМ0, построена функции влияния для Североатлантической моды изменчивости атмосферной циркуляции, исследованы сезонные особенности отклика модели САМ3 на экваториальные термические воздействия, построено оптимальное воздействие для возбуждения арктической осцилляции в модели ИВМ РАН и данных наблюдений, подтверждена гипотеза об оптимальности возбуждения АО из нижней стратосферы полярных широт. Сформулирован необходимый критерий качества моделей атмосферы при их использовании для оценок чувствительности реальной климатической системы.

Благодарности

Докладчик выражает искреннюю признательность **В.П. Дымникову** за плодотворную совместную работу и дискуссии по многим проблемам исследования и **Г. Бранстатору** за многолетнее плодотворное научное сотрудничество. Для большинства вычислений использовались компьютерные ресурсы **МСЦ РАН**.

Список основных публикаций

Список работ автора по теме диссертации, опубликованных в рецензируемых изданиях из списка ВАК.

1. Дымников В.П., А.С.Грицун, Ляпуновские показатели и размерность аттрактора двухслойной бароклинической модели атмосферной циркуляции // Доклады РАН. 1996. Т.347, №4. С. 535-538.
2. Дымников В.П., Грицун А.С., Баротропная неустойчивость и структура низкочастотной изменчивости циркуляции, порождаемой двухслойной бароклинической моделью атмосферы // Известия РАН, ФАиО. 1996. Т.32, №5. С. 535-538.

3. A.Gritsun, On the structure of the finite-dimensional approximations of the barotropic vorticity equation on a rotating sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. V.12, №1. P. 13-33.
4. Грицун А.С., Дымников В.П. Отклик баротропной атмосферы на малые внешние воздействия. Теория и численные эксперименты // Известия РАН, ФАиО. 1999. Т.35, №5. С. 511-525.
5. Дымников В.П., Грицун А.С., Парная симметрия глобальных показателей Ляпунова для моделей динамики атмосферы // Известия РАН, ФАиО. 2001. Т.37, №3. С. 269-274.
6. A.Gritsun, Fluctuations-dissipation theorem on attractors of atmospheric model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2001. V.16, №2. P. 115-133.
7. V.P. Dymnikov, A.S. Gritsun, Climate model attractors: chaos, quasi-regularity and sensitivity to small perturbations of external forcing // Nonlinear proc. in geophysics. 2001. V.8, №4/5. P. 201-209.
8. V.P. Dymnikov, A.S. Gritsun, Chaotic attractors of atmospheric models // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. V.17, №3. P. 249-281.
9. A.Gritsun, V.Dymnikov, G.Branstator, Construction of a linear response operator of an atmospheric general circulation model to small external forcing // Russ J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. V.17, №5. P. 399-416.
10. Дымников В., Е. Володин, В.Галин, А.Глазунов, А. Грицун, Н.Дианский, В. Лыкосов, Климат и его изменения: математическая теория и численное моделирование // Сибирский журнал вычислительной математики. 2003. Т.8, №4. С. 347-379.
11. Dymnikov V.P., Diansky N.A., Galin V.Ya, Glazunov A.V., Gritsoun A.S., Lykossov V.N., Volodin E.M., Modelling the climate system response to small external forcing // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V.19, №2. P. 131-162.
12. Дымников В.П., Е.М.Володин, В.Я. Галин, А.В. Глазунов, А.С.Грицун, Н.А. Дианский, В.Н. Лыкосов, 2004, Чувствительность климатической системы к малым внешним воздействиям // Метеорология и гидрология. 2004. №4. С. 77-91.
13. Дымников В.П., Грицун А.С. Современные проблемы математической теории климата // Известия РАН серия, ФАиО. 2005. Т.41, №3. С. 294-314.
14. A.Gritsun, G.Branstator, Climate Response Using a Three-Dimensional Operator Based on the Fluctuation–Dissipation Theorem // Journal of Atmos. Sci., 2007, V.64, P. 2558–2575.
15. Gritsun A., Branstator G., Majda A., Climate response of linear and quadratic functionals using the fluctuation-dissipation theorem // Journal of Atmos.Sci. 2008. V.65. P. 2824-2841.
16. Gritsun A.S. Unstable periodic trajectories of a barotropic model of the atmosphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. V.23, №4. P.345–367.
17. Грицун А., Связь периодических траекторий и мод изменчивости баротропной модели крупномасштабной динамики атмосферы // Доклады АН, 2011, Т.438, №1.
18. Грицун А., Статистические характеристики баротропной модели атмосферы и ее неустойчивые периодические решения // Доклады АН. 2010. Т.435, №6. С. 810-814.
19. Gritsun A., Unstable periodic orbits and sensitivity of the barotropic model of the atmosphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. V.25, №4. P. 303-321.

20. Грицун А., Построение операторов отклика на малые внешние воздействия для моделей общей циркуляции атмосферы с периодическими по времени правыми частями // Изв. РАН. ФАиО, 2010, Т.46, №6, С. 808-817.

Другие работы автора по теме диссертации.

21. Дымников В.П., Грицун А.С., Хаотические аттракторы климатических моделей, М.: Препринт ИВМ РАН N293/2000. 2000. 52С.

22. Дымников В.П., Е.М.Володин, В.Я. Галин, А.В. Глазунов, А.С.Грицун, Н.А. Дианский, В.Н. Лыкосов, М.А.Толстых, А.И.Чавро, Моделирование климата и его изменений, Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т.2, М.: Наука. 2005. 404 стр. (С.36-174).

23. Gritsun A., Comments on "On the diagnosis of climate sensitivity using observations of fluctuations" by D. Kirk-Davidoff // Atmos.Chem. Phys. Discuss. 2008. V.8. S5939-S5944.

24. Gritsun A., Estimation of the sensitivity of atmospheric systems using fluctuation-dissipation theorem and unstable periodic orbits // Oberwolfach reports. 2010. V.7, issue 4. P. 2027-2099 (Mathematical Theory and Modelling in Atmosphere-Ocean-Science. Report No. 34//2010, DOI: 10.4171/OWR/2010/34).